par D. Bouyssou* et P. Perny

Modéliser des préférences

Dans toutes les circonstances où il faut faire un choix, interviennent des préférences. Leur modélisation intéresse donc aussi bien l'économie que la recherche opérationelle ou l'informatique. Il existe un modèle standard, qui devra être modifié ou étendu selon les phénomènes considérés.

Dès lors qu'un individu (ou un groupe d'individu) est confronté à un choix, il est naturel de supposer que ses « goûts » et ses « valeurs » influent sur son choix, ce qui amène à s'intéresser à ses préférences.

La modélisation des préférences joue ainsi un rôle important dans de nombreux domaines. Un économiste s'intéressera aux préférence de consommateurs rationnels afin d'étudier le comportement de marchés où ces consommateurs achètent des biens. Un spécialiste de science politique étudiera les préférences électeurs pour divers candidats et s'intéressera aux propriétés de divers mécanismes de vote permettant à ces électeurs d'exprimer leur opinion. Un spécialiste de recherche opérationnelle s'intéressera à la manière d'aider un individu à structurer ses préférences dans un problème de décision complexe.

Chacune de ces disciplines (et bien d'autres : psychologie, informatique, etc.) a développé une approche et des outils spécifiques pour modéliser des préférences.

Le langage des relations binaires

Supposons que l'on cherche à modéliser les préférences d'un individu pour un ensemble fini d'objets (projets, décision, etc.) $\{a, b, c, \ldots\}$. Une façon a priori naturelle de procéder consiste pour chaque coupe d'objet (a, b) à demander à l'individu de répondre à la question suivante :

L'objet a est il « au moins aussi bon » que l'objet *b* ?

*du laboratoire CNRS-LAMSADE, Université Paris Dauphine.

Le langage classique de la modélisation des préférences n'admet que deux réponses possible à cette question : OUI ou NON. Ceci amène à définir une relation binaire R sur l'ensemble des objets en posant a R b si la réponse à la question ci-dessus est OUI. Pour une paire d'objets $\{a, b\}$ on a donc une et une seule des quatre situations suivantes :

– ***a* R *b* et *b* R *a*.** On conclue alors que a et b sont indifférents (noté a I b),

– ***a* R *b* et Non *b* R *a*.** On conclue alors que a est strictement préféré à b (noté a P b),

– ***b* R *a* et Non *a* R *b*.** On conclue alors que b est strictement préféré à a, (noté b P a),

– **Non *a* R *b* et Non *b* R *a*.** On conclue alors que a et b sont incomparables (noté a J b).

	a* R *b	**Non *a* R *b***
b* R *a	*a* I *b* (indifférence)	*a* P *b* (préférence stricte)
Non *b* R *a*	*b* P *a* (préférence stricte)	*a* J *b* (incomparabilité)

Tableau 1 : Quatre situations fondamentales

Il est facile de constater qu'avec une telle approche :

– la relation d'indifférence I est toujours réflexive (a I a, pour tout a) et symétrique (si a I b alors b I a),

– la relation de préférence stricte P est toujours irréflexive (on n'a jamais a P a) et asymétrique (si a P b alors on n'a pas b P a),

– la relation d'incomparabilité est toujours irréflexive et symétrique,

– les relations d'indifférence, de préférence stricte et d'incomparabilité sont exhaustives et mutuellement exclusives (on a une et une seule des propositions : *a* I *b*, *a* P *b*, *b* P *a*, *a* J *b*).

Le langage utilisé en modélisation des préférences est donc celui des relations binaires.
Notons que l'on pourrait admettre à la question : *a* est-il au moins aussi bon que *b* d'autres réponses que OUI ou NON, par exemple : je ne sais pas, *a* est possiblement au moins aussi bon que *b*, la préférence de *a* sur *b* est plus marquée que celle de *c* sur *d*, etc. Ceci amènerait à utiliser d'autres outils de modélisation (relations binaires valuées, famille de relations binaires, logiques non classiques).

