Décision dans l'incertain

Cours 3: Rappels de probabilités

Stéphane Airiau

Université Paris-Dauphine

Variables aléatoires

On note $V = \{X, Y, \ldots\}$ un ensemble de variables aléatoires.

- chaque variable X peut prendre des valeurs dans un domaine $Dom(X)$
  dans un premier temps, on peut supposer que ce domaine est fini et discret.
- chaque variable $X \in V$ peut prendre n'importe quelle valeur dans $Dom(X)$.

- exemples :
  - $Dom(X) = \{x_1, x_2, x_3\}$
  - $Dom(Météo) = \{soleil, pluie, nuageux, neige\}$
  - $Dom(SEspresso) = \{\top, \bot\}$

Variables aléatoires / Mondes possibles

- Une formule est une combinaison logique d'affectaction de variables
- $X = x_1$, $(X = x_2 \vee X = x_3) \wedge Y = y_2$
- $\mathcal{L}$ est l'ensemble des formules (ou langage).

Un monde possible est une affectation de toutes les variables.

- similaire à l'approche logique : modèles

On notera W l'ensemble des mondes possibles.

Distribution de probabilités

Definition (distribution)

Une distribution de probabilité $\mathbb{P} : \mathcal{L} \to [0,1]$ telle que

- $0 \leqslant \mathbb{P}(\alpha) \leqslant 1$
- Si α est une tautologie, $\mathbb{P}(\alpha) = 1$
- $\mathbb{P}(a \vee \beta) = \mathbb{P}(\alpha) + \mathbb{P}(\beta) - \mathbb{P}(\alpha \wedge \beta)$

$\mathbb{P}(\alpha)$ représente le degré de croyance en α

- $\mathbb{P}(X = x_1) = \mathbb{P}(x_1) = 0.0$
- $\mathbb{P}(Loc(stephane) = bureau) = 0.6$
- $\mathbb{P}(Loc(stephane) = bureau \vee Loc(stephane) = lab) = 0.99$

Mesure de probabilité

$\mu(w)$ mesure le degré que le monde "actuel" est le monde possible w.

Si w a une mesure de 0, vous considérez que ce monde est impossible !

Etant donné une mesure μ, on peut déterminer le degré de croyance de la formule $\alpha \in \mathcal{L}$.

➯ sommer les mesures de tous les mondes qui satisfont la formule

$$\mathbb{P}(\alpha) = \sum_{w \in W} \{\mu(w) : w \models \alpha\}$$

On appelle ce type de probabilités (en absence de toute autre information) probabilités inconditionnelles ou antérieures (prior en anglais).

Exemple

mesure de probabilités			
$tcpa$	0.162	$\bar{t}cpa$	0.0
$tcp\bar{a}$	0.018	$\bar{t}cp\bar{a}$	0.0
$tc\bar{p}a$	0.016	$\bar{t}c\bar{p}a$	0.0
$tc\bar{p}\bar{a}$	0.004	$\bar{t}c\bar{p}\bar{a}$	0.0
$t\bar{c}pa$	0.432	$\bar{t}\bar{c}pa$	0.0
$t\bar{c}p\bar{a}$	0.288	$\bar{t}\bar{c}p\bar{a}$	0.0
$t\bar{c}\bar{p}a$	0.008	$\bar{t}\bar{c}\bar{p}a$	0.0
$t\bar{c}\bar{p}\bar{a}$	0.072	$\bar{t}\bar{c}\bar{p}\bar{a}$	0.0

$\mathbb{P}(t) =$

$\mathbb{P}(\neg t) =$

$\mathbb{P}(c) =$

$\mathbb{P}(\neg c) =$

$\mathbb{P}(p) =$

$\mathbb{P}(a) =$

$\mathbb{P}(c \wedge p) =$

$\mathbb{P}(c \vee p) =$

$\mathbb{P}(a \rightarrow p) =$

Exemple

mesure de probabilités

$tcpa$	0.162	$\bar{t}cpa$	0.0
$tcp\bar{a}$	0.018	$\bar{t}cp\bar{a}$	0.0
$tc\bar{p}a$	0.016	$\bar{t}c\bar{p}a$	0.0
$tc\bar{p}\bar{a}$	0.004	$\bar{t}c\bar{p}\bar{a}$	0.0
$t\bar{c}pa$	0.432	$\bar{t}\bar{c}pa$	0.0
$t\bar{c}p\bar{a}$	0.288	$\bar{t}\bar{c}p\bar{a}$	0.0
$t\bar{c}\bar{p}a$	0.008	$\bar{t}\bar{c}\bar{p}a$	0.0
$t\bar{c}\bar{p}\bar{a}$	0.072	$\bar{t}\bar{c}\bar{p}\bar{a}$	0.0

