Décision dans l'incertain

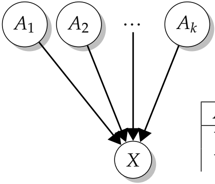
Cours 5: Réseaux Bayésiens – Indépendance & structure

Stéphane Airiau

Université Paris-Dauphine

Réseaux Bayésiens ou modèles graphiques

- Les noeuds du graphe sont les variables
- On a un graphe orienté acyclique
- Une table de probabilités conditionnelles (TPC)
  pour le noeud de la variable X dont les parents sont les noeuds $A_1, \ldots, A_k$, on a une table qui représente $\mathbb{P}(X \mid a_1, \ldots, a_k)$



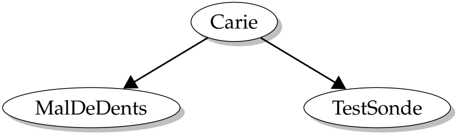
A_1	A_2	$\ldots$	A_k	$\mathbb{P}(X)$
$\top$	$\top$	$\ldots$	$\top$	0.95
$\top$	$\perp$	$\ldots$	$\top$	0.94
		$\ldots$		
$\perp$	$\perp$	$\ldots$	$\perp$	0.001

réseau bayésien = graphe + TPC

Un réseau bayésien encode la distribution jointe complète en tant que produit de distributions conditionnelles locales.

$$\mathbb{P}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(x_i \mid parents(X_i))$$

exemple :



$$\mathbb{P}(carie, testSonde, \neg malDents) = \mathbb{P}(carie) \cdot \mathbb{P}(testSonde \mid carie) \cdot \mathbb{P}(\neg malDents \mid carie)$$

Réseaux Bayésiens & taille des tables

- n variables booléénnes : 2^n
- Supposons qu'on est un réseau bayésien avec n variables, et chaque noeud possède au plus k parents.
  Il faut une table de $O(n \cdot 2^k \cdot 2)$.

On passe linéaire en n.

Si on arrive à maintenir k relativement petit

- moins de nombres à utiliser pour les calculs !
- les nombres sont aussi plus facile à trouver !

Réseaux Bayésiens & structure et hypothèses

Hypothèses requises : $\mathbb{P}(x_i \mid x_1, \ldots, x_{i-1}) = \mathbb{P}(x_i \mid Parents(X_i))$
souvent, il existe d'autres indépendances conditionnelles
➯ elles peuvent en fait être lues sur le graphe, sans utiliser les TPC

Important car on peut mieux comprendre les hypothèses que la topologie du graphe impose !

Structure et hypothèses : exemple

$$X \longrightarrow Y \longrightarrow Z \longrightarrow W$$

- Indépendances conditionnelles venant directement de la règle de dérivation :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X,Y,Z,W) &= \mathbb{P}(X)\mathbb{P}(Y \mid X)\mathbb{P}(Z \mid X,Y)\mathbb{P}(W \mid X,Y,Z) \\
&= \mathbb{P}(X)\mathbb{P}(Y \mid X)\mathbb{P}(Z \mid Y)\mathbb{P}(W \mid Z)
\end{aligned}$$

$Z \perp\!\!\!\perp X \mid Y,\ W \perp\!\!\!\perp \{X,Y\} \mid Z$

Structure et hypothèses : exemple

$$X \longrightarrow Y \longrightarrow Z \longrightarrow W$$

- Indépendances conditionnelles venant directement de la règle de dérivation :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X,Y,Z,W) &= \mathbb{P}(X)\mathbb{P}(Y \mid X)\mathbb{P}(Z \mid X,Y)\mathbb{P}(W \mid X,Y,Z)\\ &= \mathbb{P}(X)\mathbb{P}(Y \mid X)\mathbb{P}(Z \mid Y)\mathbb{P}(W \mid Z)\end{aligned}$$

  $Z \perp\!\!\!\perp X \mid Y$, $W \perp\!\!\!\perp \{X,Y\} \mid Z$

- autres hypothèse d'indépendances conditionnelles induites par ce réseau ?
  $Y \perp\!\!\!\perp Z,W \mid X$?