Modèle standard

Dans le modèle standard, on suppose que :
– étant donnés deux objets *a* et *b*, l'une au moins des deux propositions suivantes est vraie : *a* R *b* ou *b* R *a*, (la relation R est dite complète)
– si *a* R *b* et *b* R *c* alors *a* R *c*, (la relation R est dite transitive)
on dit alors que la relation R est un préordre complet.
Supposer que R est un préordre complet emporte des conséquences importantes :
– il n'y a pas d'incomparabilité (la relation J est vide),
– la relation de préférence stricte P est transitive,
– la relation d'indifférence I est transitive,
– les relations I et P se combinent « bien » au sens où, par exemple, si *a* I *b* et *b* P *c* alors *a* P *c*.
Le lecteur aura remarqué que dans le modèle standard, les propriétés de I et de P sont très voisines de celles de = et > entre des nombres : la seule différence tient à la possibilité que deux objets soient indifférents tout en n'étant pas identiques.

Ainsi, on ne sera pas surpris de savoir que dans le modèle standard, il est possible d'associer des nombres aux objets de telle sorte que la comparaison de ces nombres reflète fidèlement les jugement de préférence au sens où :
a P *b* si et seulement si $f(a) > f(b)$ et
a I *b* si et seulement si $f(a) = f(b)$.
Cette possibilité d'associer des nombres à des objets est très utile. Elle permet de ramener la manipulation de préférences à celle de nombres et, en particulier, d'utiliser des algorithmes d'optimisation pour trouver un objet qui soit au moins aussi bon que tous les autres. La fonction associant des nombres aux objets est appelée fonction de valeur ou fonction d'utilité.

Il faut toutefois prendre garde à la manipulation de tels nombres. La fonction *f* ainsi définie n'est pas unique : toute transformation de *f* respectant l'ordre induit par la comparaison des valeurs de *f* conviendrait également : on dit que *f* définit une échelle ordinale. Ainsi l'utilisation de manipulations arithmétiques sur les valeurs ainsi obtenues est souvent illégitime au sens où les conclusions obtenues sur la base de telles manipulations dépendent du choix arbitraire de cette fonction (ces conclusions sont alors dites non signifiantes).

À titre d'exemple, voici dans le tableau 2 deux fonctions *f* et *g* représentant le même préordre : *a* R *b*, *a* R *c*, *a* R *d*, *b* R *c*, *b* R *d* et *c* R *d*. Sur la base de la fonction *f* il serait tentant de conclure que la différence de préférence entre *c* et *d* est moins grande que la différence de préférence entre b et c puisque $f(b) - f(c) > f(c) - f(d)$… mais une telle conclusion est fausse si l'on utilise la fonction *g* qui, elle aussi, représente fidèlement le préordre complet duquel on est parti. Elle est donc non signifiante.

	a	*b*	*c*	*d*
f	10	9	2	1
g	100	99	98	50

Tableau 2 : Deux représentations numériques d'un même préordre complet.

Évaluation ordinale et évalutation cardinale

Supposons qu'un individu souhaite trouver le meilleur chemin pour aller du point a au point *d* dans le réseau de la figure 1 ci-contre.

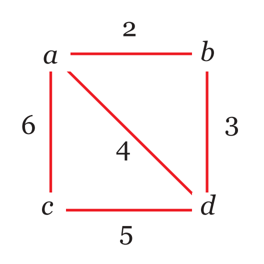

Figure1

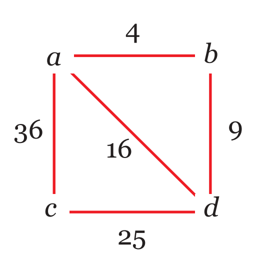

Figure 2

Si on suppose par exemple que les nombres figurant sur les routes représentent une évaluation du risque encouru en empruntant la route et que le but soit de trouver le chemin le plus sûr. Dans ce cas, les préférences entre deux chemins C et C' peuvent s'établir comme suit : un chemin C est préféré à un chemin C' si et seulement si le maximum des niveaux de risques encourus sur les routes composant le chemin C est inférieur à celui obtenu pour le chemin C'. Ainsi le chemin préféré de *a* à *d* est le chemin *a-b-d* de valeur 3. La notion de chemin préféré ici ne requiert qu'une information ordinale sur les niveaux de risque. En effet, tout autre codage numérique de cet ordre conduirait au même choix. Ainsi, si l'on élève au carré tous les nombres de la figure 1, on obtient le graphe de la figure 2 qui conduit au même chemin optimal.

