

# Décision dans l'incertain

## Cours 11: Théorie de la Décision dans l'incertain

Stéphane Airiau

Université Paris-Dauphine

### CONTEXTE

- impossibilité de prévoir avec certitude les conséquences de la mise à exécution d'une décision
- pas de probabilité
- la **Nature** décide de tout ce qui n'est pas sous mon contrôle
- les conséquences de mes décisions dépendent à la fois de mes décisions et des décisions de la Nature (“états de la nature” ou “scénarios”)
- la Nature est indolente (*beurrer sa tartine du côté Pile n'implique pas qu'elle tombera du côté Pile en cas de chute*)

### CONTEXTE

- impossibilité de prévoir avec certitude les conséquences de la mise à exécution d'une décision
- pas de probabilité
- la **Nature** décide de tout ce qui n'est pas sous mon contrôle
- les conséquences de mes décisions dépendent à la fois de mes décisions et des décisions de la Nature (“**états de la nature**” ou “**scénarios**”)
- la Nature est indolente (*beurrer sa tartine du côté Pile n'implique pas qu'elle tombera du côté Pile en cas de chute*)

**Problème :** on doit choisir une action **avant** d'avoir connaissance de la décision de la Nature

## Exemple - *Confection d'une omelette*

---

Déjà 5 oeufs cassés dans un saladier, 6e oeuf intact

## Exemple - Confection d'une omelette

---

Déjà 5 oeufs cassés dans un saladier, 6e oeuf intact

Trois options :

- casser le 6e oeuf dans le saladier
- casser le 6e oeuf dans un bol pour l'examiner
- ne pas se servir de ce 6e oeuf

## Exemple - Confection d'une omelette

---

Déjà 5 oeufs cassés dans un saladier, 6e oeuf intact

Trois options :

- casser le 6e oeuf dans le saladier
- casser le 6e oeuf dans un bol pour l'examiner
- ne pas se servir de ce 6e oeuf

Conséquences :

- grande omelette
- 5 oeufs perdus
- grande omelette et bol sali inutilement
- petite omelette

- $\underline{A}$  : ensemble des actions potentielles (alternatives, solutions)
- $\underline{E}$  : ensemble des états de la Nature
  - un élément  $e \in E$  représente une décision que peut prendre la Nature susceptible d'influencer les conséquences d'au moins une des actions de  $A$
- $\underline{X}$  : ensemble des conséquences
- $\underline{c}$  : fonction qui associe à chaque couple  $A \times E$  un élément de  $X$

## Matrice de décision

$c$	$e_1$	$e_2$	$\dots$	$e_i$	$\dots$	$e_n$
$a_1$	$c(a_1, e_1)$	$c(a_1, e_2)$	$\dots$	$c(a_1, e_i)$	$\dots$	$c(a_1, e_n)$
$a_2$	$c(a_2, e_1)$	$c(a_2, e_2)$	$\dots$	$c(a_2, e_i)$	$\dots$	$c(a_2, e_n)$
.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.
$a_j$	$c(a_j, e_1)$	$c(a_j, e_2)$	$\dots$	$c(a_j, e_i)$	$\dots$	$c(a_j, e_n)$
.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.
$a_m$	$c(a_m, e_1)$	$c(a_m, e_2)$	$\dots$	$c(a_m, e_i)$	$\dots$	$c(a_m, e_n)$



## Exemple - Omelette

---

- $A = \{\text{saladier, bol, poubelle}\}$
- $E = \{\text{oeuf bon, oeuf mauvais}\}$

$c$	oeuf bon	oeuf mauvais
saladier	grande omelette	5 oeufs perdus
bol	grande omelette, bol sali	petite omelette, bol sali
poubelle	petite omelette	petite omelette

## Exemple 2

---

### Enoncé

Une société envisage de lancer un nouveau produit. Compte tenu des réactions des consommateurs, trois situations sont à envisager :

- accueil très favorable : gain de 900 000€
- accueil favorable : gain de 750 000€
- accueil défavorable (échec) : gain de 0€

Le coût de lancement est estimé à 500 000€.

## Exemple 2

---

### Enoncé

Une société envisage de lancer un nouveau produit. Compte tenu des réactions des consommateurs, trois situations sont à envisager :

- accueil très favorable : gain de 900 000€
- accueil favorable : gain de 750 000€
- accueil défavorable (échec) : gain de 0€

Le coût de lancement est estimé à 500 000€.

