Décision dans l'incertain

Cours 1: l'incertain

Stéphane Airiau

Université Paris-Dauphine

Introduction

Une approche purement logique à la prise de décision n'est pas tenable.

- un agent ne possède presque jamais toute l'information nécessaire pour prendre une décision

➩ soit l'agent est bloqué et ne sait pas continuer

➩ soit il prend sa chance et exécute une action

- Supposons qu'un agent possède un plan $\mathcal{P}$ pour arriver à l'heure en cours. Avec une approche logique, onpourrait dire que le plan va fonctionner s'il n'y a pas grêve générale, s'il n'y a pas d'incident sur les lignes de métro, s'il n'y a pas de verglas sur le trottoir, etc...

mais comme ces conditions ne peuvent pas être inférées, on ne peut pas savoir si le plan va réussir...

➩ comment savoir ce qu'il faut faire ? ?

Introduction

- Même si $\mathcal{P}$ est la bonne chose à faire, qu'est-ce que cela veut dire ?
  - si $\mathcal{P}$ me fait partir 60min avant l'heure du cours, mais je suis obligé de courir, de traverser au rouge...
  - si $\mathcal{Q}$ me fait partir 90min avant l'heure du cours, peut être que je vais attendre trop de temps dans le froid...
  - supposons que ces deux plans fonctionnent, on peut utiliser un indice de performance
  - ➡ comment le définir proprement ?
- ➡ est-ce qu'on peut définir "la bonne" chose à faire ? la décision "rationnelle" ? "parfaite" ?
- cette "bonne" décision doit prendre en compte l'importance des différents buts, le degré de réussite à atteindre ces buts, etc...

La bataille de Narva

En 1700, l'armée suédoise attaque l'armée Russe, qui possède pourtant deux fois plus de soldats. l'armée suédoise saisie l'opportunité du blizzard qui souffle pour attaquer les russes et gagner une victoire imprévisible !

- Etait-ce la bonne action à faire ? Oui, ils ont gagné
- Etait-ce une action rationnelle ?

On va plutôt essayer de déterminer ce qui est l'action rationnelle.

Exemple d'un diagnostic

Supposons qu'on aide à l'élaboration d'un diagnostic

- il est surement impossible (ou nécessiterait une patience infinie) d'écrire la liste de toutes les conditions, causes, cas particuliers pour effectuer le diagnostic
- la science médicale n'a peut être pas une théorie complète !
- même si on connaissait exactement toutes les règles qui régissent le fonctionnement d'un être humain, on n'a pas fait nécessairement tous les tests ou analyses.

On peut surement ré écrire cet example pour un diagnostic de panne de voitures, d'ordinateurs, dans le droit, etc...

une approche purement logique n'est pas tenable.

But

Pour définir/prendre une bonne décision

- raisonner sur une mesure de l'incertain
  - comment représenter l'incertain ?
  - comment raisonner sur ces modèles ?
  - comment construire ces modèles ?
- raisonner sur l'importance de nos différents buts
  - comment représenter l'importance, comparer différent but ?
  - comment obtenir cette importance en pratique ?
- Il va falloir combiner l'incertain et l'importance des différents buts !

Plan du cours (tentative)

Représenter l'incertain

- Qu'est-ce qu'une probabilité
- Représentations sans probabilités
- Réseaux bayésiens (inférence, construction)

Représenter les préférences

- préférences ordinales
- préférences cardinales ⇒ théorie de l'utilité

Théorie de la décision : combiner préférences et l'incertain

- principe de la décision qui maximise l'utilité espérée

Décisions séquentielles

- processus de décision markoviens
- processus de décision markoviens partiellement observables

Evaluation

par manque de vision de l'enseignant
100% examen.