Si on suppose maintenant que les nombres figurant sur les routes représentent les temps de parcours, on peut se fixer comme but de trouver le chemin le plus rapide de *a* à *b*. Dans ce cas, les préférences entre deux chemins C et C' s'établissent comme suit : un chemin C est préféré à un chemin C' si et seulement si la somme des temps de par-

Jouer avec un dé

On dispose d'un dé A à six faces portant les nombres 1, 2, 3, 4, 5, 6. Il s'agit de payer 3 € pour lancer une fois le dé A après quoi on récoltera un gain égal au nombre résultant du lancé. Doit-on accepter de jouer à ce jeu ? A priori oui, car l'espérance de gain d'un lancer (c'est-à-dire la moyenne des gains que l'on peut obtenir avec ce dé, pondérés par les probabilités de gain) est égale à :

$$\left(\frac{1}{6}\times 1\right)+\left(\frac{1}{6}\times 2\right)+\left(\frac{1}{6}\times 3\right)+\left(\frac{1}{6}\times 4\right)+\left(\frac{1}{6}\times 5\right)+\left(\frac{1}{6}\times 6\right)=3{,}5\text{ €}$$

ce qui est supérieur à la mise de jeu (3 € par lancé). Une autre façon de présenter ce calcul est de regarder l'espérance du gain net (gain moins mise de jeu) qui doit être positive. Ici on a :

$$\left(\frac{1}{6}\times(-2)\right)+\left(\frac{1}{6}\times(-1)\right)+\left(\frac{1}{6}\times 0\right)+\left(\frac{1}{6}\times 1\right)+\left(\frac{1}{6}\times 2\right)+\left(\frac{1}{6}\times 3\right)=$$

0,5 ce qui est positif.

On peut toutefois se demander si tout individu serait prêt à jouer à ce jeu, surtout si l'on envisage de modifier le jeu en multipliant la mise et les gains par 10 ou par 100. Pour rendre compte de la diversité des comportements individuels face au risque, un simple calcul d'espérance de gain ne suffit plus comme le montre un autre jeu (cf. *Jouer avec deux dés*).

cours des routes composant le chemin C est inférieure à celle composant le chemin C'. Ainsi le chemin préféré sur la figure 1 est le chemin *a-d*. Cette fois, pour la détermination du chemin préféré, on ne peut pas se contenter d'une évaluation ordinale des temps. On doit quantifier ces temps sur une échelle où les nombres représentent des quantités (de temps) et non plus un ordre de grandeur d'une durée. Il s'agit donc d'une information plus riche qui permet notamment d'additionner des nombres de manière signifiante ce qui ne serait pas le cas en présence d'une échelle ordinale. L'impact en terme de décision est le suivant : si l'on élève tous les temps au carré, on préserve l'ordre sur les temps des différentes routes mais pas sur les chemins qui, eux, enchaînent souvent plusieurs routes et le chemin optimal change. On voit que sur la figure 2, le chemin le plus rapide de *a* à *d* n'est plus *a-d* mais *a-b-d*. Cela montre que le choix du meilleur chemin nécessite ici une information cardinale sur les temps.