$\mathbb{P}(t) = 1$
$\mathbb{P}(\neg t) = 0$
$\mathbb{P}(c) = 0.2$
$\mathbb{P}(\neg c) = 0.8$
$\mathbb{P}(p) = 0.9$
$\mathbb{P}(a) = 0.618$
$\mathbb{P}(c \wedge p) = 0.18$
$\mathbb{P}(c \vee p) = 0.92$
$\mathbb{P}(a \rightarrow p) = \mathbb{P}(\neg a \vee p) = 1 - \mathbb{P}(a \wedge \neg p) = 0.976$

Relation

A toute mesure μ correspond une distribution induite $\mathbb{P}$.

Pour toute distribution $\mathbb{P}$, il existe une mesure μ qui induit $\mathbb{P}$.

➡ on a bien une correspondance.

Probabilités conditionnelles

ou comment utiliser une information nouvelle.

$\mathbb{P}(b \mid a)$ Probabilité de b sachant a

avec l'information que a est vrai, qu'est-ce que cela change pour la probabilité que b soit vraie ?

$$\mathbb{P}(b \mid a) = \frac{\mathbb{P}(a \wedge b)}{\mathbb{P}(a)}$$

$\mathbb{P}(b \mid a) = 0.6$ est à interpréter par "si a est vrai, en l'absence de toute autre information, alors b est vrai avec une probabilité de 60%".

PS : Si $\mathbb{P}(a) = 0$, on utilise souvent la convention $\mathbb{P}(b \mid a) = 1$

Sémantique des probabilités conditionnelles

$\mathbb{P}(b \mid a)$ mesure le poid relatif des mondes où b est vrai parmi les mondes ou a est vrai.

Tous les mondes où a est faux ne jouent aucun rôle ou n'ajoute aucune information.

$$\mathbb{P}(b \mid a) = \frac{\sum_{w \in W} \{\mu(w) : w \models a \wedge b\}}{\sum_{w \in W} \{\mu(w) : w \models a\}}$$

Intuitivement, si vous apprenez a, vous devriez changer votre degré de croyance en b de $\mathbb{P}(b)$ à $\mathbb{P}(b \mid a)$.

Exemple

mesure de probabilités			
$tcpa$	0.162	$\bar{t}cpa$	0.0
$tcp\bar{a}$	0.018	$\bar{t}cp\bar{a}$	0.0
$tc\bar{p}a$	0.016	$\bar{t}c\bar{p}a$	0.0
$tc\bar{p}\bar{a}$	0.004	$\bar{t}c\bar{p}\bar{a}$	0.0
$t\bar{c}pa$	0.432	$\bar{t}\bar{c}pa$	0.0
$t\bar{c}p\bar{a}$	0.288	$\bar{t}\bar{c}p\bar{a}$	0.0
$t\bar{c}\bar{p}a$	0.008	$\bar{t}\bar{c}\bar{p}a$	0.0
$t\bar{c}\bar{p}\bar{a}$	0.072	$\bar{t}\bar{c}\bar{p}\bar{a}$	0.0

$\mathbb{P}(p \mid c) =$
$\mathbb{P}(p \mid \neg c) =$
$\mathbb{P}(a) =$
$\mathbb{P}(a \mid \neg p) =$
$\mathbb{P}(a \mid \neg p \wedge c) =$

Remarquer que le changement des probabilités n'est pas monotonne quand on ajoute de l'information !

