‘Utilite cardinale’ dans le certain et choix dans le risque

Denis BOUYSSOU
Jean-Claude VANSNICK

Résumé
Le but de cet article est d'étudier les liens existant entre la notion de fonction d'utilité au sens de von Neumann et Morgenstern et celle de fonction de valeur mesurant les différences de préférence. Cette question a donné lieu à de nombreuses controverses dont nous rappelons l'importance. On présente ensuite un ensemble de résultats donnant, en particulier, les conditions nécessaires et suffisantes pour que les deux fonctions soient identiques à une transformation affine positive près. On étudie enfin les implications de ces résultats sur un plan théorique et en matière d'aide à la décision et de calcul économique.

‘Cardinal Utility’ and Risky Choice

Abstract
The aim of this paper is to study the links between the notion of von Neumann-Morgenstern utility function and that of value function measuring preference differences. We first recall the heated debates that took place around this question. We then present a number of results giving, in particular, the necessary and sufficient conditions for these two functions to define the same interval scale. These results are then analyzed both from a theoretical and prescriptive point of view.

I. Introduction.

Supposons que l'on vous oblige à choisir entre recevoir avec certitude une somme de 500 000 francs et participer à une ‘loterie’ donnant avec des chances égales la possibilité de gagner soit 1 500 000 francs, soit 0 franc. L'espérance mathématique de gain de la loterie est donc de 750 000 francs. Tout en étant ‘rationnels’, de nombreux individus, dont les auteurs, préfère-raient pourtant recevoir la somme de 500 000 francs avec certitude. Un tel comportement traduit ce que l'on peut appeler une ‘aversion pour le risque’. Comme de nombreux auteurs l'ont fait remarquer (cf. par exemple, Allais (1953a), Dyer et Sarin (1982), Bell (1981), Yaari (1987)), ce comportement est souvent la résultante d'un grand nombre de phénomènes. Parmi eux, il semble que la ‘valorisation psychologique’ des conséquences joue un rôle important. Pour beaucoup d'individus, recevoir 1 500 000 francs avec certitude n'entraîne pas un ‘gain psychologique’ trois fois supérieur à celui résultant d'un gain de 500 000 francs. Même s'il n'est pas aisé de donner un contenu opérationnel clair à cette idée de valorisation psycholo-gique, il est raisonnable de penser qu'elle intervient dans la façon dont se font les choix comportant un risque.

Le but de cet article est de préciser les liens existant entre cette ‘valorisation psychologique’ des conséquences dans le certain et les choix comportant un risque. Plus précisément, on compa-rera deux concepts classiques qui ont souvent été utilisés pour modéliser ces notions : celui de fonction d'utilité au sens de von Neumann-Morgenstern d'une part et celui de fonction de valeur mesurant les différences de préférence d'autre part. Ces concepts seront introduits en section 2. La question qui fait l'objet de cet article a engendré de nombreuses controverses. Nous les résumerons brièvement en section 3 avant de présenter, à la section 4, nos principaux résultats. Ces résultats seront discutés, à la lumière d'autres travaux, dans une dernière section.

II. Fonctions d'utilité de von Neumann-Morgenstern et fonctions de valeur mesurant les différences de préférence.

Soit X un ensemble que nous interprèterons comme un ensemble de conséquences dans un problème de décision, par exemple, un ensemble de sommes monétaires, et $R \subset X^2$ une relation binaire sur cet ensemble (lue ‘préféré ou indifférent à’) modélisant les préférences d'un individu. Une fonction f sur X telle que :

$$\forall\ x, y \in X,\ x\ R\ y \Leftrightarrow f(x) \geq f(y) \qquad (0)$$

est appelée une fonction de valeur (représentant numériquement R sur X). On sait (cf. par exemple Fishburn (1970)) que, lorsque X est fini ou dénombrable, une telle fonction existe si et seulement si R est un préordre complet (c'est-à-dire que R est complète et transitive). Il est aisé de montrer que, s'il existe deux fonctions f et g représentant numériquement la relation R, alors f et g sont liées par une transformation monotone strictement croissante. Dans la termi-nologie de la théorie du ‘mesurage’ (cf. Roberts (1979)), on dit alors que f est une échelle ordinale en liaison avec R. Comme le fait remarquer Fishburn (1976), il faut imposer à la représentation numérique de satisfaire à d'autres conditions que (0) si l'on souhaite que cette représentation numérique définisse une échelle ayant une structure plus ‘forte’. Une structure particulièrement intéressante est celle d'‘échelle d'intervalle’ où seule l'‘origine’ et l'‘unité’ de la représentation numérique sont arbitraires. Plus précisément, on dira que l'on est en présence d'un échelle d'intervalle lorsque les conditions imposées à une représentation numérique font que, s'il existe deux représentations f et g satisfaisant à ces conditions, elles sont nécessairement liées par une relation du type $f = ag + b$ avec $a, b \in$ Re et $a > 0$.

Dans cet article, nous nous intéresserons à deux voies classiques qui ont été proposées dans la littérature pour permettre de passer d'une échelle ordinale à une échelle d'intervalle. La première vise à obtenir une représentation numérique non seulement des préférences sur X mais également des préférences entre des distributions de probabilité sur X et débouche sur la notion de fonction d'utilité au sens de von Neumann-Morgenstern. La seconde vise à obtenir une représentation numérique des préférences sur X et des ‘différences de préférence’ entre les éléments de X et débouche sur la notion de fonction de valeur mesurant les différences de préférence.

a) Comparaison de loteries ayant leurs lots dans X.

La théorie de l'utilité espérée a pour objet des comparaisons de ‘loteries’ ayant leurs lots dans X. Par souci de simplicité, nous ne considèrerons ici que l'ensemble $P_S(X)$ des mesures de probabilité simples[1] sur X et on notera $p(x)$ la probabilité affectée à $x \in X$ par la mesure $p \in P_S(X)$. Cette théorie vise à représenter numériquement, par une fonction $u : X \rightarrow$ IR, une relation binaire $R_S \subset [P_S(X)]^2$, permettant de comparer en termes de préférence deux mesures de probabilité, de façon à obtenir une représentation telle que, $\forall\ p, q \in P_S(X)$

$$p\ R_S\ q \Leftrightarrow \sum_{x \in X} p(x)u(x) \geq \sum_{x \in X} q(x)u(x) \qquad (1)$$

la comparaison de deux mesures de probabilité se ramenant alors à celle de leur espérance d'utilité.

Il est naturel de considérer que les préférences concernant les loteries ‘dégénérées’ coïncident avec les préférences pour les éléments de X.

En notant p_x l'élément de $P_S(X)$ tel que $p_x(x) = 1$, ceci revient à imposer la condition :

$$\forall\ x, y \in X,\ p_x\ R_S\ p_y \Leftrightarrow x\ R\ y \qquad (\alpha)$$

que l'on supposera vérifiée dans la suite de cet article. La condition (α) fait que toute fonction vérifiant (1) satisfait également à (0).

Les conditions nécessaires et suffisantes garantissant l'existence d'une telle représentation numérique sont classiques. On les trouvera, par exemple, dans Fishburn (1970). On sait que ces conditions imposent à u d'être une échelle d'intervalle en liaison avec R_S. On appellera u une ‘fonction d'utilité au sens de von Neumann et Morgenstern’ (fonction d'utilité de vN-M).

---

[1] Rappelons qu'une mesure de probabilité p sur un ensemble X est dite simple s'il existe un sous-ensemble fini A de X tel que $p(A) = 1$.

Il est possible de présenter la théorie de l'utilité espérée de manière différente en énonçant les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'il existe une représentation numérique $U : P_S(X) \to IR$ telle que $\forall$ p, q $\in P_S(X)$ et $\forall \alpha \in [0, 1]$

$p \; R_S \; q \Leftrightarrow U(p) \geq U(q)$ (2)

$U(\alpha p + (1-\alpha)q) = \alpha U(p) + (1-\alpha)U(q)$ (3)

où $\alpha p + (1-\alpha)q$, noté également $p\alpha q$, désigne l'élément de $P_S(X)$ affectant à chaque $x \in X$ la probabilité $\alpha p(x) + (1-\alpha)q(x)$. Ces conditions font de U une échelle d'intervalle[2] en liaison avec R_S. Les fonctions U et u sont liées par la relation :

$U(p) = \sum_{x \in X} p(x)u(x)$.

