

– Des recherches récentes sur l'obtention du ou des préordres les plus proches d'une relation donnée¹.

L'ensemble de ces travaux permet de mesurer la difficulté qu'il peut y avoir à concevoir de bonnes procédures de rangement². On trouvera dans Perry (1992, ch. 5) des propositions pour bâtir plusieurs procédures qui semblent réaliser un bon compromis entre simplicité et exigences théoriques.

¹ Voir entre autres Barthélémy et al. (1989), Hudry (1989), Barthélémy et Monjardet (1988).

² Ces difficultés, ainsi que leurs liens avec certains aspects de la théorie du choix social, sont abondamment développées et illustrées par Perry (1992).

Chapitre 7

APPROCHE DU JUGEMENT LOCAL INTERACTIF

RÉSUMÉ

L'objet de ce chapitre est de présenter un certain nombre de méthodes se rattachant à l'approche opérationnelle du "jugement local interactif avec itérations essais-erreurs". Contrairement aux méthodes présentées aux chapitres 4 et 5, celles-ci ne font pas explicitement usage de PAMC. L'élaboration de la recommandation s'opère dans ces méthodes au cours d'un dialogue entre un interrogé et un interrogateur régi par un protocole d'interaction. Ce dialogue peut s'analyser comme la succession d'étapes de dialogue où l'interrogé réagit à une proposition qui lui est faite et d'étapes de calcul où l'interrogateur tire parti de ces réactions.

Au 7.1, après avoir montré l'originalité de cette approche opérationnelle, on s'interroge sur le sens et la validité du produit final de l'interaction entre l'interrogé et l'interrogateur. On montre que, dans le cadre de cette approche, la convergence des méthodes doit s'analyser non comme une "convergence algorithmique" mais comme une "convergence psychologique". La portée et les limites d'une telle approche sont ensuite analysées.

La section 7.2 propose une structure générale des méthodes interactives. On montre pourquoi elles relèvent pour la plupart d'une problématique de choix (P.α). Un schéma général des méthodes en P.α est ensuite présenté qui nous a conduit à analyser en détail le contenu des étapes de dialogue et de calcul. Les concepts présentés sont illustrés par une méthode interactive élémentaire.

La section 7.3 présente en détail quatre méthodes interactives en P.α que nous croyons représentatives de l'ensemble de celles proposées à ce jour : STEM, méthode de Geoffrion-Dyer-Feinberg, méthode du point de mire évolutif et méthode de Vanderpooten. Chacune de ces méthodes est présentée dans un même formalisme comme la succession d'étapes de dialogue et d'étapes de calcul. D'autres méthodes sont ensuite présentées plus brièvement.

La courte section 7.4 est consacrée aux méthodes interactives relevant de la problématique du tri (P.β) et de la problématique du rangement (P.γ). On y

présente principalement la méthode PREFCALC qui relève de P.y où l'interaction porte sur une procédure de rangement prenant la forme d'une fonction d'utilité additive linéaire par morceaux.

7.1 GÉNÉRALITÉS

7.1.1 Approche classique et approche interactive

On a présenté, aux chapitres 4 et 5, un certain nombre de PAMC s'intégrant dans des méthodes relevant des Approches Opérationnelles 1 et 2 (cf. 1.7). Dans l'une ou l'autre de ces Approches Opérationnelles, l'homme d'étude est amené à élaborer sa recommandation sur la base d'un ou de plusieurs s.r.p. obtenus par application d'une PAMC (cf. chapitre 6). C'est ce que nous appellerons l'**approche classique** de l'aide multicritère à la décision, visant à apporter une réponse synthétique exhaustive et définitive au problème de l'agrégation des performances (cf. figure 7.1.1). Le processus qui conduit à l'élaboration d'une re-

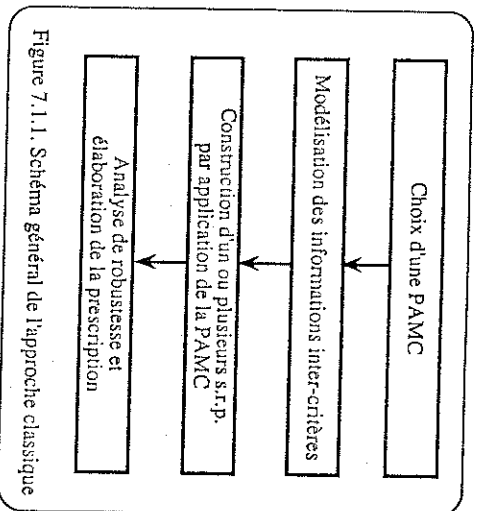


Figure 7.1.1. Schéma général de l'approche classique

commandation en utilisant une méthode se rattachant à l'Approche Opérationnelle 3 du "jugement local interactif avec itérations essais-erreurs" ou, de façon plus concise, l'**approche interactive** est tout différent. Cette élaboration ne passe pas ici par l'utilisation d'une PAMC mais s'opère progressivement au cours d'un