Exemple

mesure de probabilités			
$tcpa$	0.162	$\bar{t}cpa$	0.0
$tcp\bar{a}$	0.018	$\bar{t}cp\bar{a}$	0.0
$tc\bar{p}a$	0.016	$\bar{t}c\bar{p}a$	0.0
$tc\bar{p}\bar{a}$	0.004	$\bar{t}c\bar{p}\bar{a}$	0.0
$t\bar{c}pa$	0.432	$\bar{t}\bar{c}pa$	0.0
$t\bar{c}p\bar{a}$	0.288	$\bar{t}\bar{c}p\bar{a}$	0.0
$t\bar{c}\bar{p}a$	0.008	$\bar{t}\bar{c}\bar{p}a$	0.0
$t\bar{c}\bar{p}\bar{a}$	0.072	$\bar{t}\bar{c}\bar{p}\bar{a}$	0.0

$\mathbb{P}(p \mid c) = 0.9$
$\mathbb{P}(p \mid \neg c) = 0.9$
$\mathbb{P}(a) = 0.618$
$\mathbb{P}(a \mid \neg p) = 0.27$
$\mathbb{P}(a \mid \neg p \wedge c) = 0.8$

Remarquer que le changement des probabilités n'est pas monotonne quand on ajoute de l'information !

Propriétés importantes

- Sommation : $\mathbb{P}(a) = \sum_{b \in Dom(B)} \mathbb{P}(a \wedge b)$
- Règle produit : $\mathbb{P}(a \wedge b) = \mathbb{P}(a \mid b)\mathbb{P}(b)$
- Sommation : $\mathbb{P}(a) = \sum_{b \in Dom(B)} \mathbb{P}(a \mid b)\mathbb{P}(b)$
- Dérivation : $\mathbb{P}(a \wedge b \wedge c \wedge d) = \mathbb{P}(a|bcd)\mathbb{P}(b \mid cd)\mathbb{P}(c \mid d)\mathbb{P}(d)$

	malDeDents		¬malDeDents	
	testSonde	¬testSonde	testSonde	¬testSonde
carie	0.108	0.012	0.072	0.008
¬ carie	0.016	0.064	0.144	0.576

$\mathbb{P}(carie) =$

$\mathbb{P}(carie \mid malDeDents) =$

Propriétés importantes

- Sommation : $\mathbb{P}(a) = \sum_{b \in Dom(B)} \mathbb{P}(a \wedge b)$
- Règle produit : $\mathbb{P}(a \wedge b) = \mathbb{P}(a \mid b)\mathbb{P}(b)$
- Sommation : $\mathbb{P}(a) = \sum_{b \in Dom(B)} \mathbb{P}(a \mid b)\mathbb{P}(b)$
- Dérivation : $\mathbb{P}(a \wedge b \wedge c \wedge d) = \mathbb{P}(a|bcd)\mathbb{P}(b \mid cd)\mathbb{P}(c \mid d)\mathbb{P}(d)$

	malDeDents		¬malDeDents	
	testSonde	¬testSonde	testSonde	¬testSonde
carie	0.108	0.012	0.072	0.008
¬ carie	0.016	0.064	0.144	0.576

$\mathbb{P}(carie) = 0.2$

$\mathbb{P}(carie \mid malDeDents) =$

Propriétés importantes

- Sommation : $\mathbb{P}(a) = \sum_{b \in Dom(B)} \mathbb{P}(a \wedge b)$
- Règle produit : $\mathbb{P}(a \wedge b) = \mathbb{P}(a \mid b)\mathbb{P}(b)$
- Sommation : $\mathbb{P}(a) = \sum_{b \in Dom(B)} \mathbb{P}(a \mid b)\mathbb{P}(b)$
- Dérivation : $\mathbb{P}(a \wedge b \wedge c \wedge d) = \mathbb{P}(a|bcd)\mathbb{P}(b \mid cd)\mathbb{P}(c \mid d)\mathbb{P}(d)$

	malDeDents		¬malDeDents	
	testSonde	¬testSonde	testSonde	¬testSonde
carie	0.108	0.012	0.072	0.008
¬ carie	0.016	0.064	0.144	0.576

$\mathbb{P}(carie) = 0.2$

$$\mathbb{P}(carie \mid malDeDents) = \frac{0.016 + 0.064}{0.108 + 0.012 + 0.016 + 0.064} = 0.6$$

Propriétés importantes

- Sommation : $\mathbb{P}(a) = \sum_{b \in Dom(B)} \mathbb{P}(a \wedge b)$
- Règle produit : $\mathbb{P}(a \wedge b) = \mathbb{P}(a \mid b)\mathbb{P}(b)$
- Sommation : $\mathbb{P}(a) = \sum_{b \in Dom(B)} \mathbb{P}(a \mid b)\mathbb{P}(b)$
- Dérivation : $\mathbb{P}(a \wedge b \wedge c \wedge d) = \mathbb{P}(a|bcd)\mathbb{P}(b \mid cd)\mathbb{P}(c \mid d)\mathbb{P}(d)$

	malDeDents		¬malDeDents	
	testSonde	¬testSonde	testSonde	¬testSonde
carie	0.108	0.012	0.072	0.008
¬ carie	0.016	0.064	0.144	0.576