**Problème :** Faut-il lancer ou non le produit ?

## Exemple 2 - modélisation

---

- Actions potentielles :  $A = \{a_1, a_2\}$ 
  - $a_1$  : lancer le produit
  - $a_2$  : ne pas lancer le produit
- Etats de la nature :  $E = \{e_1, e_2, e_3\}$ 
  - $e_1$  : accueil très favorable
  - $e_2$  : accueil favorable
  - $e_3$  : accueil défavorable

## Exemple 2 - modélisation

---

- Actions potentielles :  $A = \{a_1, a_2\}$ 
  - $a_1$  : lancer le produit
  - $a_2$  : ne pas lancer le produit
- Etats de la nature :  $E = \{e_1, e_2, e_3\}$ 
  - $e_1$  : accueil très favorable
  - $e_2$  : accueil favorable
  - $e_3$  : accueil défavorable

### Tableau des gains :

$g(a_i, e_j)$	$e_1$	$e_2$	$e_3$
$a_1$	400	250	-500
$a_2$	0	0	0

## Dominance

---

On dit que l'action  $a$  **domine** l'action  $b$  (et on note  $aDb$ ) ssi pour chaque état de la Nature le gain rapporté par  $a$  est supérieur ou égal au gain rapporté par l'action  $b$  (et strictement supérieur pour au moins un état de nature) :

- $\forall e_i \in E, g(a, e_i) \geq g(b, e_i)$
- $\exists e_i \in E, g(a, e_i) > g(b, e_i)$

On dit que l'action  $a$  **domine** l'action  $b$  (et on note  $aDb$ ) ssi pour chaque état de la Nature le gain rapporté par  $a$  est supérieur ou égal au gain rapporté par l'action  $b$  (et strictement supérieur pour au moins un état de nature) :

- $\forall e_i \in E, g(a, e_i) \geq g(b, e_i)$
- $\exists e_i \in E, g(a, e_i) > g(b, e_i)$

**Remarque :** la relation de dominance est transitive et asymétrique

## Dominance

---

On dit qu'une action  $a$  est **efficace** ssi  $a$  n'est dominé par aucune autre action



## Dominance

---

On dit qu'une action  $a$  est **efficace** ssi  $a$  n'est dominé par aucune autre action

**Remarque :** lorsque  $A$  et  $E$  sont finis, l'ensemble des actions efficaces  $A^* \subseteq A$  défini par :

$$A^* = \{a \in A, \text{non}(bDa) \quad \forall b\}$$

est toujours non vide

## Différents critères de résolution

---

Afin de résoudre le problème, il faut choisir un critère de résolution

- Critère de Wald (MaxMin)
- Critère MaxMax
- Critère de Hurwicz
- Critère de Laplace
- Critère de Savage
- ...

Ensuite déterminer la meilleure action selon le critère de résolution choisi

## Différents critères de résolution

---

Afin de résoudre le problème, il faut choisir un critère de résolution

- Critère de Wald (MaxMin)
- Critère MaxMax
- Critère de Hurwicz
- Critère de Laplace
- Critère de Savage
- ...

Ensuite déterminer la meilleure action selon le critère de résolution choisi

**Remarque :** il n'y a pas de notion de « meilleure action absolue », la meilleure action va dépendre du critère choisi

## Critère de Wald

---

**Idée de prudence** : choix fondé sur la situation la pire (Max Min)

Choisir toute action  $a \in A$  solution de :

$$\max_{a \in A} \min_{e \in E} g(a, e)$$

**Idée de prudence** : choix fondé sur la situation la pire (Max Min)

Choisir toute action  $a \in A$  solution de :

$$\max_{a \in A} \min_{e \in E} g(a, e)$$

**Remarque** : pas de compensation entre les états de la Nature, suggère seulement des valeurs ordonnées

## Critère de Wald

---

**Idée de prudence** : choix fondé sur la situation la pire (Max Min)

Choisir toute action  $a \in A$  solution de :

$$\max_{a \in A} \min_{e \in E} g(a, e)$$

**Remarque** : pas de compensation entre les états de la Nature, suggère seulement des valeurs ordonnées

*Exemple* :

	$e_1$	$e_2$	$e_3$	<b>Min</b>
$a_1$	40	70	-20	<b>-20</b>
$a_2$	-10	40	100	<b>-10</b>
$a_3$	20	40	-5	<b>-5</b>

## Critère de Wald

---

**Idée de prudence** : choix fondé sur la situation la pire (Max Min)

Choisir toute action  $a \in A$  solution de :

$$\max_{a \in A} \min_{e \in E} g(a, e)$$

**Remarque** : pas de compensation entre les états de la Nature, suggère seulement des valeurs ordonnées

*Exemple* :