Supposons cette fois que le graphe de la figure 1 ne représente plus un réseau de routes mais des lignes de communication pouvant relier les sites *a*, *b*, *c* et *d*, et que les valeurs associées aux lignes représentent une estimation (qualitative ou quantitative) du coût d'installation de ces lignes. Si l'on cherche à installer un réseau de communication qui permette de connecter les différents sites pour un moindre coût, on doit choisir ici un ensemble de trois lignes couvrant tous les sites de manière à ce que toute paire de site soit reliée directement ou indirectement (problème de l'arbre couvrant de poids minimum). Par exemple, l'ensemble $\{(a, b), (a, d), (c, d)\}$ est une solution possible car tous les sommets sont reliés. Son coût est de 2 + 4 + 5 = 11. En revanche l'ensemble de lignes $\{(a, b), (b, d), (a, d)\}$ qui ne coûte que 9 n'est pas satisfaisant car le site *c* n'est pas connecté. Ici, la solution optimale est l'ensemble $\{\{(a, b), (b, d), (c, d)\}\}$ de coût 10. Il est intéressant de noter que cette solution est aussi la solution optimale sur le graphe de la Figure 2. On pourrait d'ailleurs montrer que cette solution reste optimale pour tout jeu de coût ordonnant les lignes comme sur la figure 1, c'est-à-dire : $(a, b) < (b, d) < (a, d) < (c, d) < (a, c)$. Ici le codage numérique choisi pour représenter cet ordre importe peu, et ce malgré le fait que la valeur d'une solution soit définie. Contrairement à ce qu'aurait pu laisser penser le cas précédent, on voit donc que la notion de solution préférée peut, dans certains cas, s'accommoder d'une information ordinale, même quand l'évaluation d'une solution nécessite des opérations d'additions.

Les tasses de café

Disposons cent tasses de café numérotées de 1 à 100 devant un individu. Dans la première tasse de café, il n'y a pas de sucre, dans la seconde, il y a un grain de sucre, dans la troisième trois grains de sucre. La centième tasse contient 99 grains de sucre soit deux morceaux. D'un individu n'ayant pas un palais exceptionnel on peut s'attendre à ce qu'il ne détecte pas de différence de goût entre deux tasses consécutives. Ainsi on aura 1 I 2, 2 I 3, …, 99 I 100. Si l'on supposait l'indifférence transitive, ceci impliquerait que 1 I 100. Pourtant notre individu perçoit la différence entre une tasse de café non sucré et une tasse de café avec deux morceaux de sucre et peut donc avoir une préférence pour l'une ou l'autre. Une telle expérience de pensée amène à considérer que, dès lors que l'on suppose que les capacités de discrimination d'un individu ne sont pas parfaites, on peut vouloir relâcher l'hypothèse de la transitivité de l'indifférence. Ceci a amené à l'étude de structures de préférence généralisant le préordre complet (quasi-ordre, ordre d'intervalle) dans lesquelles P reste transitive mais I ne l'est plus.

Extension du modèle

On peut vouloir étendre le modèle standard pour au moins deux raisons distinctes. La première tient à la nature des objets. Jusqu'ici on n'a rien supposé quant à la nature des objets à comparer et l'on n'a pas cherché à lier le modèle de préférence à une description de ces objets. Cependant, dans de nombreuses situations, les objets ont une structure très particulière. Ainsi, en décision multicritère, un objet consiste en un vecteur d'évaluation sur la famille de critères. En décision dans le risque, un objet consiste en une distribution de probabilité sur un ensemble de conséquences (un billet de loterie). En décision dans l'incertain, un objet consiste dans un ensemble de conséquences survenant conditionnellement à l'occurrence de divers scénarios (si j'achète le titre *x* et que le CAC 40 monte de 3 points alors je gagnerai *y* euros).
Face à de tels ensembles d'objets, il est tentant d'utiliser leur structure pour faciliter la modélisation des préférences.
Dans la plupart de ces modèles, on associe aux objets des nombres de manière à ce que, comme auparavant, la comparaison de ces nombres reflète les comparaisons en termes de préférence. Mais on impose également à ces nombres de vérifier d'autres propriétés, par exemple, dans la décision dans le risque (cf. encadrés *Jouer avec un dé* et *Jouer avec deux dés*), le fait que chaque nombre puisse s'obtenir comme une espérance mathématique. Contrairement au cas envisagé plus haut, toute transformation de ces nombres respectant l'ordre n'est plus admissible.
On peut également vouloir relâcher les hypothèses de base du modèle standard parce que dans bien des cas, les préférences laissent place à des situations d'incomparabilité. De plus, même s'il n'y a pas d'incomparabilité, la transitivité peut faire question. Duncan Luce, célèbre psychologue américain, a proposé dans les années 1950 une expérience de pensée suivante pour montrer que la transitivité de l'indifférence pouvait parfois faire question (cf. encadré *Les tasses de café*).
Ces deux voies d'extension sont néanmoins loin d'épuiser la variété des recherches menées en modélisation des préférences et de nombreux phénomènes motivent une étude plus approfondie.