dialogue au cours duquel un acteur (éventuellement plusieurs) du processus de décision, que nous appellerons, dans ce chapitre, l'**interrogé**, est amené à formuler une séquence de jugements ad hoc en réponse aux questions posées par un **interrogateur** pouvant être soit l'homme d'étude, soit, le plus souvent, un ordinateur. Dans ce dialogue, les jugements émis par l'interrogé contribuent à fixer le contenu et l'enchaînement des questions posées par l'interrogateur. La recommandation apparaît alors comme le produit d'une **interaction** entre ces deux acteurs. L'interrogateur n'établit donc pas une liste de questions pré-établies qu'il posera à l'interrogé. Avant le dialogue, il doit chercher à anticiper les diverses réactions possibles de l'interrogé et prévoir, dans chaque cas, comment poursuivre ce dialogue au mieux. L'interrogateur est donc amené à établir une stratégie fixant le contenu et le mode d'enchaînement des questions en fonction des réactions de l'interrogé. C'est ce qu'on appellera un **protocole d'interaction** (cf. figure 7.1.2). Celui-ci est propre à chaque méthode. Il constitue en quelque sorte une "règle du jeu" précisant un ensemble de "coups" possibles à un moment donné compte-tenu de l'historique de la "partie".

Précisons dès maintenant que tout dialogue régi par un protocole d'interaction ne débouche pas nécessairement sur une aide à la décision. Pour qu'il en soit ainsi, il est nécessaire que l'interrogé découvre les réponses aux questions qu'il se posait, aidé et guidé par l'interrogateur. On verra, dans la suite de ce chapitre, comment certaines méthodes se proposent d'atteindre cet objectif. Il est cependant clair qu'une condition nécessaire de succès d'une méthode interactive réside dans la volonté de l'interrogé de s'engager dans un dialogue pouvant parfois être long et difficile. C'est pourquoi la plupart des protocoles d'interaction visent à établir le dialogue autour de **propositions** faites à l'interrogé dont on espère qu'elles ont pour lui une signification concrète claire.

Pour faciliter le dialogue, il semble important que le protocole d'interaction centré autour de ces propositions travaille, dans la mesure du possible, de façon :

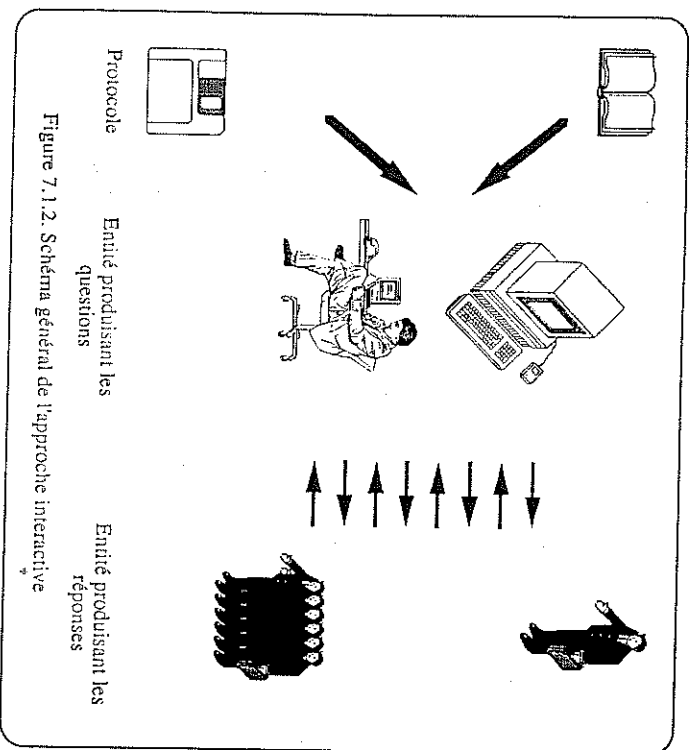


Figure 7.1.2. Schéma général de l'approche interactive

- **provisoire** en laissant à l'interrogé la possibilité de changer d'avis et de revenir sur des opinions précédemment émises ;
- **locale** en lui permettant de concentrer son attention sur un petit nombre d'actions qu'il paraît judicieux et pertinent de chercher à comparer parce qu'elles sont voisines.

On peut analyser plus finement le dialogue entre l'interrogé et l'interrogateur comme la succession de deux types d'étapes (cf. figure 7.1.3) :

- une **étape de dialogue** où l'interrogé réagit face à une proposition ;
- une **étape de calcul** (ou de traitement) où l'interrogateur tire parti des réactions de l'interrogé pour lui faire une nouvelle proposition.