Structure et hypothèses : exemple

$$X \longrightarrow Y \longrightarrow Z \longrightarrow W$$

- Indépendances conditionnelles venant directement de la règle de dérivation :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X,Y,Z,W) &= \mathbb{P}(X)\mathbb{P}(Y \mid X)\mathbb{P}(Z \mid X,Y)\mathbb{P}(W \mid X,Y,Z)\\ &= \mathbb{P}(X)\mathbb{P}(Y \mid X)\mathbb{P}(Z \mid Y)\mathbb{P}(W \mid Z)\end{aligned}$$

  $Z \perp\!\!\!\perp X \mid Y$, $W \perp\!\!\!\perp \{X,Y\} \mid Z$

- autres hypothèse d'indépendances conditionnelles induites par ce réseau ?
  $Y \perp\!\!\!\perp Z,W \mid X$? ✘

Structure et hypothèses : exemple

$$X \rightarrow Y \rightarrow Z \rightarrow W$$

- Indépendances conditionnelles venant directement de la règle de dérivation :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X,Y,Z,W) &= \mathbb{P}(X)\mathbb{P}(Y \mid X)\mathbb{P}(Z \mid X,Y)\mathbb{P}(W \mid X,Y,Z)\\ &= \mathbb{P}(X)\mathbb{P}(Y \mid X)\mathbb{P}(Z \mid Y)\mathbb{P}(W \mid Z)\end{aligned}$$

$Z \perp\!\!\!\perp X \mid Y$, $W \perp\!\!\!\perp \{X,Y\} \mid Z$

- autres hypothèse d'indépendances conditionnelles induites par ce réseau ?
  $Y \perp\!\!\!\perp Z,W \mid X$? ✘
  $W \perp\!\!\!\perp X \mid Y$?

Structure et hypothèses : exemple

$$X \rightarrow Y \rightarrow Z \rightarrow W$$

- Indépendances conditionnelles venant directement de la règle de dérivation :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X,Y,Z,W) &= \mathbb{P}(X)\mathbb{P}(Y \mid X)\mathbb{P}(Z \mid X,Y)\mathbb{P}(W \mid X,Y,Z)\\ &= \mathbb{P}(X)\mathbb{P}(Y \mid X)\mathbb{P}(Z \mid Y)\mathbb{P}(W \mid Z)\end{aligned}$$

  $Z \perp\!\!\!\perp X \mid Y$, $W \perp\!\!\!\perp \{X,Y\} \mid Z$

- autres hypothèse d'indépendances conditionnelles induites par ce réseau ?
  $Y \perp\!\!\!\perp Z,W \mid X$? ✘
  $W \perp\!\!\!\perp X \mid Y$? ✔

Structure et hypothèses : exemple

$$X \longrightarrow Y \longrightarrow Z \longrightarrow W$$

$W \perp\!\!\!\perp X \mid Y$?

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(W \mid X, Y) &= \frac{\mathbb{P}(X,Y,W)}{\mathbb{P}(X,Y)} \\
&= \frac{\sum_{z \in Dom(Z)} \mathbb{P}(X,Y,Z,W)}{\mathbb{P}(X,Y)} \\
&= \frac{\sum\limits_{z \in Dom(Z)} \mathbb{P}(X)\mathbb{P}(Y \mid X)\mathbb{P}(Z \mid Y)\mathbb{P}(W \mid Z)}{\mathbb{P}(X)\mathbb{P}(Y \mid X)} \\
&= \sum_{z \in Dom(Z)} \mathbb{P}(Z \mid Y)\mathbb{P}(W \mid Z) \\
&= \sum_{z \in Dom(Z)} \mathbb{P}(Z \mid Y)\mathbb{P}(W \mid Z, Y) \\
&= \sum_{z \in Dom(Z)} \mathbb{P}(Z, W \mid Y) \\
&= \mathbb{P}(W \mid Y) \qquad \text{c'était pénible !}
\end{aligned}$$

Structure et hypothèse

Question importante :
Deux noeuds sont-ils indépendants étant donné une certaine observation ?