D. B. & P. P.

Jouer avec deux dés

Dans ce jeu, on utilise deux dés équilibrés qui partagent les 21 points d'un dé différemment sur leurs six faces : B : 2, 2, 2, 5, 5, 5 et C : 1, 1, 1, 6, 6, 6. Il s'agit de payer 3 € pour choisir un dé parmi B ou C et le lancer. On récoltera alors un gain égal au nombre résultant du lancé. Doit-on jouer à ce jeu et quel dé choisir pour jouer ? On remarque l'espérance de gain net pour un lancer de dé est :
pour B : $(1/2 \times (2-3)) + (1/2 \times (5-3)) = 0{,}5$ €
pour C : $(1/2 \times (1-3)) + (1/2 \times (6-3)) = 0{,}5$ €
On pourrait donc penser que tout individu est prêt à jouer et qu'il peut choisir indifféremment le dé B ou C qui présentent la même espérance de gain net. Pourtant, si l'on propose ce jeu à divers individus, on trouvera certaines personnes pour préférer ne pas jouer, d'autres pour préféré jouer au jeu avec le dé B, et enfin d'autre pour préférer jouer au jeu avec le dé C.
Pour modéliser cette diversité de comportements, on peut considérer une fonction d'utilité u définie sur l'ensemble des gains nets possibles $\{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$, à valeurs dans l'intervalle $[0, 1]$, croissante de $u(0) = 0$ à $u(6) = 1$. La quantité $u(x)$ représente l'utilité attachée à la conséquence x, c'est-à-dire l'attrait – mesuré sur l'échelle $[0, 1]$ – d'obtenir le gain x pour un individu donné. On peut alors représenter les préférences d'un individu en remplaçant les gains par leur utilité dans le calcul d'espérance (critère de l'utilité espérée). Considérons par exemple les fonctions d'utilité suivantes :

	– 2	– 1	0	1	2	3
u_1	0,20	0,55	0,80	0,90	0,95	1,00
u_2	0,10	0,40	0,60	0,75	0,90	1,00
u_3	0,00	0,10	0,20	0,30	0,50	1,00

• Pour l'individu représenté par la fonction u_1 on a :
u_1(“Ne pas jouer”) = $u_1(0) = 0{,}80$
u_1(“jouer avec B”) = $0{,}5\, u_1(-1) + 0{,}5\, u_1(2) = 0{,}75$
u_1(“jouer avec C”) = $0{,}5\, u_1(-2) + 0{,}5\, u_1(3) = 0{,}60$.
Ici l'utilité espérée du gain net est plus grande si l'on ne joue pas ; le joueur représenté par u1 préférera ne pas jouer.
• Pour l'individu représenté par la fonction u_2 on a :
u_2(“Ne pas jouer”) = $u_2(0) = 0{,}60$
u_2(“jouer avec B”) = $0{,}5\, u_2(-1) + 0{,}5\, u_2(2) = 0{,}65$
u_2(“jouer avec C”) = $0{,}5\, u_2(-2) + 0{,}5\, u_2(3) = 0{,}55$.
Ici l'utilité espérée du gain net est plus grande si l'on joue avec B : le joueur représenté par u2 préférera jouer en utilisant le dé B.
• Pour l'individu représenté par la fonction u_3 on a :
u_3(“Ne pas jouer”) = $u_3(0) = 0{,}20$
u_3(“jouer avec B”) = $0{,}5\, u_3(-1) + 0{,}5\, u_3(2) = 0{,}30$
u_3(“jouer avec C”) = $0{,}5\, u_3(-2) + 0{,}5\, u_3(3) = 0{,}50$.
Ici l'utilité espérée du gain net est plus grande si l'on joue avec C ; le joueur représenté par u3 préférera jouer en utilisant le dé C.

Bibliographie pour aller plus loin

On trouvera une bibliographie intéressante sur le site de Denis Bouyssou :
http://l1.lamsade.dauphine.fr/dea103/ens/bouyssou/Bibliographie.htm