Il est commode de distinguer, à l'intérieur de l'étape de dialogue :

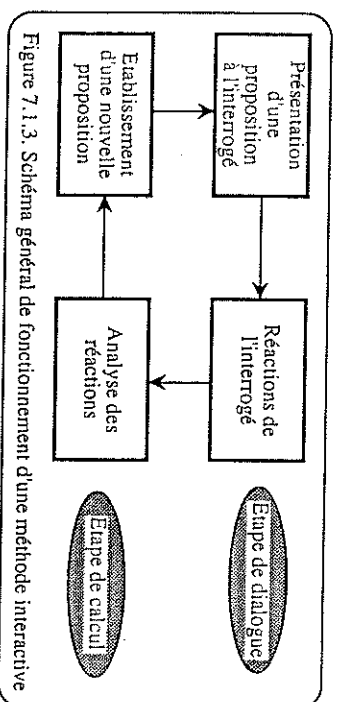


Figure 7.1.3. Schéma général de fonctionnement d'une méthode interactive

- une **phase d'explication** (ou de sensibilisation) dont le but est de présenter, à l'interrogé, un certain nombre d'informations concernant la proposition qui lui est faite, la façon dont elle a été obtenue, les possibilités et les limites de l'ensemble A des actions potentielles, les conséquences de certains jugements qu'il a émis ou qu'il pourrait émettre, etc. ;

- une **phase d'interrogation** où sont recueillies les réactions de l'interrogé à la proposition qui lui a été faite, informations qui seront utilisées dans l'étape de calcul pour bâtir une nouvelle proposition.

Cette alternance d'étapes de calcul et d'étapes de dialogue prend alors fin :

- soit parce que l'interrogé s'estime satisfait de la proposition qui lui est faite ;
- soit parce que l'interrogé est lassé ou estime que la poursuite du dialogue ne lui apportera aucun élément de réflexion supplémentaire ;
- soit enfin parce que l'interrogateur est dans l'impossibilité de poursuivre le dialogue ou estime que sa poursuite est inutile.

Il est raisonnable de penser, compte tenu de ce qui précède, que le dialogue entre l'interrogé et l'interrogateur sera d'autant facilité que :

- les propositions qui sont faites à l'interrogé auront pour lui une signification concrète claire et qu'il disposera de toute information nécessaire pour porter un jugement à leur sujet,
- celui-ci sera en mesure d'exprimer ses réactions de la façon la plus souple et la plus naturelle possible,
- qu'il percevra clairement la logique sous-tendant le passage d'une proposition à une autre au cours du dialogue et, en particulier, qu'il aura l'impression que l'interrogateur a bien tiré parti de ses réactions et
- que le protocole d'interaction tolérera les hésitations, les retours en arrière, les raisonnements essai-erreur de l'interrogé.

Cependant, la "qualité" d'une méthode interactive est aussi fortement dépendante d'aspects liés à l'"ergonomie de la communication" entre l'interrogateur et l'interrogé, c'est-à-dire, souvent, à la façon dont le protocole d'interaction retenu aura été mis en œuvre dans un logiciel informatique. La façon de présenter l'information (tableau, schéma, discours), de formuler les questions, la rapidité de l'étape de calcul¹, la possibilité d'obtenir des explications, etc. ont aussi une importance déterminante dans la conception d'une méthode interactive bien que ces aspects sortent du cadre du présent ouvrage. Tel protocole d'interaction en apparence simpliste et/ou inutilement contraignant pourra se révéler très efficace en raison de sa rapidité ou de ses qualités ergonomiques.

Cette façon de concevoir l'aide à la décision en renonçant à faire usage de PAMC au profit d'un dialogue géré par un protocole d'interaction travaillant de façon locale et provisoire appelle un certain nombre de remarques.

a) L'approche interactive ne se distingue pas de l'approche classique du seul fait qu'elle établit un dialogue entre deux entités. Dans une approche classique, la modélisation des informations inter-critères au sein d'une PAMC donnée implique aussi un dialogue entre l'homme d'étude et l'acteur pour qui

¹ cette exigence imposant parfois de n'utiliser certains protocoles d'interaction que couplés à une structure particulière de A et/ou des critères.

s'exerce l'aide à la décision. Mais ce dialogue vise, au contraire de ce qui est fait dans une approche interactive, à l'obtention d'une règle d'agrégation synthétique et définitive en ce sens qu'elle ne sera, éventuellement, remise en cause qu'après l'établissement d'une première recommandation. C'est donc non la présence d'un dialogue mais sa nature et sa finalité qui permettent de différencier les deux approches. Cette séparation n'est cependant pas toujours exempte d'ambiguïté. Comme on le verra au 7.2.1 et au 7.4, on peut en effet envisager de mettre en œuvre une méthode interactive autour de propositions prenant la forme de règles d'agrégation. On a alors affaire à des méthodes se situant au confluent des deux approches.

b) Les méthodes relevant de l'approche interactive ne font pas appel à des PAMC en ce sens qu'elles ne cherchent pas à établir de s.r.p. sur A à partir duquel (ou desquels) s'élaborerait une recommandation. Comme on le verra au 7.2, ces méthodes peuvent cependant parfois utiliser localement, pour analyser les réactions de l'interrogé et bâtir une nouvelle proposition, un procédé formellement identique à une des PAMC présentées aux chapitres 4 et 5. Il est important de noter que de tels procédés sont uniquement utilisés dans les méthodes interactives comme moyens d'investigation dans la phase de calcul. Les critères présidant à leur choix sont ici tout différents de ce qu'ils sont pour choisir une PAMC dans une approche classique. On verra ainsi que de nombreuses méthodes interactives utilisent localement une agrégation fondée sur une somme pondérée ou sur une distance à un point idéal (cf. 7.2 et 7.3), l'interaction venant alors corriger le caractère parfois trop artificiel d'une telle agrégation.