Les techniques permettant de déterminer empiriquement une fonction d'utilité de vN-M sont classiques. On les rappellera brièvement en section 5.

b) Comparaison de différences de préférence.

La notion de ‘valorisation psychologique’ des conséquences est liée à l'existence d'une relation binaire $\mathcal{R} \subset X^4$ permettant de comparer des ‘différences de préférence’, la relation $(x, y) \mathcal{R} (z, w)$ pouvant s'interpréter comme ‘la différence de préférence entre x et y est au moins aussi grande que la différence de préférence existant entre z et w’ ou ‘le gain psychologique résultant du passage de y à x est au moins aussi grand que celui résultant du passage de w à z’. Nous renvoyons le lecteur à la section 5 pour la présentation de diverses techniques visant à cerner de telles différences de préférence en pratique.

Nous nous intéresserons ici à une représentation numérique $v : X \to Re$ de $\mathcal{R}$ telle que, $\forall$ x, y, z, w $\in$ X :

$(x, y) \mathcal{R} (z, w) \Leftrightarrow v(x) - v(y) \geq v(z) - v(w)$ (4)

Il est, ici aussi, naturel de considérer que les différences de préférence sont compatibles avec les préférences exprimées entre les éléments de X et l'on supposera dans la suite que :

$\forall x, y \in X, (x, y) \mathcal{R} (y, y) \Leftrightarrow x \; R \; y$ (β)

La condition (β) fait que toute fonction vérifiant (4) satisfait également à (0). En combinant les conditions (α) et (β) on obtient alors :

$\forall x, y \in X, (x, y) \mathcal{R} (y, y) \Leftrightarrow p_X \; R_S \; p_y$ (γ)

Nous appellerons v une ‘fonction de valeur mesurant les différences de préférence’. On trouvera dans Scott et Suppes (1958), Debreu (1960) et Krantz et al. (1971) l'énoncé de conditions garantissant l'existence d'une telle fonction. Un condition nécessaire évidente pour (4) est que $\forall$ x, y, z, w $\in$ X,

$(x, y) \mathcal{R} (z, w) \Leftrightarrow (w, z) \mathcal{R} (y, x)$.

[2] Dans tout ce qui suit, nous utiliserons des majuscules pour désigner des fonctions sur $P_S(X)$ et des minuscules pour des fonctions sur X.

On sait que (4) n'impose pas à v d'être une échelle d'intervalle. Pour qu'il en soit ainsi, il faut imposer à la structure de X d'être ‘suffisamment’ riche[3].

Conformément à nos conventions, on notera V une fonction de valeur mesurant les différences de préférence sur $P_S(X)$, c'est-à-dire, une représentation numérique de différences de préférence entre mesures de probabilité simples. Une telle fonction est une représentation numérique d'une relation binaire $\mathcal{R}_S \subset [P_S(X)]^4$ telle que, $\forall$ p, q, r, s $\in P_S(X)$:

$$(p, q)\ \mathcal{R}_S\ (r, s) \Leftrightarrow V(p) - V(q) \geq V(r) - V(s) \qquad (5)$$

Lorsque l'on fera appel à cette notion, on supposera, bien sûr, que :

$$\forall\ p, q \in P_S(X),\ (p, q)\ \mathcal{R}_S\ (q, q) \Leftrightarrow p\ R_S\ q \qquad (\gamma')$$

III. Genèse d'une controverse.

Les ‘fonctions de valeur mesurant les différences de préférence’ (dont on supposait qu'elles étaient définies à une transformation affine positive près) ont longtemps été utilisées en Economie sous le nom d'‘utilité cardinale’ par opposition à l'‘utilité ordinale’, simple représentation numérique d'une relation de préférence que nous avons appelé en section 1 une fonction de valeur. La ‘révolution néo-classique’ a permis de montrer que l'on pouvait obtenir la plupart des résultats importants en micro-économie sans recourir à cette notion. Ce constat, joint à la difficulté de définir la notion de différence de préférence de manière opérationnelle, explique que la notion de fonction de valeur mesurant les différences de préférence soit alors, peu à peu, tombée en désuétude (cf. Stigler (1950) pour un historique de cette notion en Economie). La publication de l'ouvrage de von-Neumann et Morgenstern (1947) modifia cette situation. Il semblait montrer en effet que l'on pouvait obtenir une ‘utilité cardinale’, ou, plus précisément, une représentation numérique d'une relation de préférence définie à une transformation affine positive près, en effectuant des comparaisons de loteries. Il en résulta un trouble certain (cf. Baumol (1951)). A cette époque, de nombreux ‘néo-Bernoulliens’, c'est-à-dire les tenants de la théorie de l'utilité espérée, admettaient que la fonction d'utilité de vN-M n'était autre que la fonction d'‘utilité cardinale’ c'est-à-dire, une fonction de valeur mesurant les différences de préférence[4] (voir les remarques assez ambiguës à ce sujet dans von Neumann et Morgenstern (1947) ou l'article de Friedman et Savage (1948)).

C'est dans cette situation que M. Allais présenta, au Colloque tenu sur le problème des choix dans le risque à Paris en 1952 (où assistaient de nombreux néo-Bernoulliens), une théorie des choix dans le risque dans laquelle la notion de fonction de valeur mesurant les différences de

[3] Nous renvoyons à Vansnick (1987) pour une approche fondée sur l'introduction d'une famille de relations binaires dans X^4 permettant d'éviter de recourir à de telles conditions structurelles.

[4] Cette confusion a peut-être été accentuée par le fait qu'il était traditionnel en Economie de faire l'hypothèse d'une "utilité marginale décroissante", c'est-à-dire de la concavité de la fonction de valeur mesurant les différences de préférence. Or, la concavité d'une fonction d'utilité de vN-M qui traduit un comportement d'aversion pour le risque est également une hypothèse généralement admise en Economie.

préférence tenait une grande place. Selon lui, toute ‘théorie du risque’ se doit d'inclure quatre facteurs fondamentaux (pour plus de détails, nous renvoyons à Allais (1953a)) :

a) la distorsion des valeurs monétaires par la prise en compte d'une fonction de valeur mesurant les différences de préférence définie sans référence à des choix risqués ;
b) la distorsion éventuelle des probabilités objectives ;
c) la prise en compte de l'espérance mathématique de la fonction de valeur mesurant les différences de préférences ;
d) la prise en compte de la dispersion de cette fonction autour de son espérance mathématique.

Ceci a amené M. Allais à proposer une théorie du risque fondée sur la comparaison de distributions de probabilité sur une échelle d'‘utilité cardinale’, celle-ci étant définie comme une fonction de valeur mesurant les différences de préférence. Sa position n'a pas varié depuis et il a toujours considéré qu'il était possible de définir une telle fonction de façon opérationnelle et sans référence à des choix risqués (cf. Allais (1986), (1988)). Notons que la nécessité de prendre en compte ces quatre facteurs semble avoir été acceptée à l'époque par les néo-Bernoulliens.

Comme le fit alors observer M. Allais, admettre que la fonction d'utilité de vN-M mesure les différences de préférence, c'est aussi admettre que la formulation de la théorie de l'utilité espérée est extrêmement restrictive puisqu'elle ne permet pas de prendre en compte la dispersion des valeurs de cette fonction autour de son espérance mathématique. Cette théorie ne peut donc avoir, au mieux, selon M. Allais, qu'une valeur ‘asymptotique’.

Face à cet argument, la défense des ‘néo-Bernoulliens’ s'est organisée de deux manières. Certains (cf. Savage (1954, p. 94)) ont nié qu'il puisse exister une fonction de valeur mesurant les différences de préférence dans le certain ou qu'il soit possible de la cerner de façon opérationnelle. D'autres (cf. Luce et Raiffa (1957), Fishburn (1976), etc.) ont fait observer qu'une fonction d'utilité de vN-M et une fonction de valeur mesurant les différences de préférence n'ont aucune raison d'être identiques, l'une étant une représentation numérique de préférences entre des distributions de probabilité, c'est-à-dire d'une relation $R_S \subset [P_S(X)]^2$ et l'autre une représentation numérique de différences de préférence, c'est-à-dire d'une relation $\mathcal{R} \subset X^4$. Pour eux, une fonction d'utilité de vN-M est précisément définie de façon à prendre en compte les facteurs a), c) et d) de M. Allais (voir, par exemple, à ce sujet de Finetti (1979)).