$\mathbb{P}(carie) = 0.2$

$$\mathbb{P}(carie \mid malDeDents) = \frac{0.016 + 0.064}{0.108 + 0.012 + 0.016 + 0.064} = 0.6$$

$\mathbb{P}(Carie \mid malDeDents) \propto \mathbb{P}(Carie \mid malDeDents) \propto \langle 0.108, 0.016 \rangle + \langle 0.012, 0.064 \rangle \propto \langle 0.12, 0.08 \rangle = \langle 0.6, 0.4 \rangle$ ➩ on calcule sans avoir besoin de $\mathbb{P}(malDeDents)$

Première inférence

On peut tirer de l'exemple précédent une première technique :

On veut apprendre $\mathbb{P}(X \mid e)$ étant donné une information e ("evidence"), comment change la probabilité de X.

$\mathbb{P}(X \mid e) \propto P(X \wedge e) \propto \sum_{y \in Dom(Y)} \mathbb{P}(X \wedge e \wedge y)$

Si on possède la table entière des probabilités, on peut donc calculer le vecteur $\mathbb{P}(X \mid e)$ puis utiliser la normalisation pour trouver la réponse finale.

mais nécessite de connaître la table contenant $\mathcal{O}(2^n)$ valeurs, et le calcul va nécessiter $\mathcal{O}(2^n)$ opérations !

la table de probabilité est intéressante pour comprendre, mais ne sera pas un outil pratique pour calculer !

Règles de Bayes

$$\mathbb{P}(a \mid b) = \frac{\mathbb{P}(b \mid a)\mathbb{P}(a)}{\mathbb{P}(b)}$$

ou

$$\mathbb{P}(a \mid b) \propto \mathbb{P}(b \mid a)\mathbb{P}(a)$$

Cette règle est importantissime : souvent on a de l'information sur $\mathbb{P}(b \mid a)$ mais on a besoin de connaître $\mathbb{P}(a \mid b)$

➩ la règle de Bayes nous donne le lien !

Exemple

- symptome : fièvre
- maladies possibles : rhume, grippe, corona virus
- ⇨ on veut calculer $\mathbb{P}(D \mid \mathit{fièvre})$

Le mécanisme causal est plutôt $\mathbb{P}(\mathit{fièvre} \mid D)$
S'il y a une épidémie, $\mathbb{P}(D \mid \mathit{fièvre})$ risque de changer !

Avec la règle de Bayes

- $\mathbb{P}(D \mid \mathit{fièvre}) = \dfrac{\mathbb{P}(\mathit{fièvre} \mid D)\mathbb{P}(D)}{\mathbb{P}(\mathit{fièvre})}$
- notez que $\mathbb{P}(\mathit{fièvre}) = \left\{ \begin{array}{c} \mathbb{P}(\mathit{fièvre} \mid \mathit{rhume})\mathbb{P}(\mathit{rhume}) \\ + \\ \mathbb{P}(\mathit{fièvre} \mid \mathit{grippe})\mathbb{P}(\mathit{grippe}) \\ + \\ \mathbb{P}(\mathit{fièvre} \mid \mathit{corona})\mathbb{P}(\mathit{corona}) \end{array} \right.$

Règles de Bayes – revisitée

$$\mathbb{P}(cause \mid effet) = \frac{\mathbb{P}(effet \mid cause)\mathbb{P}(cause)}{\mathbb{P}(effet)}$$

$\mathbb{P}(cause \mid effet)$ est la situation de diagnostic

$\mathbb{P}(effet \mid cause)$ est la situation "causale" : étant donnée que cet élément est la cause, quelle est la probabilité qu'un effet se produit.
exemple

- $\mathbb{P}(raideurDuCou) = 0.01$
- $\mathbb{P}(méningite) = \frac{1}{50000}$
- $\mathbb{P}(raideurDuCou \mid méningite) = 0.7$
- $\mathbb{P}(méningite \mid raideurDuCou) = \frac{\mathbb{P}(raideurDuCou \mid méningite) \cdot \mathbb{P}(méningite)}{\mathbb{P}(raideurDuCou)}$

➩ $\mathbb{P}(méningite \mid raideurDuCou) = 0.0014$

Lors d'une épidémie de méningite, $\mathbb{P}(méningite)$ augemente, mais avec la loi de Bayes, on saura mettre à jour. Surtout $\mathbb{P}(raideurDuCou \mid méningite)$ reste constant !