7.1.2 Sens et validité d'une méthode interactive - Le problème de la "convergence"¹

On a dit que, dans une méthode interactive, l'aide à la décision est issue d'une interaction entre deux entités, l'interrogé et l'interrogateur. Pour mieux comprendre la nature de cette aide à la décision, il importe de s'interroger sur le sens qu'il convient

¹ Ce paragraphe est inspiré de Roy (1987).

de donner au produit final de l'interaction ou, en d'autres termes, ce vers quoi "converge" la succession d'étapes de dialogue et de calcul. Il paraît naturel de considérer que la signification de ce produit final dépendra à la fois du protocole d'interaction, de la manière dont l'interrogé aura réagi aux propositions faites et de l'événement ayant mis fin à l'interaction. Afin de cerner plus précisément cette signification, nous exploiterons dans ce paragraphe l'analogie, déjà signalée, entre un protocole d'interaction et une "règle du jeu" avant d'aborder directement le problème qui nous concerne.

Imaginons un "jeu" à deux joueurs dont le but est la découverte d'une histoire. Pour ce faire, le joueur 1 pose des questions au joueur 2. Considérons maintenant trois versions différentes de ce jeu.

a) *Trois versions d'un même jeu*

i) *Version 1*

Le joueur 2 compose une histoire de façon détaillée avant le début du jeu et s'interdit de la modifier dans le cours du jeu. Une partie consiste alors, pour le joueur 1, à deviner l'histoire composée par le joueur 2 en lui posant un certain nombre de questions auxquelles celui-ci répond par oui ou par non en conformité avec l'histoire imaginée avant le début du jeu.

Comme le souligne Dupuy¹ (1982), *le déroulement du jeu est un processus d'interaction, en partie aléatoire, entre l'imagination du joueur et un certain récit qui, tout au long de la dynamique, aura toujours été déjà là (et n'aura pas été modifié par cette dynamique). Normalement, le processus converge plus ou moins rapidement, par tâtonnements, essais et erreurs, vers la découverte de l'histoire.*

¹ qui, dans un cadre n'ayant rien à voir avec l'aide à la décision, analyse les versions 1 et 2 du jeu.

ii) *Version 2*

Elle est identique à la version 1 pour le joueur 1 ainsi que pour tout observateur extérieur au jeu. La seule différence provient de ce que le joueur 2 n'a décidé d'aucune histoire. A la place, il a choisi une convention de réponses parfaitement arbitraire du type "répondre oui" si la question se termine par une voyelle, "non" si elle se termine par une consonne avec dérogation à cette règle lorsqu'elle induirait une réponse venant en contradiction flagrante avec certaines des réponses apportées aux questions antérieures.

Citons à nouveau Dupuy (1982) : *Le déroulement du jeu est ici un processus d'interaction aléatoire entre l'imagination du joueur 1 et le hasard sémantique des réponses, uniquement contraint par la cohérence de sens que le joueur prête au récit qu'il croit découvrir. Il arrive qu'une histoire bien constituée émerge de cette dynamique, et il est clair qu'il s'agit alors d'une pure création. Pour l'observateur intérieur qu'est de fait, ici, le joueur 1 ignorant de la véritable règle du jeu, tout se passe cependant comme si l'on était dans le cas précédent. Dans la version 1, l'éventail des histoires possibles se resserre entre le commencement du jeu et sa fin, pour se refermer sur un "ordre" qui a toujours été présent : l'histoire à découvrir. Dans la version 2, au contraire, le jeu se complexifie à mesure de son déroulement.*

iii) *Version 3*

Tout comme la version précédente, elle demeure identique à la version 1 pour le joueur 1 ainsi que pour tout observateur extérieur. Le joueur 2 ne s'est ici donné ni histoire, ni convention arbitraire destinées à dicter ses réponses oui ou non. Il répond maintenant, selon son tempérament : oui ou non selon le sens dans lequel il préfère infléchir l'histoire qui se fabrique dans le cadre de l'interaction. Il y a création tout comme dans la version 2 mais, contrairement à ce qui se passe dans cette dernière, cette création est orientée, conditionnée par la personnalité du joueur 2 tout en demeurant marquée par celle de l'autre joueur comme dans la version 2.

Il faut enfin souligner que, dans la version 3, le joueur 1 a le choix des questions qu'il formule. Les conclusions qu'il tire des réponses déjà apportées par le joueur 2 exercent donc une certaine action sur le comportement de ce dernier. Il stimule en effet, de façon privilégiée, tel ou tel de ses goûts, de ses motivations, mobilise son attention sur tel aspect plutôt que sur tel autre dans l'histoire qui se crée. Ce faisant, il influence ce qui, dans l'esprit du joueur 2, est à l'origine de la production des réponses. Rien de similaire ne se présente dans les versions 1 et 2 : l'histoire, comme la convention arbitraire, sont des formes présentes et fixes que la dynamique de l'interaction n'altère d'aucune sorte.