Pour contrer ce dernier argument, M. Allais a toujours maintenu que, s'il existait une fonction d'utilité de vN-M, alors celle-ci était nécessairement identique (à une transformation affine positive près) à une fonction de valeur mesurant les différences de préférence (dont l'existence ne fait pour lui aucun doute). Il a donné diverses preuves de cette assertion (cf. Allais (1953a), (1979), (1985)) sur lesquelles nous reviendrons par la suite. A de rares exceptions près (cf. Machina (1981)), cet argument n'a jamais été clairement analysé. En dépit de l'importance du problème, le débat a peu évolué jusqu'à une date récente.

On a assisté, depuis le début des années 1980, à un net regain d'intérêt pour ces questions. De nombreux auteurs ont rappelé que la notion d'‘aversion pour le risque’ était nécessairement liée à la perception des conséquences dans le certain (cf. Bell (1981), Dyer et Sarin (1982), Krzysztofowicz (1983), Yaari (1987)[5]). D'autres se sont intéressés aux liens unissant diverses décompositions particulières d'une fonction d'utilité de vN-M et d'une fonction de valeur mesurant les différences de préférence (cf. Dyer et Sarin (1979), Baron et al. (1984)). Sarin (1982) a proposé des axiomes, dans le cadre d'une situation d'‘incertitude’, impliquant l'existence d'une fonction d'utilité linéaire (i.e., se prêtant à des calculs d'espérance mathématique) mesurant les différences de préférence. Des études empiriques ont été menées sur la question. Nous les analyserons dans la dernière section de cet article.

Selon nous, ces contributions récentes n'ont cependant pas permis d'apporter une réponse claire au problème faisant l'objet de cet article en ne distinguant pas clairement les trois niveaux d'analyse possibles de ce problème :

- niveau axiomatique : quelles sont les conditions portant sur R_S et $\mathcal{R}$ (resp. $\mathcal{R}_S$) permettant d'imposer des liens entre u ou U et v (resp. V) ?
- niveau descriptif : les conditions liant u et v correspondent-elles aux préférences exprimées par la majorité des sujets dans les études expérimentales qui ont été réalisées ?
- niveau prescriptif : que peut-on attendre des résultats obtenus du point de vue de l'aide à la décision et du calcul économique ?

Les deux sections suivantes aborderont ces différents niveaux.

IV. Principaux résultats.

L'objectif de cette section est de préciser clairement, sur un plan théorique, les liens pouvant unir une fonction d'utilité de vN-M et une fonction de valeur mesurant les différences de préférence. Nous tenterons de répondre aux questions suivantes :

- sous quelles conditions une fonction d'utilité de vN-M est-elle identique à une fonction de valeur mesurant les différences de préférence ?
- sous quelles conditions une fonction d'utilité de vN-M mesure-t-elle les différences de préférence ?
- sous quelles conditions existe-t-il une fonction vérifiant à la fois les propriétés d'une fonction d'utilité de vN-M et d'une fonction de valeur mesurant les différences de préférence ?
- sous quelles conditions la transformation liant une fonction d'utilité de vN-M et une fonction de valeur mesurant les différences de préférence a-t-elle une forme partculière ?

On peut résumer, de manière plus formelle, ces interrogations comme suit :

---

[5] Dans cet article, il est fait mention d'un document non publié de M. Shubik dont l'objectif semble très proche du nôtre mais dont n'avons pas eu connaissance.

- en supposant qu'il existe une fonction d'utilité de vN-M, u (resp. U) sur X (resp. sur $P_S(X)$) et une fonction de valeur mesurant les différences de préférence v (resp. V) sur X (resp. sur $P_S(X)$), sous quelles conditions u (resp. U) est-elle identique à v (resp. V) à une transformation affine positive près[6] ?
- en supposant qu'il existe une fonction d'utilité de vN-M, u (resp. U) sur X (resp. sur $P_S(X)$) et une relation binaire $\mathcal{R} \subset X^4$ (resp. $\mathcal{R}_S \subset [P_S(X)]^4$) permettant de comparer des différences de préférence, sous quelles conditions u vérifie-t-elle (4) (resp. U vérifie (5)) ?
- en supposant qu'il existe une relation $R_S \subset [P_S(X)]^2$ permettant de comparer des loteries ayant leurs lot dans X et une relation binaire $\mathcal{R} \subset X^4$ (resp. $\mathcal{R}_S \subset [P_S(X)]^4$) permettant de comparer des différences de préférence, sous quelles conditions existe-t-il une fonction w sur X (resp. W sur $P_S(X)$) vérifiant à la fois (1) et (4) (resp. (2), (3) et (5)) ?
- en supposant qu'il existe une fonction d'utilité de vN-M, u sur X et une fonction de valeur v mesurant les différences de préférence sur X, sous quelles conditions peut-on donner une forme particulière à la transformation $u = \beta[v]$?

Nous présenterons tout d'abord trois théorèmes permettant de répondre aux trois premières questions dans le cas où l'on admet qu'il est possible de comparer des différences de préférence entre éléments de $P_S(X)$. Cette hypothèse est intéressante sur le plan théorique car elle permet de travailler sur un ensemble ($P_S(X)$) muni d'une structure très riche. On étudiera ensuite le cas où les différences de préférence ne sont comparées que sur X. Ce n'est qu'en fin de section qu'on abordera la quatrième question[7].

Théorème 1. Soit $R_S \subset [P_S(X)]^2$ et $\mathcal{R}_S \subset [P_S(X)]^4$ deux relations binaires liées par la condition (γ'), R_S étant représentable numériquement par une fonction U sur $P_S(X)$ vérifiant (2) et (3) et $\mathcal{R}_S$ par une fonction V sur $P_S(X)$ vérifiant (5). Alors,

$[U \equiv V]$

si et seulement si,

A1 : $\forall$ p, q $\in P_S(X)$, $(p, p1/2q)\ \mathcal{I}_S\ (p1/2q, q)$.

Démonstration. La nécessité de A1 est évidente. Observons que (5) et (γ') impliquent que V vérifie (2). La suffisance sera dès lors établie si l'on montre que V vérifie (3) car une fonction vérifiant (2) et (3) est une échelle d'intervalle en liaison avec R_S.

Supposons que p I_S q. Il découle de l'existence de U que p I_S pαq I_S q $\forall\ \alpha \in [0, 1]$. On a donc $V(p\alpha q) = V(p) = V(q) = \alpha V(p) + (1 - \alpha)V(q)$.

Supposons à présent que p P_S q. Faisons d'abord observer que A1 et (5) impliquent que $\forall$ p, q $\in P_S(X)$, $V(p1/2q) = 1/2V(p) + 1/2V(q)$. En utilisant itérativement ce résultat on obtient :

$V(p(m/2^n)q) = (m/2^n)V(p) + (1 - (m/2^n))V(q)$

pour tous entiers positifs m et n tels que $0 \leq m/2^n \leq 1$.

---

[6] ce que nous écrirons $u \equiv v$ (resp. $U \equiv V$).

[7] Dans tout ce qui suit, on notera classiquement I (resp. $\mathcal{I}$ et $\mathcal{I}_S$) la partie symétrique de R (resp. $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}_S$) et P (resp. $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}_S$) sa partie asymétrique.