Inférence

Comment change le degré de croyance lorsque l'on a appris une nouvelle information ?

i.e. On connait maintenant la valeur de certaines variables aléatoires, qu'est-ce que cela change sur notre degré de croyance.

➾ si je connais e, quelle est la probabilité $Pr(\alpha \mid e)$?

- pour tous les mondes w où e n'est pas vrai, $\mu(w) = 0$
- pour tous les mondes w où e est vrai, $\mu(w) = \frac{\mu(w)}{\mathbb{P}(e)}$

➾ seconde étape est une étape de normalisation pour assurer que la nouvelle mesure somme à 1.

Limitations

Avoir accès à beaucoup de valeurs !

- Si on considère les mondes possibles, leur nombre peut être très grand !
  si on a n variables booléennes on a donc $2^n - 1$ nombres à donner !
- ces nombres ne sont peut être pas "stables"
- certains nombres ne sont pas simples à estimer : ex quelle est la probabilité que la batterie de votre portable soit basse ?

Manipuler beaucoup de valeurs !

- pour répondre à une requête d'inférence, on doit sommer sur un nombre exponentiel de mondes possibles
- on n'a pas forcemment d'autres choix !

mais on peut utiliser des aspects structurels pour baisser le coût de calcul

⇒ on va utiliser l'**indépendance conditionnelle**

Indépendance

Definition (Indépendance)

x et y sont indépendants ssi $\mathbb{P}(x) = \mathbb{P}(x \mid y)$ ssi $\mathbb{P}(y) = \mathbb{P}(y \mid x)$ ssi $\mathbb{P}(x \wedge y) = \mathbb{P}(x)\mathbb{P}(y)$

Intuitivement : apprendre y n'influence en aucun cas votre degré de croyance sur x

Definition (Indépendance conditionnelle)

x et y sont conditionnellement indépendants étant donné z ssi $\mathbb{P}(x \mid z) = \mathbb{P}(x \mid y \wedge z)$ ssi $\mathbb{P}(y \mid z) = \mathbb{P}(y \mid x \wedge z)$ ssi $\mathbb{P}(x \wedge y \mid z) = \mathbb{P}(x \mid z)\mathbb{P}(y \mid z)$

Intuitivement, apprendre y n'influence pas votre croyance sur x si vous connaissez déjà z.

Indépendance

	malDeDents		¬malDeDents	
	testSonde	¬testSonde	testSonde	¬testSonde
carie	0.108	0.012	0.072	0.008
¬ carie	0.016	0.064	0.144	0.576

- Supposons qu'on ajoute une nouvelle variable *Météo* qui peut prendre quatre valeurs.
- il faudrait alors faire quatre copies de cette table, et éditer les valeurs en fonction du temps ! Donc passer à 32 valeurs !

mais clairement $\mathbb{P}(nuageux \mid |malDeDent \wedge testSonde \wedge carie) = \mathbb{P}(nuageux)$!

⇒

$$\mathbb{P}(nuageux \wedge malDeDent \wedge testSonde \wedge carie) = \mathbb{P}(nuageux) \cdot \mathbb{P}(malDeDent \wedge testSonde \wedge carie)$$

⇒ on peut donc réutiliser notre table, et ajouter une table de 4 valeurs !

Indépendance entre deux variables

Deux variables X et Y sont conditionnellement indépendantes étant donné une variable Z ssi x et y sont conditionnellement indépendantes étant donné z pour toute valeur $x \in Dom(X)$, $y \in Dom(Y)$ et $z \in Dom(Z)$.

➫ si vous connaissez la valeur de Z, rien de ce que vous apprenez sur Y n'aura une influence sur votre degré de croyance sur X.

et donc ?

- supposons que les variables booléennes $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sont mutuellement indépendantes

➩ on n'a plus besoin que de n nombres pour spécifier la distribution complète comparé à $2^n - 1$.

- comment ? on a simplement besoin de spécifier $\mathbb{P}(X_1), \mathbb{P}(X_2), \ldots, \mathbb{P}(X_n)$
- si on apprend que $X_k = v_k$, alors, il suffit de changer $\mathbb{P}(X_k) = 1$ et laisser les $\mathbb{P}(X_i)$ inchangés pour $i \neq k$.