	$e_1$	$e_2$	$e_3$	<b>Min</b>
$a_1$	40	70	-20	<b>-20</b>
$a_2$	-10	40	100	<b>-10</b>
$a_3$	20	40	-5	<b>-5</b>

$\implies$  Choisir  $a_3$  (perte maximale de -5)

## Critère MaxMax

---

**Idée d'optimisme** : choix fondé sur la meilleure situation (Max Max)

Choisir toute action  $a \in A$  solution de :

$$\max_{a \in A} \max_{e \in E} g(a, e)$$



## Critère MaxMax

---

**Idée d'optimisme** : choix fondé sur la meilleure situation (Max Max)

Choisir toute action  $a \in A$  solution de :

$$\max_{a \in A} \max_{e \in E} g(a, e)$$

**Remarque** : pas de compensation entre les états de la Nature, suggère seulement des valeurs ordonnées

## Critère MaxMax

---

**Idée d'optimisme** : choix fondé sur la meilleure situation (Max Max)

Choisir toute action  $a \in A$  solution de :

$$\max_{a \in A} \max_{e \in E} g(a, e)$$

**Remarque** : pas de compensation entre les états de la Nature, suggère seulement des valeurs ordonnées

*Exemple* :

	$e_1$	$e_2$	$e_3$	<b>Max</b>
$a_1$	40	70	-20	70
$a_2$	-10	40	100	100
$a_3$	20	40	-5	40

## Critère MaxMax

---

**Idée d'optimisme** : choix fondé sur la meilleure situation (Max Max)

Choisir toute action  $a \in A$  solution de :

$$\max_{a \in A} \max_{e \in E} g(a, e)$$

**Remarque** : pas de compensation entre les états de la Nature, suggère seulement des valeurs ordonnées

*Exemple* :

	$e_1$	$e_2$	$e_3$	<b>Max</b>
$a_1$	40	70	-20	70
$a_2$	-10	40	100	100
$a_3$	20	40	-5	40

$\implies$  Choisir  $a_2$  (gain maximal de 100)

## Critère de Hurwicz

---

Critère intermédiaire entre les deux précédents : prise en compte de l'attitude vis à vis du risque à travers un coefficient d'optimisme  $\alpha$  ( $0 \leq \alpha \leq 1$ )

Choisir toute action  $a$  solution de

$$\max_{a \in A} [\alpha \max_{e \in E} g(a, e) + (1 - \alpha) \min_{e \in E} g(a, e)]$$

Critère intermédiaire entre les deux précédents : prise en compte de l'attitude vis à vis du risque à travers un coefficient d'optimisme  $\alpha$  ( $0 \leq \alpha \leq 1$ )

Choisir toute action  $a$  solution de

$$\max_{a \in A} [\alpha \max_{e \in E} g(a, e) + (1 - \alpha) \min_{e \in E} g(a, e)]$$

### Remarques :

- $X$  doit avoir une structure légitimant l'opération de combinaison linéaire
- détermination pratique du coefficient d'optimisme ?

Critère intermédiaire entre les deux précédents : prise en compte de l'attitude vis à vis du risque à travers un coefficient d'optimisme  $\alpha$  ( $0 \leq \alpha \leq 1$ )

Choisir toute action  $a$  solution de

$$\max_{a \in A} [\alpha \max_{e \in E} g(a, e) + (1 - \alpha) \min_{e \in E} g(a, e)]$$

### Remarques :

- $X$  doit avoir une structure légitimant l'opération de combinaison linéaire
- détermination pratique du coefficient d'optimisme ?

Exemple :

	$e_1$	$e_2$	$e_3$	$\alpha = 0.5$
$a_1$	40	70	-20	25
$a_2$	-10	40	100	45
$a_3$	20	40	-5	17,5

Critère intermédiaire entre les deux précédents : prise en compte de l'attitude vis à vis du risque à travers un coefficient d'optimisme  $\alpha$  ( $0 \leq \alpha \leq 1$ )

Choisir toute action  $a$  solution de

$$\max_{a \in A} [\alpha \max_{e \in E} g(a, e) + (1 - \alpha) \min_{e \in E} g(a, e)]$$

### Remarques :

- $X$  doit avoir une structure légitimant l'opération de combinaison linéaire
- détermination pratique du coefficient d'optimisme ?