Chaque version de ce jeu peut s'interpréter comme un type possible d'interaction généré par une méthode relevant de A.O.3 selon les hypothèses faites quant à la manière dont l'interrogé (le joueur 2) répond aux questions de l'interrogateur (le joueur 1). On peut, de façon schématique, distinguer trois hypothèses correspondant aux trois versions du jeu envisagées.

b) Trois hypothèses sur le déroulement de l'interaction

i) Hypothèse 1

L'interrogé répond aux questions de l'interrogateur en conformité avec un système de préférences pré-existant qui n'est pas modifié par l'interaction. De même que dans la version 1 du jeu il était relativement naturel de supprimer une certaine cohérence à l'histoire composée par le joueur 2 (même si tous ses détails n'étaient pas nécessairement complètement spécifiés), il est également naturel, dans le cadre de cette hypothèse, de considérer que le système de préférences de l'interrogé est suffisamment cohérent pour lui permettre de comparer diverses actions sans intransitivité ni incomparabilité. Cette hypothèse revient donc à considérer que tout se passe comme si l'interrogé répondait aux questions en se fondant sur une fonction d'agrégation $V(g_1(a), g_2(a), \dots, g_n(a))$ bien définie ayant la forme d'un critère unique de synthèse.

Dès lors qu'on accepte cette hypothèse, le sens (dans la double acception du terme, direction et signification) d'une

méthode interactive est clair. Pour être significative, elle doit converger vers la découverte d'une réalité qui était déjà là avant que l'interaction ne commence. Dans les cas qui nous intéressent, cette réalité est soit un optimum dans A, soit une règle de classement ou de tri. Toute interrogation sur la validité d'un protocole d'interaction vis-à-vis d'un contexte défini peut alors être formulée en termes de conditions auxquelles ce contexte doit satisfaire pour que la dynamique créée par le protocole converge vers ce qu'il faut découvrir ou aboutisse, à défaut, à un produit final qui en soit voisin.

Ces conditions ont trait :

- d'une part à la personnalité de l'interrogé qui doit être en mesure de comprendre correctement les questions ;
- d'autre part à la nature de la fonction d'agrégation sous-jacente (qui doit, par exemple, être concave ou quasi-concave ¹).

ii) Hypothèse 2

Dans cette hypothèse, on admet, tout comme dans la précédente, qu'il existe, chez l'interrogé, une forme présente et fixe qui pré-détermine toutes les réponses que celui-ci est susceptible d'apporter aux questions de l'interrogateur. On suppose en revanche que, de par sa nature, sa structure, cette forme n'agit plus à la manière d'une fonction d'agrégation : l'interrogé est mu par une autre logique, par une rationalité qui échappe à l'interrogateur ; cette logique agit à la manière de la convention arbitraire dans la version 2 du jeu.

Bien que cette hypothèse ne soit pas totalement dénuée de réalisme ², les chercheurs qui mettent au point un protocole d'interrogation ne l'envisagent pas volontiers comme hypothèse

¹ La nécessité d'introduire de telles conditions provenant du caractère local de la plupart des protocoles d'interaction.

² Pour des raisons tenant à un effet d'ancre ou de halo, on peut ainsi envisager que les réponses de l'interrogé aux questions de l'interrogateur dépendent, de façon cruciale, de l'ordre et/ou de la formulation de celles-ci.

de travail. Dès lors que le comportement de l'interrogé relève intégralement de cette hypothèse, le sens de la dynamique apparaît lui aussi comme arbitraire et le produit final de l'interaction est donc souvent dénué de valeur pour l'aide à la décision.

iii) Hypothèse 3

Dans cette dernière hypothèse, tout comme dans la version 3 du jeu, il n'y a plus de forme présente et fixe capable de déterminer, à tout moment, la réponse de l'interrogé à une question de l'interrogateur de façon indépendante de ce qui s'est passé depuis le début de l'interaction jusqu'à ce que la question soit posée. On considère toujours que l'interrogé réagit en fonction de son tempérament propre, de son système de valeurs, ces dernières étant à l'origine de convictions qui structurent ses préférences. On ne regarde pas pour autant celles-ci comme complètement formées. On suppose qu'entre des lignes de force relativement intangibles se situent des zones d'interrogations, d'opinions fragiles, voire conflictuelles et contradictoires. On admet donc que la dynamique interactive que le protocole a pour fonction de gouverner peut contribuer, dans un sens ou dans un autre, à lever les interrogations, à trancher les conflits, à déplacer les contradictions, voire à déstabiliser certaines convictions. Dans cette hypothèse, le produit final de l'interaction apparaît comme "conditionnel" et "façonné" par le protocole, la nature des questions, la logique de leur enchaînement agissant sur les réponses de l'interrogé.