- si oui, on peut refaire de l'algèbre et le démontrer comme on vient de le faire
- si non, on peut trouver un contre exemple

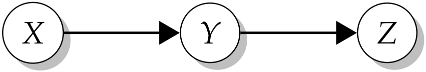
$$X \rightarrow Y \rightarrow Z$$

ex Est-ce que X et Z sont nécessairement indépendants ?

Structure et hypothèse

Question importante :
Deux noeuds sont-ils indépendants étant donné une certaine observation ?

- si oui, on peut refaire de l'algèbre et le démontrer comme on vient de le faire
- si non, on peut trouver un contre exemple



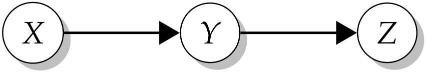
ex Est-ce que X et Z sont nécessairement indépendants ?

- NON : X=Y, Z=Y !

Structure et hypothèse

Question importante :
Deux noeuds sont-ils indépendants étant donné une certaine observation ?

- si oui, on peut refaire de l'algèbre et le démontrer comme on vient de le faire
- si non, on peut trouver un contre exemple



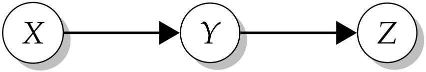
ex Est-ce que X et Z sont nécessairement indépendants ?

- NON : X=Y, Z=Y !
- basses pressions causent la pluie, qui cause une augmenation du traffic.
- X peut influencer Z, Z peut influencer X via Y

Structure et hypothèse

Question importante :
Deux noeuds sont-ils indépendants étant donné une certaine observation ?

- si oui, on peut refaire de l'algèbre et le démontrer comme on vient de le faire
- si non, on peut trouver un contre exemple



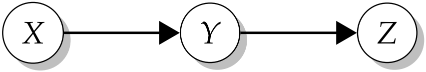
ex Est-ce que X et Z sont nécessairement indépendants ?

- NON : X=Y, Z=Y !
- basses pressions causent la pluie, qui cause une augmenation du traffic.
- X peut influencer Z, Z peut influencer X via Y
- mais on peut construire des cas où elles sont indépendantes !

Structure et hypothèse

Question importante :
Deux noeuds sont-ils indépendants étant donné une certaine observation ?

- si oui, on peut refaire de l'algèbre et le démontrer comme on vient de le faire
- si non, on peut trouver un contre exemple



ex Est-ce que X et Z sont nécessairement indépendants ?

- NON : X=Y, Z=Y !
- basses pressions causent la pluie, qui cause une augmenation du traffic.
- X peut influencer Z, Z peut influencer X via Y
- mais on peut construire des cas où elles sont indépendantes !
- on met toutes les probabilités à $\frac{1}{2}$!
  étrange car le graphe n'est plus très utile, mais mathématiquement possible !

Etude de la structure : d-separation

Peut-on garantir des indépendances conditionnelles en regardant le graphe ?

On étudie 3 cas particuliers

on analyse toute situation complexe en décomposant en fonction de ces trois cas.

chaînes causales

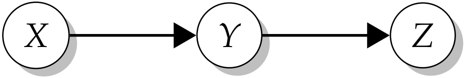
$$X \longrightarrow Y \longrightarrow Z$$

- X basses pressions
- Y pluie
- Z traffic

$$\mathbb{P}(x,y,z) = \mathbb{P}(x)\mathbb{P}(y \mid x)\mathbb{P}(z \mid y)$$

X et Z indépendants ?

chaînes causales



- X basses pressions
- Y pluie
- Z traffic

$$\mathbb{P}(x,y,z) = \mathbb{P}(x)\mathbb{P}(y \mid x)\mathbb{P}(z \mid y)$$

X et Z indépendants ? ✘
avec un contre exemple.

chaînes causales

$$X \rightarrow Y \rightarrow Z$$

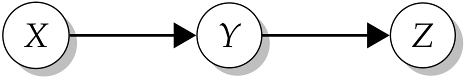
- X basses pressions
- Y pluie
- Z traffic

$$\mathbb{P}(x,y,z) = \mathbb{P}(x)\mathbb{P}(y \mid x)\mathbb{P}(z \mid y)$$

X et Z indépendants ? ✘
avec un contre exemple.