Exemple :

	$e_1$	$e_2$	$e_3$	$\alpha = 0.5$
$a_1$	40	70	-20	25
$a_2$	-10	40	100	45
$a_3$	20	40	-5	17,5

## Critère de Laplace

---

Sans information sur les probabilités d'occurrence des états de la Nature on leur associe une probabilité  $1/n$  ( $n$  : nb d'états)

Choisir toute action  $a$  solution de

$$\max_{a \in A} \sum_{j=1}^n \frac{1}{n} g(a, e_j)$$



## Critère de Laplace

---

Sans information sur les probabilités d'occurrence des états de la Nature on leur associe une probabilité  $1/n$  ( $n$  : nb d'états)

Choisir toute action  $a$  solution de

$$\max_{a \in A} \sum_{j=1}^n \frac{1}{n} g(a, e_j)$$

### Remarques :

- Opération de combinaison linéaire légitime?
- Etats également vraisemblables? (*Soit vous devenez président de la république Ivoirienne, soit non*)

## Critère de Laplace

---

Sans information sur les probabilités d'occurrence des états de la Nature on leur associe une probabilité  $1/n$  ( $n$  : nb d'états)

Choisir toute action  $a$  solution de

$$\max_{a \in A} \sum_{j=1}^n \frac{1}{n} g(a, e_j)$$

### Remarques :

- Opération de combinaison linéaire légitime?
- Etats également vraisemblables? (*Soit vous devenez président de la république Ivoirienne, soit non*)

Exemple :

	$e_1$	$e_2$	$e_3$	
$a_1$	40	70	-20	90/3
$a_2$	-10	40	100	130/3
$a_3$	20	40	-5	55/3

## Critère de Laplace

---

Sans information sur les probabilités d'occurrence des états de la Nature on leur associe une probabilité  $1/n$  ( $n$  : nb d'états)

Choisir toute action  $a$  solution de

$$\max_{a \in A} \sum_{j=1}^n \frac{1}{n} g(a, e_j)$$

### Remarques :

- Opération de combinaison linéaire légitime?
- Etats également vraisemblables? (*Soit vous devenez président de la république Ivoirienne, soit non*)

Exemple :

	$e_1$	$e_2$	$e_3$	
$a_1$	40	70	-20	90/3
$a_2$	-10	40	100	130/3
$a_3$	20	40	-5	55/3

## Critère de Savage (Min Max Regret)

---

Le regret mesure la différence entre :

- ce que l'on aurait pu obtenir si l'on avait su quel état se réaliserait et
- ce que l'on obtient effectivement

Le regret  $r_{ij}$  représente le regret que nous allons avoir en choisissant l'action  $a_i$  lorsque l'état de nature s'avère être  $e_j$  :

$$r_{ij} = \max_k g(a_k, e_j) - g(a_i, e_j)$$

## Critère de Savage (Min Max Regret)

---

Le regret mesure la différence entre :

- ce que l'on aurait pu obtenir si l'on avait su quel état se réaliserait et
- ce que l'on obtient effectivement

Le regret  $r_{ij}$  représente le regret que nous allons avoir en choisissant l'action  $a_i$  lorsque l'état de nature s'avère être  $e_j$  :

$$r_{ij} = \max_k g(a_k, e_j) - g(a_i, e_j)$$

Exemple :

	$e_1$	$e_2$	$e_3$
$a_1$	40	70	-20
$a_2$	-10	40	100
$a_3$	20	40	-5

$r_{ij}$	$e_1$	$e_2$	$e_3$
$a_1$	0	0	120
$a_2$	50	30	0
$a_3$	20	30	105

## Critère de Savage (Min Max Regret)

---

Choix de l'action dont le regret max est le plus faible :

$$\min_i \max_j r_{ij}$$

## Critère de Savage (Min Max Regret)

---

Choix de l'action dont le regret max est le plus faible :

$$\min_i \max_j r_{ij}$$

### Remarques :

- Opération de combinaison linéaire légitime?
- Choix dépendant de l'ensemble des actions  $A$ , l'adjonction de nouvelles actions peut modifier le choix de façon imprévisible

## Critère de Savage (Min Max Regret)

---

Choix de l'action dont le regret max est le plus faible :

$$\min_i \max_j r_{ij}$$

### Remarques :

- Opération de combinaison linéaire légitime?
- Choix dépendant de l'ensemble des actions  $A$ , l'adjonction de nouvelles actions peut modifier le choix de façon imprévisible

Exemple :

	$e_1$	$e_2$	$e_3$		$r_{ij}$	$e_1$	$e_2$	$e_3$	Max
$a_1$	40	70	-20		$a_1$	0	0	120	120
$a_2$	-10	40	100		$a_2$	50	30	0	50
$a_3$	20	40	-5		$a_3$	20	30	105	105