Supposons qu'il existe $\alpha \in\ ]0, 1[$ tel que $V(p\alpha q) > \alpha V(p) + (1-\alpha)V(q)$. Comme nous avons supposé $p\ P_S\ q$, il découle de l'existence de U que $p\ P_S\ p\alpha q\ P_S\ q$ et donc $V(p) > V(p\alpha q) > V(q)$. Il existe donc $\beta \in\ ]0,1[$ tel que $\beta > \alpha$ et $V(p\alpha q) = \beta V(p) + (1-\beta)V(q)$. D'après les propriétés des rationnels, on sait que l'on peut trouver deux entiers naturels γ et δ tels que $\beta > \gamma/2^{\delta} > \alpha$. On a donc $p(\gamma/2^{\delta})q\ P_S\ p\alpha q$. D'où $V(p(\gamma/2^{\delta})q) = (\gamma/2^{\delta})V(p) + (1-(\gamma/2^{\delta})V(q) > V(p\alpha q) = \beta V(p) + (1-\beta)V(q)$, ce qui est contradictoire car $V(p) > V(q)$ et $\beta > \gamma/2^{\delta}$.
On démontre de même le cas $V(p\alpha q) < \alpha V(p) + (1-\alpha)V(q)$. □

Le théorème 1 montre que, dans le cas où l'on travaille sur $P_S(X)$, on peut obtenir des conditions relativement simples imposant que U et V soient identiques. La condition A1 implique une compatibilité entre la comparaison de différences de préférence et l'évaluation de loteries 50-50. En particulier, si x est l'équivalent certain d'une loterie donnant soit y soit z avec des chances égales, A1 implique que la différence de préférence entre x et y doit être identique à celle existant entre z et x.
Observons que les conditions du théorème 1 font de V une échelle d'intervalle en liaison avec R_S. Dans ce contexte, on peut se demander s'il n'est pas possible d'affaiblir A1 en faisant l'hypothèse au départ que V est une échelle d'intervalle en liaison avec $\mathcal{R}_S$. Il n'en est rien comme le montre la démonstration du théorème 1. Ceci nous amène à rejeter les conclusions du théorème III de Allais (1985) qui implique que, dans un contexte identique au théorème 1, U et V sont toujours identiques lorsque V est une échelle d'intervalle en liaison avec $\mathcal{R}_S$.
Le théorème 1 apporte une réponse à la première question posée au début de cette section. Le théorème suivant répond à notre deuxième interrogation.
Théorème 2. Soit $R_S \subset [P_S(X)]^2$ et $\mathcal{R}_S \subset [P_S(X)]^4$ deux relations binaires liées par la condition (γ'), R_S étant représentable numériquement par une fonction U sur $P_S(X)$ vérifiant (2) et (3). Alors,
[U vérifie (5)]
si et seulement si,
$\forall\ p, q, r, s, p', s' \in P_S(X)$,
A1 : $(p, p1/2q)\ \mathcal{I}_S\ (p1/2q, q)$;
B1 : $\mathcal{R}_S$ est complète et transitive ;
B2 : $(p, q)\ \mathcal{R}_S\ (r, s)$ et $(q, p')\ \mathcal{R}_S\ (s', r) \Rightarrow (p, p')\ \mathcal{R}_S\ (s', s)$.
Démonstration. La nécessité de A1, B1 et B2 est évidente.
Pour établir la suffisance supposons tout d'abord que $(p,q)\ \mathcal{P}_S\ (r,s)$ et $U(p)-U(q) \leq U(r)-U(s)$. On montre aisément :
$U(p)-U(q) \leq U(r)-U(s) \Rightarrow r1/2q\ R_S\ p1/2s \Rightarrow (r1/2q, p1/2s)\ \mathcal{R}_S\ (p1/2s, p1/2s)$.
On démontre facilement, en utilisant B1 et B2, que
$(r1/2q, p1/2s)\ \mathcal{R}_S\ (t, t),\ \forall\ t \in P_S(X)(6)$

A1 $\Rightarrow$ $(p_{1/2}s, s)\ \mathcal{R}_S\ (p, p_{1/2}s)$(7)
[B2, (6) avec $t = p_{1/2}s$, (7)] $\Rightarrow$ $(r_{1/2}q, s)\ \mathcal{R}_S\ (p, p_{1/2}s)$(8)
A1 $\Rightarrow$ $(r, r_{1/2}q)\ \mathcal{R}_S\ (r_{1/2}q, q)$(9)
[B2, (6) avec $t = r_{1/2}q$, (9)] $\Rightarrow$ $(r, p_{1/2}s)\ \mathcal{R}_S\ (r_{1/2}q, q)$(10)
B1 $\Rightarrow$ $(p_{1/2}s, r_{1/2}q)\ \mathcal{R}_S\ (p_{1/2}s, r_{1/2}q)$(11)
[B2, (10), (11)] $\Rightarrow$ $(r, r_{1/2}q)\ \mathcal{R}_S\ (p_{1/2}s, q)$(12)
[B2, (12), (8)] $\Rightarrow$ $(r, s)\ \mathcal{R}_S\ (p, q)$, ce qui est contradictoire puisque $(p, q)\ \mathcal{P}_S\ (r, s)$.
On a donc établi : $(p, q)\ \mathcal{P}_S\ (r, s) \Rightarrow U(p)-U(q) > U(r)-U(s)$.
Supposons maintenant que $U(p)-U(q) > U(r)-U(s)$ et $(r, s)\ \mathcal{R}_S\ (p, q)$. (13)
$U(p)-U(q) > U(r)-U(s) \Rightarrow (p_{1/2}s, r_{1/2}q)\ \mathcal{P}_S\ (t, t),\ \forall\ t \in P_S(X)$ (14)
B1 $\Rightarrow$ $(q, r)\ \mathcal{R}_S\ (q, r)$ (15)
[B2, (13), (15)] $\Rightarrow$ $(q, s)\ \mathcal{R}_S\ (p, r)$ (16)
A1 $\Rightarrow$ $(r_{1/2}q, q)\ \mathcal{R}_S\ (r, r_{1/2}q)$ (17)
[B2, (17), (16)] $\Rightarrow$ $(r_{1/2}q, s)\ \mathcal{R}_S\ (p, r_{1/2}q)$ (18)
A1 $\Rightarrow$ $(p, p_{1/2}s)\ \mathcal{R}_S\ (p_{1/2}s, s)$ (19)
[B2, (19), (14)] $\Rightarrow$ $(p, r_{1/2}q)\ \mathcal{R}_S\ (p_{1/2}s, s)$ (20)
B1 $\Rightarrow$ $(s, p)\ \mathcal{R}_S\ (s, p)$ (21)
[B2, (20), (21)] $\Rightarrow$ $(s, r_{1/2}q)\ \mathcal{R}_S\ (p_{1/2}s, p)$ (22)
[B2, (18), (22)] $\Rightarrow$ $(r_{1/2}q, r_{1/2}q)\ \mathcal{R}_S\ (p_{1/2}s, r_{1/2}q)$, ce qui est contradictoire avec (14).
On a donc montré que $U(p)-U(q) > U(r)-U(s) \Rightarrow (p, q)\ \mathcal{P}_S\ (r, s)$, ce qui achève la démonstration. □

Les conditions B1 et B2 introduites dans le théorème 2 sont classiques. B1 impose à $\mathcal{R}_S$ d'être un préordre complet, ce qui n'est pas surprenant dans ce contexte. B2 est la ‘strong condition on 6-uple’ introduite par Block and Marschak (1960). Bien que B2 soit plus forte que les conditions d'annulation utilisées par Krantz et al. (1971, chap. 4), son interprétation en est similaire.

Notons que, puisque le théorème 2 implique que U mesure les différences de préférence dans $P_S(X)$, le théorème 1 assure que toute fonction mesurant les différences de préférence dans $P_S(X)$ est liée à U par une transformation affine positive.

Sur la base du théorème 2, il est possible d'énoncer des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'il existe une fonction vérifiant (2), (3) et (5), ce qui répond à notre troisième interrogation. Vansnick (1984) donne sans démonstration le théorème suivant :

Théorème 3. Soit $R_S \subset [P_S(X)]^2$ et $\mathcal{R}_S \subset [P_S(X)]^4$ deux relations binaires liées par la condition (γ'). Il existe une fonction W sur $P_S(X)$ vérifiant (2), (3) et (5),

si et seulement si,

$\forall\ p, q, r, s, p', s' \in P_S(X)$

A1 : $(p, p_{1/2}q)\ \mathcal{I}_S\ (p_{1/2}q, q)$;

B1 : $\mathcal{R}_S$ est complète et transitive ;
B2 : $(p, q)\ \mathcal{R}_S\ (r, s)$ et $(q, p')\ \mathcal{R}_S\ (s', r) \Rightarrow (p, p')\ \mathcal{R}_S\ (s', s)$;
C1 : $p\ P_S\ q \Rightarrow p\alpha r\ P_S\ q\alpha r,\ \forall\ \alpha \in\ ]0,1[$;
C2 : $p\ P_S\ q$ et $q\ P_S\ r \Rightarrow \exists\ \alpha, \beta \in\ ]0, 1[$ tels que $p\alpha r\ P_S\ q$ et $q\ P_S\ p\beta r$.
De plus, s'il existe une autre fonction W' vérifiant (2), (3) et (5) alors W' et W sont telles que : $W' = aW + b$ avec $a,b \in$ Re et $a > 0$.