Dès lors qu'on se place dans le cadre de cette dernière hypothèse, parler de "convergence" n'a plus grand sens. En effet, ce vers quoi il faut converger ne pré-existe pas à l'interaction mais apparaît, pour une part, comme créé par elle. Le sens de l'interaction doit être recherché dans le fait que la méthode a pour fonction de provoquer, de stimuler l'interrogé afin qu'il structure, complète, stabilise ses préférences. Le produit final que la méthode lui permet d'explicitier apparaît alors comme issu d'un modèle satisfaisant de ces préférences qu'il vient de mettre à l'épreuve et de façonner.

Le produit final n'est pas ici "découvert" mais "construit" au cours d'un cheminement qui ne relève plus d'une convergence mais d'une création.

La réalité des situations d'aide à la décision correspond vraisemblablement à un mélange des trois hypothèses qui viennent d'être envisagées. Malheureusement, comme le montre bien l'analyse des trois versions du jeu présentées au a), ni l'interrogateur, ni un quelconque observateur extérieur ne peuvent démêler l'importance relative de chacune d'elles. Toutefois, il ne nous paraît pas insensé d'admettre que, en matière d'aide à la décision, face à des acteurs motivés¹ pour répondre aux questions posées par l'interrogateur, on puisse faire en sorte que la dose de l'hypothèse 2 dans le mélange lui confère un impact négligeable. Sauf cas assez particuliers, il ne nous paraît, en revanche, pas très raisonnable d'admettre qu'il en va de même avec l'hypothèse 3.²

Quel est alors le sens du produit final de l'interaction et, plus généralement, d'une méthode interactive si l'on admet l'hypothèse 3 ? Même si la notion classique de convergence n'a ici plus de sens, il apparaît souhaitable que le cheminement que fait suivre à l'interrogé une méthode interactive ne soit pas quelconque. Vincke (1986) parle à ce propos de "**convergence psychologique**". Celle-ci se produira lorsque le protocole aura suffisamment stimulé l'interrogé tout en lui laissant de nombreuses possibilités d'exploration, de retour en arrière pour lui permettre de façonner, en toute liberté, ses zones d'interrogation, de conflit et de contradiction et ainsi se forger une conviction qu'il estimera suffisamment bien étayée par le dialogue auquel il aura participé.

¹ Nous nous bornons ici au cas d'acteurs désireux de coopérer et dotés d'une culture garantissant une bonne compréhension des questions posées par l'interrogateur. Faisons observer que, lorsqu'on s'écarte d'une situation véritable d'aide à la décision, par exemple lorsqu'on procède à une expérimentation, la première de ces conditions n'est pas facile à remplir et la part de l'hypothèse 2 peut ne plus être négligeable.

² Le lecteur notera que les hypothèses 1 et 3 recouvrent plus ou moins ce que nous avons appelé les démarches descriptives et constructives d'aide à la décision (cf. 1.7).

Pour illustrer la différence entre la notion classique de convergence et cette idée de "convergence psychologique", mentionnons que cette dernière n'exclut pas de présenter à l'interrogé plusieurs fois la même proposition. Il ne s'agira pas là d'un "bouclage" en ce sens que, l'interrogé ayant acquis de l'information au cours du dialogue (et donc, éventuellement, approfondi sa perception du problème et/ou modifié ses convictions antérieures), pourra réagir de manière différente à la présentation de la même proposition.

Mentionnons enfin que parler de "convergence psychologique" n'exclut pas de s'intéresser à certaines propriétés algorithmiques d'un protocole d'interaction. Même si l'on pense, dans une situation donnée, que l'hypothèse 3 est la plus crédible, il serait sûrement hasardeux de chercher à travailler avec un protocole en $P.\alpha$ qui, au bout d'un certain nombre d'itérations, ne proposerait pas à un interrogé répondant aux questions en fonction d'un préordre complet pré-existant sur A , une des actions de rang 0 de ce préordre. L'idée de "convergence psychologique" n'exclut donc pas celle de convergence au sens classique. Elle l'englobe pour prendre en compte toutes les situations débordant, du cadre, peu réaliste, de l'hypothèse 1.

7.1.3 Portée et limites des méthodes interactives

La souplesse de l'approche interactive par rapport à l'approche classique, les récents progrès des matériels informatiques et du génie logiciel ainsi que l'émergence du concept de Système Interactif d'Aide à la Décision (SIAD) pourraient laisser croire que les méthodes interactives sont destinées à supplanter, dans un proche avenir, les autres méthodes abordées dans cet ouvrage. Même si l'on peut anticiper un développement important de ces méthodes, nous pensons qu'il n'en ira pas ainsi. Elles présentent en effet des caractéristiques les rendant mal adaptées à certaines situations.

On a vu, au 7.1.1, que la plupart des protocoles d'interaction promouvaient un raisonnement local pour faciliter le dialogue. Mais une telle façon de faire ne trouve sa pleine application que dans les cas où le nombre d'actions potentielles est suffisamment élevé. De fait, la plupart des méthodes que nous passerons en

revue dans ce chapitre ont été conçues pour s'appliquer au cas de la "programmation mathématique multicritère" où l'ensemble A est défini de manière implicite par un ensemble de contraintes pesant sur des variables de décision continues.