X indépendants de Z étant donné Y ?

chaînes causales



- X basses pressions
- Y pluie
- Z traffic

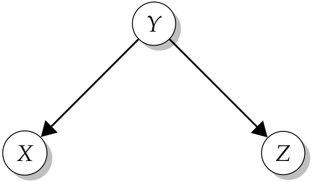
$$\mathbb{P}(x,y,z) = \mathbb{P}(x)\mathbb{P}(y \mid x)\mathbb{P}(z \mid y)$$

X et Z indépendants ? ✘
avec un contre exemple.

X indépendants de Z étant donné Y ?

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(z \mid x,y) &= \frac{\mathbb{P}(x,y,z)}{\mathbb{P}(x,y)} \\ &= \frac{\mathbb{P}(x)\mathbb{P}(y \mid x)\mathbb{P}(z \mid y)}{\mathbb{P}(x)\mathbb{P}(y \mid x)} \\ &= \mathbb{P}(z \mid y) \text{ ✔} \end{aligned}$$

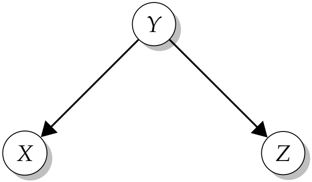
Cause commune



- X site de soumission occupé
- Y deadline pour le projet
- Z salles info pleines

$\mathbb{P}(x,y,z) = \mathbb{P}(y)\mathbb{P}(x \mid y)\mathbb{P}(z \mid y)$
X et Z indépendants ?

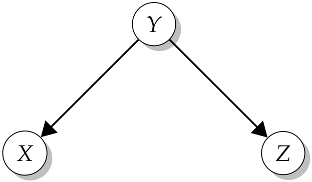
Cause commune



- X site de soumission occupé
- Y deadline pour le projet
- Z salles info pleines

$\mathbb{P}(x,y,z) = \mathbb{P}(y)\mathbb{P}(x \mid y)\mathbb{P}(z \mid y)$
X et Z indépendants ? ✘
avec un contre exemple.

Cause commune

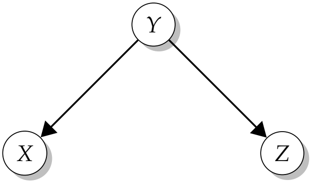


- X site de soumission occupé
- Y deadline pour le projet
- Z salles info pleines

$\mathbb{P}(x,y,z) = \mathbb{P}(y)\mathbb{P}(x \mid y)\mathbb{P}(z \mid y)$
X et Z indépendants ? ✘
avec un contre exemple.

X indépendants de Z étant donné Y ?

Cause commune



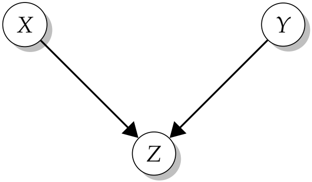
- X site de soumission occupé
- Y deadline pour le projet
- Z salles info pleines

$\mathbb{P}(x,y,z) = \mathbb{P}(y)\mathbb{P}(x \mid y)\mathbb{P}(z \mid y)$
X et Z indépendants ? ✘
avec un contre exemple.

X indépendants de Z étant donné Y ?

$$\mathbb{P}(z \mid x,y) = \frac{\mathbb{P}(x,y,z)}{\mathbb{P}(x,y)} = \frac{\mathbb{P}(y)\mathbb{P}(x \mid y)\mathbb{P}(z \mid y)}{\mathbb{P}(y)\mathbb{P}(x \mid y)} = \mathbb{P}(z \mid y) \checkmark$$

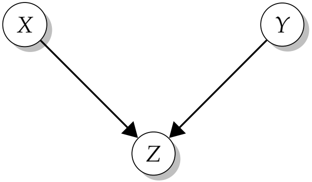
Effet commun



- X pluie
- Y match au Parc
- Z traffic

$\mathbb{P}(x,y,z) = \mathbb{P}(x)\mathbb{P}(y)\mathbb{P}(z \mid x,y)$
X et Y indépendants ?