## Critère de Savage (Min Max Regret)

---

Choix de l'action dont le regret max est le plus faible :

$$\min_i \max_j r_{ij}$$

### Remarques :

- Opération de combinaison linéaire légitime?
- Choix dépendant de l'ensemble des actions  $A$ , l'adjonction de nouvelles actions peut modifier le choix de façon imprévisible

Exemple :

	$e_1$	$e_2$	$e_3$		$r_{ij}$	$e_1$	$e_2$	$e_3$	Max
$a_1$	40	70	-20		$a_1$	0	0	120	120
$a_2$	-10	40	100		$a_2$	50	30	0	50
$a_3$	20	40	-5		$a_3$	20	30	105	105

⇒ Choisir  $a_2$  (regret max de 50)

➤ **Axiome 1 : Ordre**

- **Axiome 1 : Ordre**
  - un critère doit permettre de classer complètement les actions avec éventuellement des ex-aequo

- **Axiome 1 : Ordre**
  - un critère doit permettre de classer complètement les actions avec éventuellement des ex-aequo
- **Axiome 2 : Symétrie**

- **Axiome 1 : Ordre**
  - un critère doit permettre de classer complètement les actions avec éventuellement des ex-aequo
- **Axiome 2 : Symétrie**
  - le classement des actions est indépendant de leur numérotation ainsi que de celle des états de la nature

- **Axiome 1 : Ordre**
  - un critère doit permettre de classer complètement les actions avec éventuellement des ex-aequo
- **Axiome 2 : Symétrie**
  - le classement des actions est indépendant de leur numérotation ainsi que de celle des états de la nature
- **Axiome 3 : Dominance stricte**

➤ **Axiome 1 : Ordre**

- un critère doit permettre de classer complètement les actions avec éventuellement des ex-aequo

➤ **Axiome 2 : Symétrie**

- le classement des actions est indépendant de leur numérotation ainsi que de celle des états de la nature

➤ **Axiome 3 : Dominance stricte**

- si une action  $a_i$  domine strictement une action  $a_h$ , alors  $a_i$  est classée avant  $a_h$

- **Axiome 1 : Ordre**
  - un critère doit permettre de classer complètement les actions avec éventuellement des ex-aequo
- **Axiome 2 : Symétrie**
  - le classement des actions est indépendant de leur numérotation ainsi que de celle des états de la nature
- **Axiome 3 : Dominance stricte**
  - si une action  $a_i$  domine strictement une action  $a_h$ , alors  $a_i$  est classée avant  $a_h$
- **Axiome 4 : Adjonction d'une ligne**



- **Axiome 1 : Ordre**
  - un critère doit permettre de classer complètement les actions avec éventuellement des ex-aequo
- **Axiome 2 : Symétrie**
  - le classement des actions est indépendant de leur numérotation ainsi que de celle des états de la nature
- **Axiome 3 : Dominance stricte**
  - si une action  $a_i$  domine strictement une action  $a_h$ , alors  $a_i$  est classée avant  $a_h$
- **Axiome 4 : Adjonction d'une ligne**
  - l'adjonction d'une nouvelle action ne modifie pas le classement relatif des autres actions

- **Axiome 1 : Ordre**
  - un critère doit permettre de classer complètement les actions avec éventuellement des ex-aequo
- **Axiome 2 : Symétrie**
  - le classement des actions est indépendant de leur numérotation ainsi que de celle des états de la nature
- **Axiome 3 : Dominance stricte**
  - si une action  $a_i$  domine strictement une action  $a_h$ , alors  $a_i$  est classée avant  $a_h$
- **Axiome 4 : Adjonction d'une ligne**
  - l'adjonction d'une nouvelle action ne modifie pas le classement relatif des autres actions
- **Axiome 5 : Convexité**

- **Axiome 1 : Ordre**
  - un critère doit permettre de classer complètement les actions avec éventuellement des ex-aequo
- **Axiome 2 : Symétrie**
  - le classement des actions est indépendant de leur numérotation ainsi que de celle des états de la nature
- **Axiome 3 : Dominance stricte**
  - si une action  $a_i$  domine strictement une action  $a_h$ , alors  $a_i$  est classée avant  $a_h$
- **Axiome 4 : Adjonction d'une ligne**
  - l'adjonction d'une nouvelle action ne modifie pas le classement relatif des autres actions
- **Axiome 5 : Convexité**
  - si le décideur est indifférent entre deux actions  $a_i$  et  $a_h$ , alors l'action  $a_k$  telle que  $\forall j, g_j(a_k) = \frac{1}{2}(g_j(a_i) + g_j(a_h))$  ne peut être classée après  $a_i$  et  $a_h$