Représentation de l'incertitude

- préoccupation apparait au XVII$^{\text{ième}}$ siècle (Huyghens, Pascal, Bernoulli)
  chance, probabilité (fiabilité des témoignages dans les tribunaux).
  Déjà des notions de probabilités subjectives.
- au XX$^{\text{ième}}$ siècle, la théorie de la décision en présence de risque, décision dans l'incertain subjectif
- avec l'informatique, on s'est reposé des questions sur la représentation, sans forcément suivre la théorie de la probabilité
  - dans année 70 avec les systèmes experts : calcul d'incertitude avec des degrés de croyance et de défiances
  - en NLP : comment représenter la phrase "Paul est jeune" ?

Raisonner dans l'ignorance

Penser au premier patient qui a reçu une transplantation cardiaque : même s'il y a eu des succès sur des transplantations sur les animaux, il n'exitait alors aucune donnée sur les humains ⇨ il etait impossible de raisonner avec des probabilités !

⇨ décision dans l'ignorance !

Cependant, le patient pouvait quand même faire un raisonnement !

	méthode de transplantation fonctionne	méthode de transplantation ne fonctionne pas
opération	vie plus longue	mort
pas d'opération	mort	mort

Quelques problèmes/énigmes pour montrer que raisonner avec l'incertain et/ou les probabilités n'est pas toujours facile.

Ici, on ne cherchera pas à nécessairement donner la réponse satisfaisante, on cherche simplement à montrer que ce n'est pas simple !

Raisonner sur l'incertain : c'est subtil!

On a quatre cartes :

- l'as et le deux de coeur
- l'as et le deux de pique

On mélange les cartes, et on donne deux cartes à Alice.

- quelle est la probabilité qu'Alice possède deux as ?
- quelle est la probabilité qu'Alice possède au moins un as ?
- quelle est la probabilité qu'Alice possède l'as de coeur ?

- Alice dit maintenant "J'ai un as !"
- Béa calcule que la probabilité qu'Alice possède deux as est de $\frac{1}{5}$.
- Maintenant si Alice dit "J'ai l'as de coeur"
- la probabilité qu'Alice possède deux as est maintenant de $\frac{1}{3}$.
- si on fait le raisonnement similaire, posséder l'as de pique amènerait la même réponse.

➩ pourquoi la probabilité qu'Alice possède deux as sachant qu'elle en a un n'est-elle donc pas $\frac{1}{3}$ depuis le début ?

Raisonner sur l'incertain : c'est subtil! (2)

- Trois portes sont devant vous : une voiture se cache devant la première, une chèvre se cache derrière chacune des deux autres portes.
- Vous choisissez la porte n^o1.
- Avant que la porte n^o1 ne s'ouvre, on ouvre la porte n^o3 et on découvre une chèvre !
- devriez-vous changer de porte ?

Raisonner sur l'incertain : c'est subtil! (2)

- Trois portes sont devant vous : une voiture se cache devant la première, une chèvre se cache derrière chacune des deux autres portes.
- Vous choisissez la porte n^{o}1.
- Avant que la porte n^{o}1 ne s'ouvre, on ouvre la porte n^{o}3 et on découvre une chèvre !
- devriez-vous changer de porte ?

a priori, il n'y a aucune raison de changer !

- Si la voiture se trouve derrière la porte n^{o}1, il n'y a pas de raison de changer
- Si la voiture ne se trouve pas derrière la porte n^{o}1, elle se trouve derrière la porte n^{o}2 et il faut changer

➥ puisque la probabilité qu'elle se trouve derrière la porte n^{o}1 est de $\frac{1}{3}$, on devrait peut être changer avec une probabilité $\frac{2}{3}$.

Ai-je commis une erreur ?

Raisonner sur l'incertain : c'est subtil! (3)

Alice possède deux pièces : une qui est parfaitement équilibrée, et l'autre qui retombe sur pile deux fois plus souvent que sur face. Alice peut les reconnaître. Elle choisit une pièce et la lance.

Béa sait qu'une des pièces est équilibrée et que l'autre retombe sur pile deux fois plus souvent que sur face. Elle ne sait pas quelle pièce Alice a choisi, ni ne connait la probabilité que la pièce équilibrée ait été choisie.