Effet commun



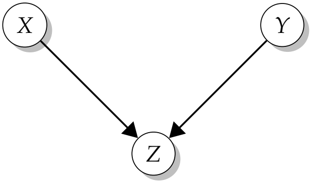
- X pluie
- Y match au Parc
- Z traffic

$\mathbb{P}(x,y,z) = \mathbb{P}(x)\mathbb{P}(y)\mathbb{P}(z \mid x,y)$

X et Y indépendants ? ✔

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(x,y) &= \sum_{z \in Dom(Z)} \mathbb{P}(x,y,z) = \sum_{z \in Dom(Z)} \mathbb{P}(x)\mathbb{P}(y)\mathbb{P}(z \mid x,y) \\
&= \mathbb{P}(x)\mathbb{P}(y) \sum_{z \in Dom(Z)} \mathbb{P}(z \mid x,y) \\
&= \mathbb{P}(x)\mathbb{P}(y) \text{ ✔}
\end{aligned}
$$

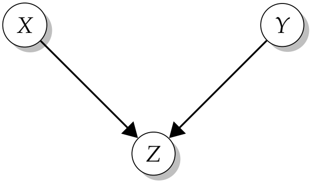
Effet commun



- X pluie
- Y match au Parc
- Z traffic

X indépendants de Y étant donné Z ?

Effet commun



- X pluie
- Y match au Parc
- Z traffic

X indépendants de Y étant donné Z ? ✘

- On observe du traffic
- quelle est la probabilité qu'il pleuve ? surement haute ?
- quelle est la probabilité qu'il y ait un match au parc ? surement haute ?
- Supposons qu'il y ait un match au parc. On a envie de baisser la probabilité de pluie puisqu'une raison probable du traffic peut être simplement la pluie !

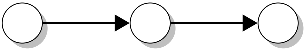
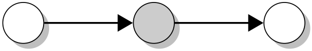
Cas général

- Question : étant donné un réseau bayésien, est-ce que deux variables sont indépendantes (étant donné des observations) ?

➩ analyser la structure du graphe

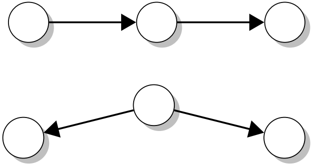
- l'utilisation des seuls trois patterns est suffisante
- idée générale : sur un chemin, l'influence peut-elle se propager ou bien est-elle bloquée ?
- est-ce que l'indépendance est garantie (quelles que soient les TPC)

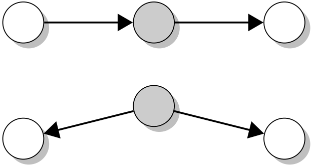
Cas général

triplet actif	triplet inactif
influence "se propage"	influence "est bloquée"
	

Cas général

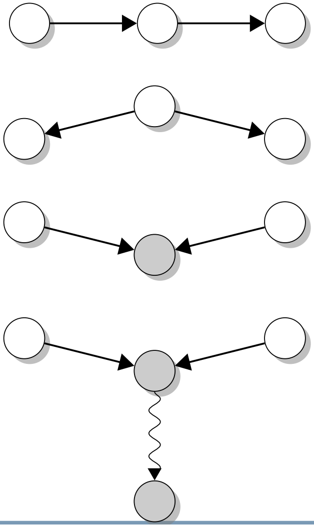
triplet actif	triplet inactif
influence "se propage"	influence "est bloquée"