- **Axiome 6** : Adjonction ou retranchement d'une colonne

- **Axiome 6 :** Adjonction ou retranchement d'une colonne
  - l'ajout ou le retranchement d'une colonne identique à une autre colonne ne doit pas modifier la réponse du critère

- **Axiome 6** : Adjonction ou retranchement d'une colonne
  - l'ajout ou le retranchement d'une colonne identique à une autre colonne ne doit pas modifier la réponse du critère
- **Axiome 7** : Linéarité

- **Axiome 6 :** Adjonction ou retranchement d'une colonne
  - l'ajout ou le retranchement d'une colonne identique à une autre colonne ne doit pas modifier la réponse du critère
- **Axiome 7 :** Linéarité
  - le critère n'est pas modifié si on applique la même transformation linéaire à toutes les mesures de conséquence

- **Axiome 6 :** Adjonction ou retranchement d'une colonne
  - l'ajout ou le retranchement d'une colonne identique à une autre colonne ne doit pas modifier la réponse du critère
- **Axiome 7 :** Linéarité
  - le critère n'est pas modifié si on applique la même transformation linéaire à toutes les mesures de conséquence
- **Axiome 8 :** Continuité



- **Axiome 6 : Adjonction ou retranchement d'une colonne**
  - l'ajout ou le retranchement d'une colonne identique à une autre colonne ne doit pas modifier la réponse du critère
- **Axiome 7 : Linéarité**
  - le critère n'est pas modifié si on applique la même transformation linéaire à toutes les mesures de conséquence
- **Axiome 8 : Continuité**
  - soient  $P^x, \dots, P^k, \dots, P^1$  une suite de matrices  $[g_{ij}]$  qui converge vers  $P$ . Si  $a_i$  est classée avant  $a_j$  pour tout  $k$ , alors  $a_i$  est au moins aussi bien classée que  $a_j$  dans  $P$

- **Axiome 6** : Adjonction ou retranchement d'une colonne
  - l'ajout ou le retranchement d'une colonne identique à une autre colonne ne doit pas modifier la réponse du critère
- **Axiome 7** : Linéarité
  - le critère n'est pas modifié si on applique la même transformation linéaire à toutes les mesures de conséquence
- **Axiome 8** : Continuité
  - soient  $P^x, \dots, P^k, \dots, P^1$  une suite de matrices  $[g_{ij}]$  qui converge vers  $P$ . Si  $a_i$  est classée avant  $a_j$  pour tout  $k$ , alors  $a_i$  est au moins aussi bien classée que  $a_j$  dans  $P$
- **Axiome 9** : Linéarité des colonnes

- **Axiome 6 :** Adjonction ou retranchement d'une colonne
  - l'ajout ou le retranchement d'une colonne identique à une autre colonne ne doit pas modifier la réponse du critère
- **Axiome 7 :** Linéarité
  - le critère n'est pas modifié si on applique la même transformation linéaire à toutes les mesures de conséquence
- **Axiome 8 :** Continuité
  - soient  $P^x, \dots, P^k, \dots, P^1$  une suite de matrices  $[g_{ij}]$  qui converge vers  $P$ . Si  $a_i$  est classée avant  $a_j$  pour tout  $k$ , alors  $a_i$  est au moins aussi bien classée que  $a_j$  dans  $P$
- **Axiome 9 :** Linéarité des colonnes
  - le classement des actions n'est pas modifié lorsqu'on ajoute une constante à tous les éléments d'une même colonne

- **Axiome 6 :** Adjonction ou retranchement d'une colonne
  - l'ajout ou le retranchement d'une colonne identique à une autre colonne ne doit pas modifier la réponse du critère
- **Axiome 7 :** Linéarité
  - le critère n'est pas modifié si on applique la même transformation linéaire à toutes les mesures de conséquence
- **Axiome 8 :** Continuité
  - soient  $P^x, \dots, P^k, \dots, P^1$  une suite de matrices  $[g_{ij}]$  qui converge vers  $P$ . Si  $a_i$  est classée avant  $a_j$  pour tout  $k$ , alors  $a_i$  est au moins aussi bien classée que  $a_j$  dans  $P$
- **Axiome 9 :** Linéarité des colonnes
  - le classement des actions n'est pas modifié lorsqu'on ajoute une constante à tous les éléments d'une même colonne
- **Axiome 10 :** Adjonction d'une ligne spéciale