Démonstration. La nécessité est évidente. La suffisance est établie comme suit. Compte tenu de (γ'), il est aisé de montrer que B1 et B2 impliquent que R_S est complète et transitive. Etant donné C1 et C2, on sait, d'après le théorème 8.4 de Fishburn (1970, p. 112), qu'il existe une fonction W sur $P_S(X)$ définie à une transformation affine positive près et vérifiant (2) et (3). Pour achever la démonstration, il suffit de montrer que W vérifie (5), ce qui résulte du théorème 2. □

Les conditions C1 et C2 sont respectivement les axiomes d'indépendance et de continuité classiquement utilisés en théorie de l'utilité espérée. Il est intéressant de noter que, du fait de la richesse de $P_S(X)$, on peut ici obtenir une représentation en termes de différences sans recourir à des conditions "archimédiennes" (cf. Krantz et al. (1971)) difficilement interprétables et à des conditions non nécessaires de solvabilité.

Supposer qu'il est possible de comparer des différences de préférence sur des loteries, comme nous l'avons fait jusqu'à présent, n'est certainement pas réaliste dans beaucoup de situations. Dans la suite de cette section, nous supposerons que l'on dispose d'une relation $\mathcal{R} \subset X^4$, c'est-à-dire que l'on ne compare des différences de préférence qu'entre des conséquences certaines. Rappelons que R_S et $\mathcal{R}$ sont liées par la condition (γ).

Dans ce contexte, il est naturel de reformuler la condition cruciale A1 de la manière suivante :
A2 : $\forall\ x, y, z \in X,\ p_y\ I_S\ p_x 1/2 p_z\ 1/2\ (x, y)\ \mathcal{I}\ (y, z)$.

Cette condition implique que l'‘équidistance’ en termes de loterie 50-50 coïncide avec l'‘équidistance’ en termes de différence de préférence. Elle a été introduite par Roy (1985). Elle est bien sûr nécessaire pour que u et v soient identiques. Elles n'est cependant pas suffisante comme le montre l'exemple suivant.

$X = \{x, y, z, w\}$,
$u(x) = 0$; $u(y) = 0{,}5$; $u(z) = 0{,}6$; $u(w) = 1$;
$v(x) = 0$; $v(y) = 0{,}05$; $v(z) = 0{,}07$; $v(w) = 1$.

Dans cet exemple, la condition A2 est trivialement satisfaite puisqu'elle ne trouve pas à s'appliquer. Cependant, u ne mesure pas les différences de préférence. Observons que, dans cet exemple, la condition

A3 : $\forall\ x, y, z \in X$,
$p_y\ R_S\ p_x 1/2 p_z\ 1/2\ (y, x)\ \mathcal{R}\ (z, y)$,
$p_x 1/2 p_z\ R_S\ p_y\ 1/2\ (x, y)\ \mathcal{R}\ (y, z)$,

est également satisfaite et n'est donc pas suffisante pour que u mesure les différences de préférence.

En fait, on vérifie facilement qu'une condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction d'utilité de vN-M mesure les différences de préférence est que :

A4 : $\forall$ x, y, z, w $\in$ X, $p_x 1/2 p_w$ R_S $p_y 1/2 p_z$ 1/2 (x, y) $\mathcal{R}$ (z, w)

Notons cependant que, s'il existe une fonction v mesurant les différences de préférence, cette condition n'implique pas que les fonctions u et v soient liées par une transformation affine positive près comme le montre l'exemple suivant :

X = {x, y, z},

u(x) = 0 ; u(y) = 1 ; u(z) = 3 ; v(x) = 0 ; v(y) = 1 ; v(z) = 4.

Ceci est dû au fait qu'une fonction de valeur mesurant les différences de préférence n'est pas, en général, définie à une transformation affine positive près.

En vertu de ce qui précède, les résultats suivants, qui répondent à nos trois premières interrogations, sont immédiats :

- A4 est une condition nécessaire et suffisante pour que u et v soient identiques lorsque, en raison de la structure de X, v est définie à une transformation affine positive près ;
- A4 est une condition nécessaire et suffisante pour que u vérifie (4), c'est-à-dire, mesure les différences de préférence ;
- il existe une fonction vérifiant (1) et (4) si et seulement si R_S est un préordre complet, A4, C1, C2.

On notera que la condition A4 est beaucoup plus lourde que la condition A1 utilisée dans les théorèmes 1 à 3. Il suffit cependant d'imposer à X de vérifier certaines conditions structurelles simples pour retrouver des résultats semblables. Par souci de simplicité, nous utiliserons la condition :

CS : $\forall$ p $\in$ $P_S(X)$, $\exists$ x $\in$ X tel que p I_S p_x.

Cette condition impose à toute loterie d'avoir un équivalent certain. Elle nous semble fort peu restrictive dès lors que l'on travaille sur un ensemble de conséquences monétaires. On peut montrer que cette condition est équivalente à imposer que l'image de X par u soit un intervalle. Son utilité technique est immédiate puisqu'elle permet de ‘transférer’ $\mathcal{R}$ sur $P_S(X)$ et ainsi de se ramener dans les conditions des théorèmes 1-3. On a alors :

Théorème 4. Soit $R_S \subset [P_S(X)]^2$ et $\mathcal{R} \subset X^4$ deux relations binaires liées par la condition (γ), R_S étant représentable numériquement par une fonction u sur X vérifiant (1) et $\mathcal{R}$ par une fonction v sur X vérifiant (4). Dès lors que CS est satisfaite,

[u $\equiv$ v]

si et seulement si,

A5 : $\forall$ x, y, z $\in$ X, p_y I_S $p_x 1/2 p_z$ $\Rightarrow$ (x, y) / (y, z).

Démonstration. La nécessité de A5 est évidente. Pour montrer la suffisance, définissons une relation binaire $\underline{\mathcal{R}}_S \subset [P_S(X)]^4$ en posant :

(p, q) $\underline{\mathcal{R}}_S$ (r, s) $\Leftrightarrow$

[$\exists$ x, y, z, w $\in$ X tels que $p_x\ I_S\ p$, $p_y\ I_S\ q$, $p_z\ I_S\ r$, $p_w\ I_S\ s$ et $(x, y)\ \mathcal{R}\ (z, w)$].
La relation ainsi définie vérifie :
$\forall$ p, q $\in$ $P_S(X)$, $p\ R_S\ q$ 1/2 $(p,q)\ \underline{\mathcal{R}}_S\ (q,q)$.
En effet, supposons que $p\ R_S\ q$. CS $\Rightarrow \exists$ x, y $\in$ X tels que $p_x\ I_S\ p$ et $p_y\ I_S\ q$. L'existence de u implique alors $p_x\ R_S\ p_y$. On a donc $(p, q)\ \underline{\mathcal{R}}_S\ (q, q)$ d'après (γ) et la définition de $\underline{\mathcal{R}}_S$.
Supposons maintenant que $(p, q)\ \underline{\mathcal{R}}_S\ (q, q)$. Par définition, il existe x, y $\in$ X tels que $p\ I_S\ p_x$, $q\ I_S\ p_y$, $(x,y)\ \mathcal{R}\ (y,y)$. Il découle de ($\gamma$) que $p_x\ R_S\ p_y$. En vertu de l'existence de u, on a alors $p\ R_S\ q$.
Montrons que $\forall$ p, q $\in$ $P_S(X)$, $(p, p1/2q)\ \underline{\mathcal{I}}_S\ (p1/2q, q)$, $\underline{\mathcal{I}}_S$ désignant la partie symétrique de $\underline{\mathcal{R}}_S$. CS $\Rightarrow \exists$ x, y, z $\in$ X tels que $p_x\ I_S\ p$, $p_y\ I_S\ q$ et $p_z\ I_S\ (p1/2q)$. L'existence de u implique que $p_z\ I_S\ (p_x 1/2 p_y)$. On a, par A5, $(x, z)\ \mathcal{I}\ (z, y)$ et donc $(p, p1/2q)\ \underline{\mathcal{I}}_S\ (p1/2q, q)$ par définition.
De l'existence de u, on tire l'existence d'une fonction U sur $P_S(X)$ vérifiant (2) et (3). On pose $\forall$ p $\in$ $P_S(X)$, V(p) = v(x) dès lors que $p_x\ I_S\ p$. Du fait de (γ) et de l'existence de u, la fonction V est bien définie. Il est facile de montrer que V mesure les différences de préférence définies par $\underline{\mathcal{R}}_S$.
D'après le théorème 1, U et V sont identiques. D'après la définition de U et V, il en va de même pour u et v. □