- Quelle est la probabilité que la pièce tombe sur pile selon Alice ?
- Quelle est la probabilité que la pièce tombe sur pile selon Béa ?

Raisonner sur l'incertain : c'est subtil! (3)

Alice possède deux pièces : une qui est parfaitement équilibrée, et l'autre qui a une probabilité de $\frac{2}{3}$ de tomber sur pile. Alice peut les reconnaître. Alice peut choisir la pièce. Si elle tombe sur pile, elle gagne 1€, sinon elle paye 1 €.

Quelle pièce doit chosir Alice ?

Raisonner sur l'incertain : c'est subtil! (3)

Alice possède deux pièces : une qui est parfaitement équilibrée, et l'autre qui a une probabilité de $\frac{2}{3}$ de tomber sur pile. Alice peut les reconnaître. Alice peut choisir la pièce. Si elle tombe sur pile, elle gagne 1€, sinon elle paye 1 €.

Quelle pièce doit chosir Alice ?

Evidemment, celle qui a plus de chance de tomber sur pile !

Raisonner sur l'incertain : c'est subtil! (3)

Alice possède deux pièces : une qui est parfaitement équilibrée, et l'autre qui a une probabilité de $\frac{2}{3}$ de tomber sur pile. Alice peut les reconnaître. Alice peut choisir la pièce. Si elle tombe sur pile, elle gagne 1€, sinon elle paye 1 €.

Quelle pièce doit chosir Alice ?

Evidemment, celle qui a plus de chance de tomber sur pile !

Supposons maintenant qu'Alice ne sait pas si la première pièce est équilibrée. Que doit-elle faire ?

Et si on devait jeter la pièce 10 fois ?

Raisonner sur l’incertain : c’est subtil! (4)

Alice a maintenant une seule pièce équilibrée. Elle la lance et s’apprête à regarder le résultat.

- a priori, la probabilité qu’elle soit tombée sur pile est toujours de $\frac{1}{2}$
- d’un autre côté, la pièce est tombée, donc elle est soit sur sa face pile, soit sur sa face face ! donc la probabilité devrait être soit 0 soit 1 !

Représenter l'incertain

- utiliser les probabilités : ce n'est pas la seule représentation, et pas toujours le meilleur choix !
- fonction de croyance
- mesures de possibilités
- mesures de plausibilités

On acquiert souvent de nouvelles informations
➾ pour les probabilités, on utilise la notion de probabilités conditionnelle.
on peut étudier comment on met à jour nos croyances avec de nouvelles informations.

On peut aussi considérer la notion d'indépendance
➾ cours sur les réseaux bayésiens

Réprésenter l'incertain avec des nombres

- il faudra obtenir ces nombres, et cela peut être compliqué s'ils sont "compliqués"
- une fois qu'on utilise des nombres, tout semble comparable.

➡ d'autres représentations numériques ont été proposées dans la littérature.

Il existe aussi des représentations non numériques

Mondes possibles

On part souvent d'un ensemble de mondes possibles : ce sont tous les états qu'un agent consière possible.
➩un jet de dé va être représenté par 6 mondes possibles.

On peut aussi considérer que c'est une première mesure qualitative d'incertitude : plus il y a de monde possible, plus grande est l'incertitude.

Le choix des mondes possibles peut être compliqué mais marque déjà la reconnaissance de ce qui est possible d'impossible (si je joue aux dés sur le lit des enfants, le dé peut être entre plusieurs faces !).

On notera souvent $W = \{w_1, w_2, \cdots, w_n\}$ l'ensemble des mondes possibles.

Théorie

Definition (algèbre)

Une algèbre sur W est un ensemble $\mathcal{F}$ de sous ensembles de W qui contient W et qui est clos sous l'union et le complémentaire : si U et V sont dans $\mathcal{F}$, alros $U \cup V$ et $\bar{U}$ le sont aussi.