Dans une méthode interactive, c'est de la dynamique de l'interaction qu'est issue l'aide à la décision. Ces méthodes visent donc principalement à permettre à une seule personne de se forger une conviction, ne fournissant généralement pas un "modèle" permettant d'argumenter et de justifier simplement cette conviction vis-à-vis d'autres acteurs. Elles sont donc souvent mal adaptées dans les cas, nombreux, où l'outil multicritère est utilisé pour fournir une base de discussion dans un processus de décision complexe et conflictuel¹.

Enfin, comme on le verra au 7.2.1, la conception de méthodes interactives dans une problématique autre que $P.\alpha$ ne va pas sans soulever de problèmes.

Sans chercher à restreindre indûment la portée des méthodes interactives, on peut, schématiquement, caractériser leur domaine privilégié d'application à des situations :

- où le nombre d'actions potentielles est élevé,
- "individuelles", c'est-à-dire concernant principalement un seul acteur et
- relevant de la problématique du choix $P.\alpha$.

On notera enfin que ces méthodes n'ont fait l'objet que de peu d'applications à des problèmes réels. Celles-ci concernent le plus souvent des problèmes assez différents de ceux ayant été traités en utilisant des méthodes relevant de l'approche classique².

¹ Cf. MIMCAD, 10.2.

² Voir la bibliographie de cas d'application en fin d'ouvrage. On pourra également consulter Steuer (1986, chap. 16), Vanderpooten (1990) et White (1990).

7.2 STRUCTURE GÉNÉRALE DES MÉTHODES INTERACTIVES

7.2.1 Schéma général d'interaction dans les diverses problématiques

La plupart des méthodes interactives connues à ce jour visent à répondre à une problématique ¹ du choix (P.α). Il ne faut pas voir là seulement un héritage de la culture traditionnelle de la Recherche Opérationnelle. Comme le fait remarquer Vanderpooten (1987 et 1990), c'est aussi la nature même de l'approche interactive qui est à l'origine de cette pré-éminence de P.α. Les méthodes relevant de cette approche structurent le dialogue entre l'interrogé et l'interrogateur autour de "propositions" faites à l'interrogé qui sont conçues de manière "locale", c'est-à-dire bâties sur la base d'un sous-ensemble restreint de A. Rien n'a été dit jusqu'à présent sur la nature de ces propositions en-dehors du fait qu'elles devaient avoir une signification concrète claire pour l'interrogé. Elle s'impose naturellement dans une problématique du choix. A chaque étape du dialogue, l'interrogateur présentera à l'interrogé une ou un petit nombre d'actions potentielles candidates au choix sur lesquelles ce dernier sera invité à réagir. De ce fait, dans une méthode interactive en P.α, toute proposition peut s'interpréter comme une recommandation possible.

Il est facile de constater que la situation est toute différente avec la problématique du tri P.β ou la problématique du rangement P.γ. Pour que toute proposition puisse s'interpréter comme une recommandation, il faudrait que ces propositions se présentent (en supposant un nombre fini d'actions potentielles) sous la forme d'une affectation de l'ensemble des actions de A ou d'une modification à une affectation ou un rangement antérieur. Remettre ainsi en cause le caractère local du dialogue imposerait un effort cognitif extraordinaire à l'interrogé pour lui permettre de réagir à de telles propositions. On pourrait également envisager que chaque proposition se présente sous la forme d'une affectation ou d'un rangement d'un sous-ensemble de A. Un tel procédé

¹ Sur la définition des diverses problématiques, cf. 1.3 et 6.1.

permettrait de préserver le caractère local du dialogue. Cependant, il est loin d'être aisé ¹ de synthétiser des affectations ou, plus encore, des rangements sur divers sous-ensembles de A pour parvenir à une recommandation, c'est-à-dire une affectation ou un rangement des actions de A.

Si l'on veut concevoir une méthode interactive en P.β ou P.γ, il paraît donc plus judicieux et réaliste de renoncer à ce que toute proposition s'interprète comme une recommandation et de faire porter le dialogue sur des règles d'affectation ou de rangement. Il est clair que de telles propositions ont un degré de complexité sans commune mesure avec celles utilisées en P.α. On verra cependant, au 7.4, qu'il est possible, moyennant certaines précautions et, en particulier, en illustrant chaque règle proposée sur un sous-ensemble de A judicieusement choisi, de concevoir des protocoles d'interaction de ce type. On peut alors réinterpréter une méthode interactive en P.β ou P.γ utilisant un tel protocole comme une méthode interactive en P.α où les actions potentielles se présentent sous la forme de règles d'affectation ou de rangement. Pour passer du produit final de l'interaction à une recommandation, il faut alors appliquer la règle d'affectation ou de rangement issue de ce produit final à tout ou partie de l'ensemble A. Il est donc possible d'analyser la spécificité de l'approche interactive en se limitant au cadre de la problématique du choix. C'est ce que nous ferons dans la suite de cette section.