Notons que la condition structurelle CS permet de n'imposer, dans le théorème 4, que A5 qui est une version affaiblie de A2.
En utilisant toujours la condition CS, on peut obtenir un théorème analogue au théorème 2 et répondant à notre deuxième interrogation dans ce cadre. On a :
Théorème 5. Soit $R_S \subset [P_S(X)]^2$ et $\mathcal{R} \subset X^4$ deux relations binaires liées par la condition (γ), R_S étant représentable numériquement par une fonction u sur X vérifiant (1). Dès lors que la condition CS est satisfaite,
[u vérifie (4)]
si et seulement si,
$\forall$ x, x', y, z, w, w' $\in$ X :
A5 : $p_y\ I_S\ p_x 1/2 p_z \Rightarrow (x, y)\ \mathcal{I}\ (y, z)$;
B1' : $\mathcal{R}$ est complète et transitive
B2' : $(x, y)\ \mathcal{R}\ (z, w)$ et $(y, x')\ \mathcal{R}\ (w', z) \Rightarrow (x, x')\ \mathcal{R}\ (w', w)$.
Démonstration. La nécessité est évidente.
Pour montrer la suffisance, on définit une relation $\underline{\mathcal{R}}_S$ de manière identique à ce qui est fait dans la démonstration du théorème 4. On montre de même que $\underline{\mathcal{R}}_S$ vérifie :
$\forall$ p, q $\in$ $P_S(X)$, [$p\ R_S\ q$ 1/2 $(p, q)\ \underline{\mathcal{R}}_S\ (q, q)$] et $(p, p1/2q)\ \underline{\mathcal{I}}_S\ (p1/2q, q)$.

On montre facilement que $\underline{R}_S$ vérifie B1 et B2. Il résulte alors du théorème 2 que U, définie sur la base de u, représente les différences de préférence selon $\underline{R}_S$. Du fait de la définition de $\underline{R}_S$, il en découle alors que u vérifie (4), ce qui achève la démonstration. □

Les conditions B1' et B2' sont une reformulation, dans ce cadre, des conditions B1 et B2 introduites au théorème 2. En vue d'obtenir l'analogue du théorème 3, il est tentant d'ajouter aux conditions du théorème 5 les conditions C1 et C2 du théorème 3. Il est cependant facile de vérifier qu'il est impossible de déduire de CS, A5 (ou même A2 ou A3), B1', B2', C1 et C2 que R_S est complète et transitive, condition qu'il faut inclure pour retrouver l'analogue du théorème 3 dans ce cadre.

Nous nous sommes intéressés jusqu'à présent à des conditions entraînant que u et v coïncident, la transformation $u = \beta[v]$ étant alors affine positive. Il peut être intéressant d'envisager d'autres formes pour β (cf. Dyer et Sarin (1982)).

Lorsqu'on cherche à estimer une fonction d'utilité de vN-M pour des sommes monétaires, il est fréquent, à la suite de Pratt (1964), de faire l'hypothèse simplificatrice suivante. Si l'on considère une loterie $p \in P_S(X)$ ayant pour équivalent certain x, et si l'on rajoute à toutes les ‘branches’ de la loterie une somme δ, alors l'équivalent certain de la nouvelle loterie est $x + \delta$. Cette hypothèse n'est pas impliquée par les axiomes garantissant l'existence de u. Elle semble néanmoins raisonnable, du moins tant que δ reste ‘petit’ en valeur absolue. Si l'on est indifférent entre recevoir 350 avec certitude et 1 000 avec une chance sur deux, il est naturel de penser que l'on sera indifférent entre recevoir 400 et jouer à une loterie où l'on a une chance sur deux de gagner soit 1 050, soit 50. Dès lors que δ devient ‘grand’, l'hypothèse paraît cependant contestable. Elle semble plus raisonnable si les augmentations δ sont faites non pas en ‘argent’ mais en ‘valeur psychologique’. C'est précisément une telle condition qui a été introduite (indépendamment selon toute vraisemblance) par Allais (1979) sous le nom d'axiome ‘d'isovariation cardinale’ et par Bell (1981). Allais (1979) prétend que cette hypothèse implique que u et v coïncident (lorsque ces fonctions existent). Bell (1981), tout en renvoyant à un document non publié, mentionne que cette condition donne à la transformation $u = \beta[v]$ une forme soit affine positive, soit exponentielle. Nous donnons ici une démonstration simple des implications de cette condition. Cette démonstration fait appel à des résultats classiques et ne saurait être considérée comme originale. Cependant, à notre connaissance, elle n'a jamais été publiée auparavant.

On supposera dans ce qui suit que X = Re , que u et v ont de ‘bonnes’ propriétés, en particulier, qu'elles sont strictement croissantes et deux fois continûment dérivables, imposant à la transformation β d'être strictement croissante et deux fois continûment dérivable.

Proposition. Soit u une fonction d'utilité de vN-M et v une fonction mesurant les différences de préférence sur la droite réelle.

La fonction β telle que, $\forall\ x \in$ Re, $u(x) = \beta[v(x)]$ est de l'un des types :

$\beta(y) = a\ y + b$ avec $a > 0$,

$\beta(y) = -a\ \exp(-\gamma y) + b$ avec $a > 0$ et $\gamma > 0$,

$\beta(y) = a\ \exp(\gamma y) + b$ avec $a > 0$ et $\gamma < 0$

si et seulement si $\forall$ x, y, z, r, s, t $\in$ Re et $\forall\ \alpha \in [0, 1]$

IC : $[v(x)-v(r) = v(y)-v(s) = v(z)-v(t),\ p_x \alpha p_y\ I_S\ p_z] \Rightarrow p_r \alpha p_s\ I_S\ p_t$.

Démonstration. La nécessité de IC se vérifie aisément.

La fonction v étant strictement croissante, l'application τ de Ps(Re) dans Ps(v(Re)), associant à chaque mesure de probabilité sur Re une mesure de probabilité sur v(Re), définie par :

$\forall\ p \in P_S(X),\ \forall\ x \in$ Re , $t(p)(v(x)) = p(x)$,

est une bijection. On peut dès lors définir une relation $\underline{\ell}_S \subset [P_S(v(Re))]2$ en posant :

$\forall$ p, q $\in P_S(X)$, $\tau(p)\ \underline{\ell}_S\ \tau(q)$ 1/2 p R_S q.

Il est aisé de montrer que la fonction β telle que, $\forall\ x \in$ Re, $u(x) = \beta[v(x)]$, est une fonction d'utilité de vN-M pour $\underline{\ell}_S$.

La condition IC implique que $\forall$ x, y, z $\in$ Re, $\forall\ \alpha \in [0, 1]$ et $\forall\ \lambda \in$ Re tel que $v(x)+\lambda$, $v(y)+\lambda$, $v(z)+\lambda \in v(Re)$:

$p_{v(x)}\ \alpha\ p_{v(y)}\ \ell_s\ p_{v(z)} \Rightarrow p_{v(x)+\lambda}\ \alpha\ p_{v(y)+\lambda}\ \ell_s\ p_{v(z)+\lambda}$

ℓ_S étant la partie symétrique de $\underline{\ell}_S$.

Compte tenu des propriétés de β, la proposition découle alors simplement des propositions (23)-(25) et du théorème 2 de Pratt (1964). □

Il résulte de la proposition précédente que IC impose à la fonction $r(x) = -\beta''(x)/\beta'(x)$ d'être constante. Comme l'ont fait observer Dyer et Sarin (1982) et Krzysztofowicz (1983), on peut transposer tous les résultats classiques bien connus en théorie de l'utilité espérée à l'étude de ce coefficient que l'on peut interpréter comme une mesure de l'aversion "pure" vis-à-vis du risque, c'est-à-dire, de l'aversion pour le risque existant indépendamment des phénomènes liés à la valorisation des conséquences dans le certain. Dyer et Sarin (1982) présentent divers résultats montrant les liens existant entre r(x), -u''(x)/u'(x) et -v''(x)/v'(x).