Definition (Espace de probabilité)

Un espace de probabilité est un tuple $(W, \mathcal{F}, \mu)$ où $\mathcal{F}$ est une algèbre sur W et $\mu : \mathcal{F} \to [0,1]$ et satisfait les deux propriétés suivantes :

- (P1) $\mu(W) = 1$
- (P2) $\mu(U \cup V) = \mu(U) + \mu(V)$ si $U \cap V = \emptyset$

La philosophie des probabilités

Deux vues s'opposent sur ce que sont les probabilités.

- vision objectiviste : les probabilités refèrent à des propriétés du monde physique
- vision subjective : les probabilités refèrent à un degré de croyance du décideur.

Quelle est la probabilité que votre compagnon vous demande en mariage ?

Vue Objective : Interpretation classique

(Laplace, Pascal, Bernoulli, Leibniz)

Il existe un ensemble de mondes possibles qui ont tous la même probabilité.
➩ le processus aléatoire doit être décomposé en mondes possibles de même probabilité.

pour un dé pipé, cela parait compliqué mais on peut décomposer en plus de 6 mondes et faire apparaître des mondes possibles plus compliqués qui auraient tous la même probabilité.
➩ compliqué, mais interprétation possible.

Un problème technique : si le nombre de mondes possibles est infini, la probabilité est zéro...

Vue Objective : Interpretation fréquentiste

probabilité = nombre de fois où on a observé ce monde sur le nombre total d'observation.

Si on lance une pièce 1000 fois et que l'on observe pile 537 fois, la probabilité serait de 0.537.

Si je recommence l'opération, je trouve 488 fois pile. La probabilité auraitelle changé ?

Que se pass-t-il pour des évènements rares (ex : Fukushima, une election) on pourrait dire que c'est une fréquence limite... mais cela pose aussi problème (pas observable, construction abstraite, ...)

Vue Objective : Interpretation propensionniste

(Karl Popper)
probabilité est une tendance qu'a un certain objet.
un objet symmetrique va avoir tendance à générer des évènements dans les mêmes proportions.

approche intéressante, mais un peu trop vague, et difficile à observer ou vérifier.

il y a un autre argument en utilisant la loi de Bayes. Supposons qu'on connaisse la probabilité qu'un train arrive à l'heure étant donné qu'il parte à l'heure. On peut pense à la tendance à arriver à l'heure si on part à l'heure. Même si on peut parler de la probabilité de partir à l'heure si on arrive à l'heure, il parait étrange de parler qu'arriver à l'heure à tendance à faire partir à l'heure !

Vue Subjective

(de Finetti, Savage)

Les probabilités ne sont pas des propriétés du monde physique, mais des constructions intellectuelles.

Quelle est la probabilité qu'il pleuve demain ? Comment peut-on décider demain qui avait raison ? Est-ce que quelqu'un peut avoir tord ?

Pour qu'un degré de croyance devienne une probabilité, il faudra satisfaire quelques propriétés.

L'idée est que ces probabilités subjectives vont avoir des conséquences sur le comportement du sujet, et donc on va pouvoir mesurer leurs effets.

poser des questions pour "elliciter" ses probabilités.

ex : combien êtes vous prêt à assurer votre vélo contre le vol cette année ?

experience de Tversky et Kahneman

description : Linda a 31 ans, célibataire, franche, intelligente. Elle a obtenu une licence en philosophie. Pendant ses études, elle s'est intéressée aux problèmes de discrimination et de justice sociale, et elle a participé à des manifestations anti nucléaire.

Ordonnez les 8 descriptions suivantes en terme de probabilité qu'elle décrivent Linda.

a- Linda est enseignante en primaire

b- Linda est libraire et fait du yoga

c- Linda est active dans une organisation féministe

d- Linda est un travailleur social

e- Linda est membre de la Ligue des Electeurs Femmes

f- Linda travaille dans une banque

g- Linda vend des contrats d'assurance

h- Linda travaille dans une banque qui est active dans une organisation féministe