- **Axiome 6 :** Adjunction ou retranchement d'une colonne
  - l'ajout ou le retranchement d'une colonne identique à une autre colonne ne doit pas modifier la réponse du critère
- **Axiome 7 :** Linéarité
  - le critère n'est pas modifié si on applique la même transformation linéaire à toutes les mesures de conséquence
- **Axiome 8 :** Continuité
  - soient  $P^x, \dots, P^k, \dots, P^1$  une suite de matrices  $[g_{ij}]$  qui converge vers  $P$ . Si  $a_i$  est classée avant  $a_j$  pour tout  $k$ , alors  $a_i$  est au moins aussi bien classée que  $a_j$  dans  $P$
- **Axiome 9 :** Linéarité des colonnes
  - le classement des actions n'est pas modifié lorsqu'on ajoute une constante à tous les éléments d'une même colonne
- **Axiome 10 :** Adjunction d'une ligne spéciale
  - l'adjunction d'une action dominée ne modifie pas le classement des actions initiales

- **Axiome 6 :** Adjonction ou retranchement d'une colonne
  - l'ajout ou le retranchement d'une colonne identique à une autre colonne ne doit pas modifier la réponse du critère
- **Axiome 7 :** Linéarité
  - le critère n'est pas modifié si on applique la même transformation linéaire à toutes les mesures de conséquence
- **Axiome 8 :** Continuité
  - soient  $P^x, \dots, P^k, \dots, P^1$  une suite de matrices  $[g_{ij}]$  qui converge vers  $P$ . Si  $a_i$  est classée avant  $a_j$  pour tout  $k$ , alors  $a_i$  est au moins aussi bien classée que  $a_j$  dans  $P$
- **Axiome 9 :** Linéarité des colonnes
  - le classement des actions n'est pas modifié lorsqu'on ajoute une constante à tous les éléments d'une même colonne
- **Axiome 10 :** Adjonction d'une ligne spéciale
  - l'adjonction d'une action dominée ne modifie pas le classement des actions initiales
  - version affaiblie de l'axiome 6

- Un critère  $f$  vérifie les axiomes d'**ordre**, de **symétrie**, de **dominance stricte**, de **continuité**, d'**adjonction d'une ligne** et de **linéarité de colonne** ssi  $f$  est le **critère de Laplace**
- Un critère  $f$  vérifie les axiomes d'**ordre**, de **symétrie**, de **dominance stricte**, de **continuité**, d'**adjonction d'une ligne**, d'**adjonction d'une colonne** et de **convexité** ssi  $f$  est le **critère de Wald**
- Un critère  $f$  vérifie les axiomes d'**ordre**, de **symétrie**, de **dominance stricte**, de **continuité**, de **linéarité d'une colonne**, d'**adjonction d'une colonne** et de **convexité** ssi  $f$  est le **critère de Savage**
- Un critère  $f$  vérifie les axiomes d'**ordre**, de **symétrie**, de **dominance stricte**, de **continuité**, de **linéarité**, d'**adjonction d'une ligne** et d'**adjonction d'une colonne** ssi  $f$  est le **critère d'Hurwicz**

### CONTEXTE :

- on connaît une **distribution de probabilités** sur les différents états de la Nature



### CONTEXTE :

- on connaît une **distribution de probabilités** sur les différents états de la Nature

### Critère de décision :

- Espérance mathématique des gains (EMG)

$$EMG(a_i) = \sum_j p(e_j)g(a_i, e_j)$$

On retient l'action qui assure la meilleure EMG

## CONTEXTE :

- on connaît une **distribution de probabilités** sur les différents états de la Nature

## Critère de décision :

- Espérance mathématique des gains (EMG)

$$EMG(a_i) = \sum_j p(e_j)g(a_i, e_j)$$

On retient l'action qui assure la meilleure EMG

*Exemple des enveloppes :*

- $EMG(d_1) = 100\text{€}$
- $EMG(d_2) = 3/100 \times 1000\text{€} + 97/100 \times 1\text{€} = 30,97\text{€}$

### Exemple 3 - Papetier

---

#### Enoncé

Au mois d'août un papetier doit décider du nombre d'agendas à acheter pour l'année suivante. Un agenda coûte 20€ et est vendu à 45€. Fin janvier, chaque agenda invendu peut être renvoyé à l'éditeur qui le rachète 5€.

La loi de la demande est :

d	100	150	200	250	300
p(D=d)	0,3	0,2	0,3	0,15	0,05

#### Enoncé

Au mois d'août un papetier doit décider du nombre d'agendas à acheter pour l'année suivante. Un agenda coûte 20€ et est vendu à 45€. Fin janvier, chaque agenda invendu peut être renvoyé à l'éditeur qui le rachète 5€.