V. Discussion.

Sur un plan théorique, les résultats de la section précédente montrent clairement que, dans le cas général, une fonction d'utilité de vN-M et une fonction de valeur mesurant les différences de préférence ne sont pas identiques. Elles ne le deviennent que moyennant des hypothèses (A1, A2 ou A5) revenant à assimiler l'‘équidistance’ en termes de différences de préférence à l'‘équidistance’ en termes de loteries 50-50. Comme l'ont fait observer de nombreux auteurs (voir par exemple Fishburn (1970, p.82)), ceci n'est pas surprenant dans la mesure où ces deux fonctions sont la représentation numérique de relations différentes.

Au niveau expérimental, de nombreuses études ont été menées pour comparer u et v (cf. Fischer (1977), Sarin et al. (1980), Krzysztofowicz (1983), McCord et de Neufville (1983) et les résultats partiels tirés du célèbre questionnaire de 1952 publiés dans Allais (1979)). Ces études reposent sur une comparaison des fonctions u et v déterminées expérimentalement pour un ensemble d'individus.
Les techniques à mettre en oeuvre pour estimer en pratique la fonction u sont classiques (cf. Keeney et Raiffa (1976)). Considérons, à titre d'exemple, trois conséquences x, y, z telles que $p_y\ R_S\ p_x\ R_S\ p_z$ et une loterie donnant la conséquence y avec la probabilité α et z avec la probabilité $1-\alpha$. On sait que l'on peut poser u(y) = 1 et u(z) = 0, la fonction u étant définie à une transformation affine positive près. Dès lors, selon la façon dont x se compare à la loterie, on en déduira la position de u(x) par rapport à α. Pour donner une valeur précise à u(x), on peut chercher à obtenir l'indifférence en faisant varier soit x, soit α. Il est alors possible d'itérer cette procédure en remplaçant, dans la loterie de départ, y ou z par x. On obtient ainsi autant de points que l'on désire pour estimer u.
Pour ce qui concerne la détermination de v, notons que l'on peut donner divers contenus sémantiques à la proposition $(x, y)\ \mathcal{R}\ (z, w)$: ‘la différence de préférence entre x et y est plus grande que celle existant entre z et w’, ‘le gain psychologique qu'il y a à passer de y à x est plus grand que celui qu'il y a à passer de w à z’, etc. Comme de nombreux auteurs l'ont fait remarquer (cf. par exemple Fishburn (1970, chap. 6), il est bien difficile de donner un contenu opérationnel clair à cette notion de différence de préférence. Diverses techniques d'estimation de v ont néanmoins été proposées dans la littérature et utilisées pour déterminer expérimentalement v ; chacune d'entre elles repose sur une certaine façon d'extérioriser une introspection concernant les différences de préférence.
Parmi elles, mentionnons :

- les techniques de ‘Direct Rating’ où l'on donne aux conséquences des notes supposées refléter les différences de préférence (cf. Fishburn (1967)),
- les techniques de ‘bissection’ d'un intervalle où l'on recherche une conséquence à mi-parcours, en termes de ‘valeur psychologique’, des extrémités d'un certain intervalle (cf. Allais (1979)),
- les techniques fondées sur une fiction de ‘mondes parallèles’ (cf. Camacho (1982), Wakker (1986) et Vansnick (1984), (1986)),
- les techniques d'‘échanges’ où l'on introduit une conséquence extérieure au problème pour ‘calibrer’ les différences de préférence (cf. McCord et de Neufville (1983)).

La plupart des études visant à comparer u et v montrent qu'il existe en général de grandes différences pour un même individu entre sa fonction d'utilité de vN-M et sa fonction de valeur mesurant les différences de préférence (voir cependant Tversky (1967)). De plus, lorsqu'on amène les sujets à s'interroger sur cette différence, ils l'expliquent par l'existence d'éléments spécifiques à la situation de risque (voir en particulier McCord et de Neufville (1983) et Sarin et al. (1980)). A notre connaissance, seule l'étude de Krzysztofowicz (1983), qui reprend d'ailleurs certaines données de Sarin et al. (1980) et Allais (1979), permet de juger de la pertinence de la condition IC. Elle montre que, dans bien des cas, il est possible de lier u et v par une transformation de type exponentiel.

A première vue, on pourrait conclure de ces études que les conditions A1 et A5 sont excessivement restrictives par rapport à IC. L'interprétation de ces résultats expérimentaux soulève cependant de nombreuses difficultés. En effet, le fait que u et v ne coïncident pas peut être interprété de façon toute différente. On sait, par exemple, que la forme de la fonction u peut fortement dépendre du type et de la séquence des questions posées (cf. par exemple Allais (1979), McCord et de Neufville (1983) et la bibliographie de Bouyssou (1984)) et il est légitime de se demander si un même phénomène ne serait pas susceptible de se produire concernant la fonction v dont on a vu que l'estimation soulevait, a priori, encore plus de difficultés que celle de u (à notre connaissance, aucune étude n'a encore tenté de tester une telle influence de la méthode d'estimation sur la forme de v). Dès lors, on peut s'interroger sur la validité des comparaisons expérimentales effectuées entre u et v. Par exemple, McCord et de Neufville (1983) notent que les différences existant entre u et v sont du même ordre de grandeur que celles existant entre deux fonctions u estimées suivant des protocoles différents. Il nous semble donc difficile de conclure sur le point du réalisme descriptif de A1 et A5 de façon définitive au vu de ces expériences. La détermination expérimentale de u et de v nous semble davantage relever de la ‘construction’ d'un système de préférences que d'une simple description d'un système de préférences pré-existant.

Les problèmes que nous venons de mentionner n'empêchent cependant pas de faire usage, dans une étude d'aide à la décision, de techniques reposant sur l'établissement de u et v. De nombreuses méthodes multicritères y font appel. Dans ce cadre, ces fonctions deviennent alors des outils de structuration d'un système de préférences. Elles ne sont plus utilisées pour décrire des préférences mais comme des règles permettant de comparer de manière systématique un ensemble d'actions. Dans cette optique, il devient légitime de chercher à déterminer u ou v, même si leur détermination est dépendante de la technique de questionnement utilisée, pour autant que le décideur soit en accord avec les principes sous-tendant l'existence de ces fonctions.

Les arguments en faveur de l'utilisation de la théorie de l'utilité espérée en matière d'aide à la décision sont classiques (cf. Keeney et Raiffa (1976)). La notion de fonction de valeur mesurant les différences de préférence a donné lieu à davantage de controverses. Machina (1981) fait par exemple remarquer qu'il répondrait à la question (cf. Allais (1953b, question 632)) : ‘Préféreriez-vous plus intensément un héritage de 400 millions à un héritage de 200 millions qu'un héritage de 300 millions à un héritage de 100 millions’, en demandant ce qu'elle signifie (sur ce point, on pourra consulter les commentaires d'Allais (1979) concernant les réponses et les non-réponses à son questionnaire de 1952). Il est cependant difficile de contester que, dans bien des cas, notre perception va au delà d'une simple perception ordinale même si les arguments ‘normatifs’ en faveur de l'utilisation de v se heurtent aux problèmes de l'interprétation opérationnelle de la relation $\mathcal{R}$.

Considérons néanmoins un individu dont l'introspection en matière de différences de préférence est suffisamment fine pour que l'on puisse admettre qu'elle peut être structurée en utilisant une fonction v. Supposons de plus que cet individu admette comme guide de rationalité les axiomes de la théorie de l'utilité espérée, convaincu par les arguments classiques en faveur de la transitivité, la complétude et l'axiome d'indépendance. Quels sont les arguments que pourrait alors avancer un tel individu pour justifier le fait que ses fonctions u et v ne coïncident pas ? Il est probable qu'il fera observer que la situation de risque présente un certain nombre de traits spécifiques : problèmes liés à la mauvaise perception des probabilités, existence d'un (dé)plaisir lié au fait même de subir un risque, problèmes liés aux ‘regrets’ ou à la ‘déception’ que l'on peut encourir, etc. On est cependant forcé de constater que les analyses ayant jusqu'à présent été faites de ces phénomènes (cf. par exemple, Bell (1982), (1985), Loomes et Sugden (1982)) conduisent toutes à des modèles qui ne sont pas compatibles avec une interprétation stricte des axiomes de la théorie de l'utilité espérée. Si de tels éléments spécifiques à la situation de risque et compatibles avec les axiomes de la théorie de l'utilité espérée sont à l'oeuvre, force est de constater qu'ils n'ont jamais été présentés et analysés clairement. Dans cette optique, les conditions A1 et A5 nous semblent imposer des exigences de ‘rationalité’ qui ne vont guère au-delà de ce qui est supposé par les axiomes de la théorie de l'utilité espérée (sur ce point, voir également Bell (1981)). Notons de plus que ce raisonnement garde sa valeur dès lors que l'on suppose que cet individu accepte d'effectuer quelques comparaisons en termes de différence de préférence. Pour lui retirer sa pertinence, il faut nier toute valeur au concept de différence de préférence, ce qui nous semble difficilement admissible.