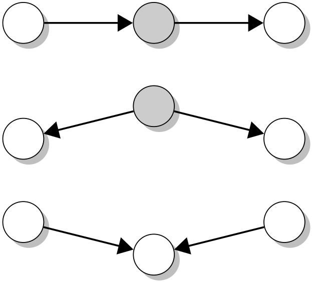




Cas général

triplet actif	triplet inactif
influence "se propage"	influence "est bloquée"





Cas général

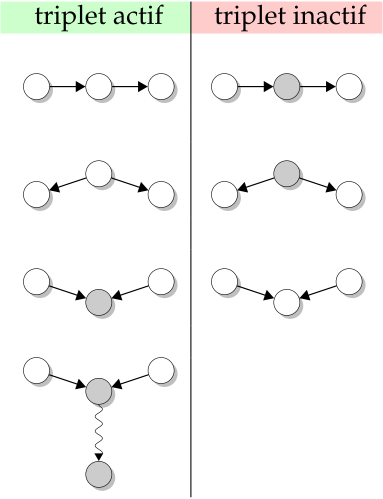
Est-ce que X et Y sont conditionnellement indépendants en sachant Z ?

- on considère tous le chemins (**non orientés**) entre X et Y
- Pas de chemin actif = indépendance !

Un chemin est **actif** si tous les tiplets (consécutifs) sont actifs.

Il suffit d'un segment inactif pour bloquer un chemin.

est-ce que l'influence peut se propager ?
⇨ si on a un triplet inactif, l'influence est bloquée.



Séparation-D

- Requête : $X_i \perp\!\!\!\perp X_j \mid \{X_{k_1}, \ldots, X_{k_n}\}$?

  Est-ce que X_i et X_j sont indépendants étant donnés $X_{k_1}, \ldots, X_{k_n}$?

➩ on vérifie tous les chemins (non-orientés) entre X_i et X_j.

  - Si un ou plusieurs sont actifs, alors l'indépendance **n'** est **pas** garantie

  - Sinon, si tous les chemins sont inactifs, alors l'indépendance est garantie.

Séparation-D

- Requête : $X_i \perp\!\!\!\perp X_j \mid \{X_{k_1}, \ldots, X_{k_n}\}$?

  Est-ce que X_i et X_j sont indépendants étant donnés $X_{k_1}, \ldots, X_{k_n}$?

➾ on vérifie tous les chemins (non-orientés) entre X_i et X_j.

  - Si un ou plusieurs sont actifs, alors l'indépendance **n'** est **pas** garantie

    Attention, il se pourrait que les TPC font que les deux variables soient indépendantes.
    ➾ on ne peut pas garantir l'indépendance avec simplement la structure du graphe.

  - Sinon, si tous les chemins sont inactifs, alors l'indépendance est garantie.

Séparation-D

- Requête : $X_i \perp\!\!\!\perp X_j \mid \{X_{k_1}, \dots, X_{k_n}\}$?

  Est-ce que X_i et X_j sont indépendants étant donnés $X_{k_1}, \dots, X_{k_n}$?

➩ on vérifie tous les chemins (non-orientés) entre X_i et X_j.

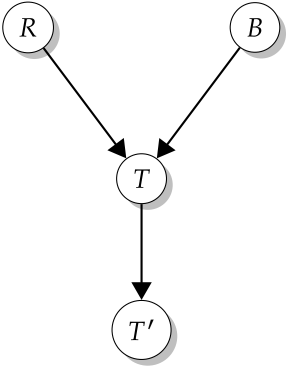
  - Si un ou plusieurs sont actifs, alors l'indépendance **n'** est **pas** garantie

    Attention, il se pourrait que les TPC font que les deux variables soient indépendantes.
    ➩ on ne peut pas garantir l'indépendance avec simplement la structure du graphe.

  - Sinon, si tous les chemins sont inactifs, alors l'indépendance est garantie.