➩ moins de nombres à connaître et moins de calculs à faire !!!

- évidemment, on n'a pas souvent d'indépendances mutuelles. Mais il y a souvent des indépendances conditionnelles qui nous permettent de faire des gains !

➩ les réseaux Bayesiens exploitent précisement cela.

Exemple

$$\mathrm{T} \longrightarrow \mathrm{C} \longrightarrow \mathrm{E} \longrightarrow \mathrm{R} \longrightarrow \mathrm{H}$$

Je me suis levé trop tôt (T), j'ai donc pris trop de café (C), donc j'étais excité (E), et j'ai fait une rupture d'anévrisme (R) et j'ai fini à l'hopital (H).

Si vous apprenez la valeur de T, C, E ou R, quel serait l'effet sur $\mathbb{P}(H)$?

- si l'une des variables est vrai, on voudrait augmenter $\mathbb{P}(H)$

⇨ H n'est pas indépendant de T, C, E ou R.

Mais si vous connaissez la valeur de R, apprendre ensuite la valeur de T, C ou E n'aurait alors aucune influence sur $\mathbb{P}(H)$!
⇨ donc H est indépendant de T, C et E étant donné la valeur de R.
De la même manière,

- R est indépendant de T, C étant donné E
- E est indépendant de T étant donné C

Exemple

$$T \rightarrow C \rightarrow E \rightarrow R \rightarrow H$$

donc

- $\mathbb{P}(H \mid R, X) = \mathbb{P}(H \mid R)$ pour $X \in \{T, C, E\}$
- $\mathbb{P}(R \mid E, X) = \mathbb{P}(R \mid E)$ pour $X \in \{T, C\}$
- $\mathbb{P}(E \mid C, T) = \mathbb{P}(E \mid C)$

⇒ $\mathbb{P}(H,R,E,C,T) = \mathbb{P}(H|R,E,C,T) \cdot \mathbb{P}(R|E,C,T) \cdot \mathbb{P}(E|C,T) \cdot \mathbb{P}(C|T) \cdot \mathbb{P}(T)$

grace à l'indépendance, on a alors

$\mathbb{P}(H,R,E,C,T) = \mathbb{P}(H|R) \cdot \mathbb{P}(R|E) \cdot \mathbb{P}(E|C) \cdot \mathbb{P}(C|T) \cdot \mathbb{P}(T)$

⇒ on peut préciser la probabilité jointe complète en utilisant seulement 5 distributions conditionnelles locales.

Exemple

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(c \mid t) &= 0.9\\ \mathbb{P}(\neg c \mid t) &= 0.1\\ \mathbb{P}(c \mid \neg t) &= 0.5\\ \mathbb{P}(\neg c \mid \neg t) &= 0.5\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(h \mid r) &= 0.9\\ \mathbb{P}(\neg h \mid r) &= 0.1\\ \mathbb{P}(h \mid \neg r) &= 0.1\\ \mathbb{P}(\neg h \mid \neg r) &= 0.9\end{aligned}$$

$$\mathrm{T} \rightarrow \mathrm{C} \rightarrow \mathrm{E} \rightarrow \mathrm{R} \rightarrow \mathrm{H}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(t) &= 0.7\\ \mathbb{P}(\neg t) &= 0.3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(e \mid c) &= 0.3\\ \mathbb{P}(\neg e \mid c) &= 0.7\\ \mathbb{P}(e \mid \neg c) &= 1.0\\ \mathbb{P}(\neg e \mid \neg c) &= 0.0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(r \mid e) &= 0.2\\ \mathbb{P}(\neg r \mid e) &= 0.8\\ \mathbb{P}(r \mid \neg e) &= 0.1\\ \mathbb{P}(\neg r \mid \neg e) &= 0.9\end{aligned}$$

Avec la représentation explicite, on avait besoin de 31 nombres
En utilisant l'indépendance, on n'a plus besoin que de 9 nombres.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(hr\neg ec\neg t) &= \mathbb{P}(h \mid r)\mathbb{P}(r \mid \neg e)\mathbb{P}(\neg e \mid c)\mathbb{P}(c \mid \neg t)\mathbb{P}(\neg t)\\ &= 0.9 \cdot 0.1 \cdot 0.3 \cdot 0.5 \cdot 0.3\\ &= 0.00405\end{aligned}$$