Faisons observer en conclusion de cette discussion que, en matière d'aide à la décision, il n'est pas illégitime de vouloir structurer des préférences en considérant que u et v coïncident (cf. aussi Dyer et Sarin (1982) et Krzysztofowicz (1983)). On peut alors élargir sensiblement l'éventail des techniques disponibles pour déterminer u et v en choisissant la méthode de questionnement la plus facilement admise et comprise, en général, ‘direct rating’ ou méthode de la conséquence variable avec des loteries 50-50. De plus, l'interprétation des calculs faits à l'aide de u en sera grandement facilitée.

REFERENCES

ALLAIS, M. Fondements d'une théorie positive des choix comportant un risque et critiques des postulats et axiomes de l'école américaine. In : *Econométrie,* Paris 12-17 mai 1952, Colloques Internationaux du C.N.R.S., 1953a. Pp 257-332.

ALLAIS, M. La psychologie de l'homme rationnel devant le risque, la théorie et l'expérience. *Journal de la Société Statistique de Paris*, 1953b, janvier-mars, 47-73.

ALLAIS, M. The so-called Allais paradox and rational decisions under uncertainty. In M. Allais and O. Hagen (Eds.), *Expected utility hypotheses and the Allais paradox*. Dordrecht : Reidel, 1979. Pp 437-681.

ALLAIS, M. *Three theorems on the theory of cardinal utility and random choice*, Working paper, C-4337, 1985.

ALLAIS, M. Determination of cardinal utility according to an intrinsic invariant model. In L. Daboni (Eds.), *Recent Developments in the Foundations of Utility and Risk Theory*. Dordrecht : Reidel, 1986. Pp 83-120.

ALLAIS, M. The general theory of random choices in relation to the invariant cardinal utility function and the specific probability function. The (U, q) model, a general overview, In B. Munier (Ed.), *Risk, Decision and Rationality*. Dordrecht : Reidel, 1988.
BARON, F.H., von WINTERFELD, D. and FISCHER G.W. Empirical and theoretical relationships between value and utility functions. *Acta Psychologica*, 1984, 56, 233-244.
BAUMOL, W.J. The Neumann-Morgenstern utility index - An ordinalist view. *Journal of Political economy*, 1951, 59, 1-14.
BELL, D.E. Components of risk aversion. In J.P. Brans (Ed.), *O.R.'81*. Amsterdam : North Holland, 1981, Pp 371-378.
BELL, D.E. Regret in decision making under uncertainty. *Operations Research*, 1982, 30, 961-981.
BELL, D.E. Disappointment in decision making under uncertainty. *Operations Research*, 1985, 33, 1-27.
BLOCK, H.D. and MARSCHAK, J. Random orderings and stochastic theories of responses. In I. Olkin, S.G. Ghurye, W. Hoeffding, W.G. Madow and H.B. Mann (Eds), *Contibutions to Probability and Statistics*. Stanford University Press, 1960. Pp 97-132.
BOUYSSOU, D. Expected utility theory and decision-aid : a critical survey. In O. Hagen and F. Wensto/p (Eds.), *Progress in utility and risk theory*. Dordrecht : Reidel, 1984. Pp 181-216.
BOUYSSOU, D. et VANSNICK, J.C. A note on the relationships between utility and value functions. In B. Munier (Ed.), *Risk, Decision and Rationality*. Dordrecht : Reidel, 1988. Pp 103-114.
CAMACHO, A. *Societies and social decision functions : a model with focus on the information problem*. Dordrecht : Reidel, 1982.
DEBREU, G. Topological methods in cardinal utility. In K.J. Arrow, S. Karlin and P. Suppes (Eds.), *Mathematical methods in the social sciences*. Stanford University Press, 1960. Pp 16-26.
DYER, J.S and SARIN, R.K. Measurable multiattribute value functions. *Operations Research*, 1979, 27, 810-822.
DYER, J.S and SARIN, R.K. Relative risk aversion, *Management Science*, 1982, 28, 875-886.
de FINETTI, B. A short confirmation of my standpoint. In M. Allais and O. Hagen (Eds.), *Expected utility hypotheses and the Allais paradox*. Dordrecht : Reidel, 1979.
FISCHER, G.W. Multidimensional utility models for risky and riskless choice. *Organizational Behaviour and Human Performance*, 1977, 17, 127-146.
FISHBURN, P.C. Methods of estimating additive utilities, *Management Science*, 1967, 13, 435-453.
FISHBURN, P.C. *Utility theory for decision making*. New-York : Wiley, 1970.
FISHBURN, P.C. Cardinal utility : an interpretative essay. *Revista Internationale di Scienze Economiche e Commerciali*, 1976, 13, 1102-1114.
FRIEDMAN, M et SAVAGE, L.J. The utility analysis of choices involving risk. *Journal of Political Economy*, 1948, 56, 279-304.
KEENEY, R.L. et RAIFFA, H. *Decisions with multiple objectives, Preferences and value tradeoffs*. New-York : Wiley, 1976.
KRANTZ, D.H., LUCE, R.D., SUPPES, P. and TVERSKY, A. *Foundations of measurement, Vol I*. New-York : Academic Press, 1971.
KRZYSZTOFOWICZ, R. Strength of preference and risk attitude in utility measurement. *Organizational Behaviour and Human Performance*, 1983, 31, 88-113.
LOOMES, G. and SUGDEN, R. Regret theory : an alternative theory of rational choice under uncertainty. *Economic Journal*, 1982, 92, 805-824.
LUCE, R.D. and RAIFFA, H. *Games and Decisions*. New-York : Wiley, 1957.
McCORD, M. and de NEUFVILLE, R. Fundamental deficiency of expected utility analysis. In French, S., Hartley, R., Thomas, L.C., and White, D.J. (Eds) *Multiobjective decision-Making*. London : Academic Press, 1983. Pp 279-305.
MACHINA, M.J. ‘Rational’ decision-making vs ‘rational’ decision modelling. *Journal of Mathematical Psychology*, 1981, 24, 163-175.
von NEUMANN, J. et MORGENSTERN, O. *Theory of games and economic behaviour*, 2e édition. Princeton : Princeton University Press, 1947.
PRATT, J.W. Risk aversion in the small and in the large. *Econometrica*, 1964, 32, 122-136.
ROBERTS, F.S. *Measurement theory with applications to decisionmaking, utility and the social sciences*, Reading : Addison-Wesley, 1979.
ROY, B. *Méthodologie multicritère d'aide à la décision*. Paris : Economica, 1985.
SARIN, R.K. Strength of preference and risky choice. *Operations Research*, 1982, 30, 982-997.
SARIN, R.K., DYER, J.S. and NARe, K. *A comparative evaluation of three approaches for preference function assessment*. Working Paper presented at the joint national meeting ORSA/TIMS Washington D.C., May 4-7, 1980.

SAVAGE, L.J. *The foundations of statistics*. New-York : Wiley, 1954.
SCOTT, D. and SUPPES, P. Foundational aspects of theories of measurement. *Journal of Symbolic Logic*, 1958, 23, 113-128.
STIGLER, G.J. The development of utility theory. *Journal of Political Economy*, 1950, 58, 307-327 et 373-396.
TVERSKY, A. Additivity, utility and subjective probability. *Journal of Mathematical Psychology*, 1967, 4, 175-201.
VANSNICK, J.C. Strength of preference, theoretical and practical aspects. In J.P. Brans (Ed.), *O.R.'84*, Amsterdam : North Holland, 1984. Pp 449-463.
VANSNICK, J.C. Intensity of preference. In Y. Sawaragi, K. Inoue et H. Nakayama (Eds.), *Towards Interactive and intelligent decision support systems*, Vol. 2, Berlin : Springer-Verlag, 1987. Pp 220-229.
WAKKER, P. The repetitions approach to characterize cardinal utility, *Theory and Decision*, 1986, 20, 33-40.
YAARI, M.E. The dual theory of choice under risk, *Econometrica*, 1987, 55, 95-115.