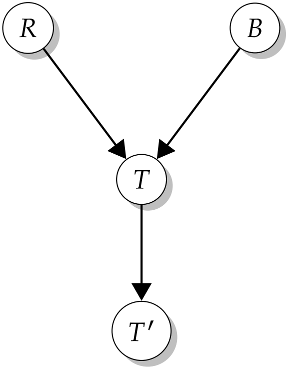
    Quelles que soient les TPC, on aura nécessairement indépendance

Exemple 1



$R \perp\!\!\!\perp B$

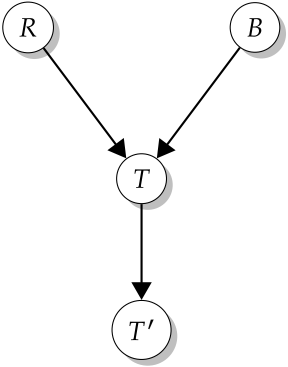
Exemple 1



$R \perp\!\!\!\perp B$ ✔

$R \perp\!\!\!\perp B \mid T$

Exemple 1

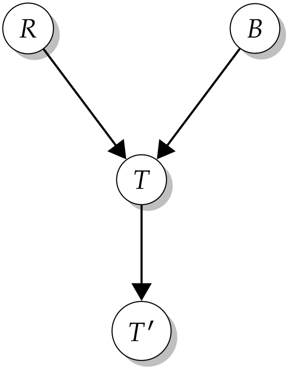


$R \perp\!\!\!\perp B$ ✔

$R \perp\!\!\!\perp B \mid T$ ✘

$R \perp\!\!\!\perp B \mid T'$

Exemple 1



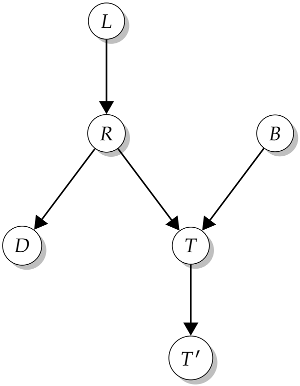
$R \perp\!\!\!\perp B$ ✔

$R \perp\!\!\!\perp B \mid T$ ✘

$R \perp\!\!\!\perp B \mid T'$ ✘

Exemple 2

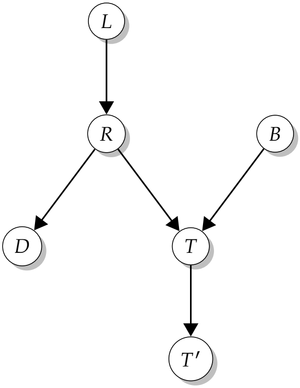
$L \not\perp T' \mid T$



Exemple 2

$L \not\perp\!\!\!\perp T' \mid T$

$L \not\perp\!\!\!\perp B$

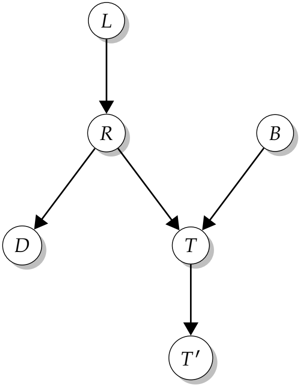


Exemple 2

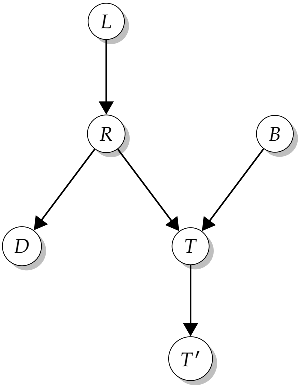
$L \cdot\!|\!\cdot T' \mid T$

$L \cdot\!|\!\cdot B$

$L \cdot\!|\!\cdot B \mid T$



Exemple 2



$L \not\perp T' \mid T$

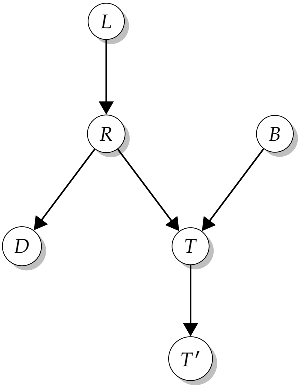
$L \not\perp B$

$L \not\perp B \mid T$

$L \not\perp B \mid T'$

Exemple 2

$L \perp\!\!\!\perp T' \mid T$



$L \perp\!\!\!\perp B$

$L \perp\!\!\!\perp B \mid T$

$L \perp\!\!\!\perp B \mid T'$

$L \perp\!\!\!\perp B \mid T, R$

Exemple 2

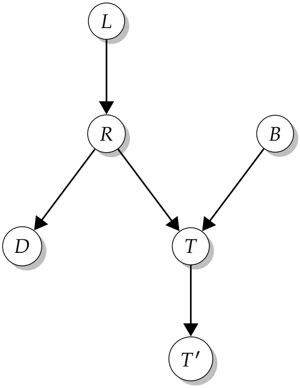
$L \perp\!\!\!\perp T' \mid T$ ✔

$L \perp\!\!\!\perp B$ ✔

$L \perp\!\!\!\perp B \mid T$ ✘

$L \perp\!\!\!\perp B \mid T'$ ✘