La loi de la demande est :

d	100	150	200	250	300
p(D=d)	0,3	0,2	0,3	0,15	0,05

**Problème :** combien d'agendas doit commander le papetier ?

## Exemple 3 - Modélisation

---

- **Actions** : ensemble des quantités commandées ( $a_i = q_i$ )
- **Etats de la Nature** : ensemble des demandes ( $e_j = d_j$ )
- **Tableau des gains** :  $g(q_i, d_j)$  : gain résultant de la commande de la quantité  $q_i$  lorsque la demande est égale à  $d_j$  :
  - si  $d_j \leq q_i$  :  $g(q_i, d_j) = 45d_j + 5(q_i - d_j) - 20q_i = 40d_j - 15q_i$
  - si  $d_j > q_i$  :  $g(q_i, d_j) = 45q_i - 20q_i = 25q_i$

### Tableau des gains :

$q_i \backslash d_j$	100	150	200	250	300
100	2500	2500	2500	2500	2500
150	1750	3750	3750	3750	3750
200	1000	3000	5000	5000	5000
250	250	2250	4250	6250	6250
300	-500	1500	3500	5500	7500

## Exemple 3 - Résolution

Tableau des gains :

$q_i \backslash d_j$	100	150	200	250	300
100	2500	2500	2500	2500	2500
150	1750	3750	3750	3750	3750
200	1000	3000	5000	5000	5000
250	250	2250	4250	6250	6250
300	-500	1500	3500	5500	7500

Distribution de probabilités :

d	100	150	200	250	300
$p(D=d)$	0,3	0,2	0,3	0,15	0,05

- $EMG(q_1) = 2500$
- $EMG(q_2) = 1750 \times 0.3 + 3750 \times 0.7 = 3150$
- $EMG(q_3) = 1000 \times 0.3 + 3000 \times 0.2 + 3750 \times 0.3 + 5000 \times 0.2 = 3025$
- $EMG(q_4) = 250 \times 0.3 + 2250 \times 0.2 + 4250 \times 0.3 + 6250 \times 0.2 = 3050$
- $EMG(q_5) = -500 \times 0.3 + 1500 \times 0.2 + 3500 \times 0.3 + 5500 \times 0.15 + 7500 \times 0.05 = 2400$

## Décision séquentielle

---

- Incertitude intervient à plusieurs niveaux
- Décideur confronté à une **séquence de choix successifs**
- Analyse à l'aide d'une représentation graphique du problème : un **arbre de décision**

- Incertitude intervient à plusieurs niveaux
- Décideur confronté à une **séquence de choix successifs**
- Analyse à l'aide d'une représentation graphique du problème : un **arbre de décision**

### Arbre de décision

- on connaît les ensembles  $A$  et  $E$ , le tableau des gains et éventuellement une distribution de probabilités sur  $E$
- un **arbre de décision** est une arborescence représentant la séquence logique des décisions possibles et des événements susceptibles de se produire



## Représentation par un arbre de décision

---

- Les **décisions** sont représentées par des arcs issus de sommets appelés **noeuds-décision** et symbolisés par un **carré**
- Les **états de la Nature** sont également représentés par des arcs sortant de sommets appelés **noeuds-hasard** et symbolisés par des **ronds**
  - les arcs sont valués par les probabilités correspondantes (s'il y a des probabilités)
- Les **sommets terminaux** contiennent la valeur du gain correspondant à la succession de décisions et d'événements se produisant sur le chemin allant de la racine au sommet considéré

**Exemple :** *exemple 2 avec les probabilités suivantes :*

	$e_1$	$e_2$	$e_3$
$p(e_j)$	0,4	0,4	0,2

## Calcul sur un arbre de décision

Avant tout il faut choisir le critère de décision que l'on va utiliser pour la prise de décision!

**Principe du calcul** : on associe des valeurs à partir des sommets terminaux vers le sommet initial (racine). Un sommet ne peut être évalué que si ses successeurs le sont déjà.

- **sur chaque sommet hasard** (dt ts les successeurs sont évalués) : calculer la valeur du critère concernant les gains des sommets suivants
- **sur chaque sommet décision** : retenir la valeur maximale des sommets suivants et sélectionner l'arc correspondant
- **arrêt** : si le sommet racine est évalué
- **Stratégie optimale** : succession des arcs sélectionnés permettant d'obtenir l'évaluation de la racine

**Exemple** : *exemple 2 avec EMG comme critère de décision*