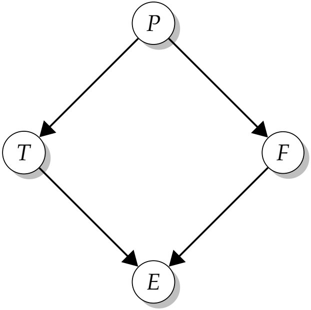
$L \perp\!\!\!\perp B \mid T, R$ ✔



Exemple 3

Variables :

- P : Pluie
- T : Traffic
- F : FuiteToit
- E : Enervé



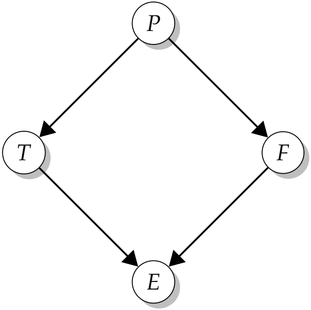
Questions

$T \cdot\!|\!\cdot F$

Exemple 3

Variables :

- P : Pluie
- T : Traffic
- F : FuiteToit
- E : Enervé



Questions

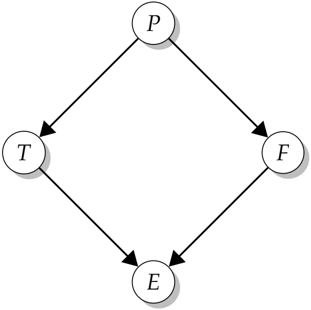
$T \perp\!\!\!\perp F$

$T \perp\!\!\!\perp F \mid P$

Exemple 3

Variables :

- P : Pluie
- T : Traffic
- F : FuiteToit
- E : Enervé



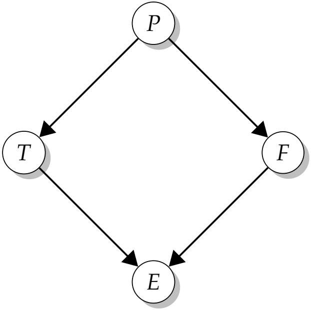
Questions

$T \perp\!\!\!\perp F$

$T \perp\!\!\!\perp F \mid P$

$T \perp\!\!\!\perp F \mid P, E$

Exemple 3



Variables :

- P : Pluie
- T : Traffic
- F : FuiteToit
- E : Enervé

Questions

$T \perp\!\!\!\perp F$ ✘

$T \perp\!\!\!\perp F \mid P$ ✔

$T \perp\!\!\!\perp F \mid P, E$ ✘

Structure et indépendance

Etant donné un réseau bayésien, on peut maintenant vérifier la liste de toutes les dépendances imposées par la structure du réseau.

➩ on peut déterminer l'ensemble des distibutions qui peuvent être représentées !

- une structure de graphe peut encoder certaines distributions
- cette structure impose des indépendances conditionnelles
- il peut exister d'autres indépendances conditionnelles que la structure impose
- ajouter un arc enlève de l'indépendance (donc augmente le nombre de distributions représentables), mais augmente les coûts