En reprenant le schéma général présenté à la figure 7.1.3, on peut résumer le déroulement de la plupart des méthodes interactives en P.α par une alternance d'étapes de calcul et de dialogue se présentant comme suit ² :

¹ Sur ces difficultés, nous renvoyons à Vanderpooten (1990, chapitre 2).

² dans le cas où chaque proposition se compose d'une telle action. Il est aisé de modifier ce schéma pour prendre en compte le cas où plusieurs actions potentielles sont présentées à chaque itération. Lors de la première étape de calcul, la construction de la proposition s'effectue compte tenu d'informations qui auront été spécifiées lors de l'initialisation de la procédure.

Etape de calcul

Construction de la proposition courante compte tenu des informations obtenues lors des étapes de dialogue précédentes.

Etape de dialogue*Phase d'explication*

Présentation de la proposition courante ainsi que de toute information s'y rattachant.

Phase d'interrogation

La proposition est-elle satisfaisante ?

Si Réponse = OUI

Fin de la procédure ou stockage de la proposition courante et ré-initialisation de la méthode sur de nouvelles bases.

Sinon

Poursuite de l'interrogation, l'interrogé étant invité à expliciter les raisons de son insatisfaction. Interprétation des réponses fournies par l'interrogé.

Fin Si

Retour à l'étape de calcul.

On voit donc que les diverses méthodes interactives vont principalement se différencier, d'un point de vue technique, par :

- la manière dont on demande à l'interrogé de réagir à la proposition courante,
- la manière dont on interprète ces réactions,
- la manière dont on construit la proposition courante.

Ces trois points recouvrent en fait de nombreuses options qui seront étudiées en détail dans les deux paragraphes suivants¹. Auparavant, nous introduirons quelques concepts et notations utiles pour éclairer ces questions.

On a vu que la plupart des méthodes interactives nécessitent de travailler sur un ensemble riche d'actions potentielles. Il est

¹ Le lecteur peu familier avec les méthodes interactives pourra, avec profit, prendre connaissance de quelques unes des méthodes présentées au 7.3 avant d'aborder les trois derniers paragraphes du 7.2.

fréquent, dans ce cas, que chaque action potentielle ne soit connue qu'à travers de son vecteur de performances $g(a) = (g_1(a), g_2(a), \dots, g_n(a))$. Il est donc parfois utile de travailler non sur A lui-même mais sur son image dans l'espace des critères $g(A) = \{(g_1(a), g_2(a), \dots, g_n(a)) : a \in A\} \subset \mathbb{R}^n$. Afin de mieux cerner les limites de $g(A)$, il est commode d'avoir une idée de la meilleure et de la pire performance possible sur chacun des critères considérés isolément. On notera respectivement \underline{a} et \bar{a} , l'action de A ayant la pire (resp. la meilleure) performance sur le critère g_i , c'est-à-dire¹ :

$$g_i(\underline{a}) = \min_{a \in A} g_i(a) \text{ et } g_i(\bar{a}) = \max_{a \in A} g_i(a).$$

Dans l'espace des critères, on notera :

$$g_{i*} = g_i(\underline{a}) \text{ et } g_i^* = g_i(\bar{a}).$$

Les vecteurs de performances $g^* = (g_1^*, g_2^*, \dots, g_n^*)$ et $g_* = (g_{1*}, g_{2*}, \dots, g_{n*})$ sont respectivement appelés **point idéal** et **point anti-idéal** de A . Il est clair que, en général, ni g^* ni g_* ne sont éléments de $g(A)$ (cf. figure 7.2.1 a). Lorsque l'on s'intéressera à un sous-ensemble d'actions $B \subset A$, on notera $g^*[B]$ et $g_*[B]$ les vecteurs correspondant respectivement au point idéal et au point anti-idéal de B .

Pour mieux comprendre ce à quoi conduit l'optimisation de chaque critère considéré isolément, on est souvent amené à construire le "**tableau de gains**"² de A , c'est-à-dire un tableau

¹ Dans les problèmes réels, il n'est pas restrictif de supposer que de telles actions existent et que leurs performances sont finies.

² Traduction française de "pay-off table". Cette définition demanderait, en toute rigueur, à être complétée pour traiter le cas où plusieurs actions de A permettraient d'atteindre simultanément les meilleures performances sur un critère donné. En pratique, retenir l'une ou l'autre de ces actions est sans grande importance. On pourra par exemple choisir d'optimiser un second critère pour bâtir le tableau des gains dans de telles situations.

faisant apparaître les performances de $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n$ (cf. figure 7.2.2).

Le vecteur $\underline{g}^{\text{Nadir}} = (g_1^{\text{Nadir}}, g_2^{\text{Nadir}}, \dots, g_n^{\text{Nadir}})$ tel que $g_i^{\text{Nadir}} = \text{Min}_{j \in F} g_j(\bar{a}_i)$ pour $i = 1, 2, \dots, n$ est appelé **point nadir**¹ de A (cf. figure 7.2.1 b).

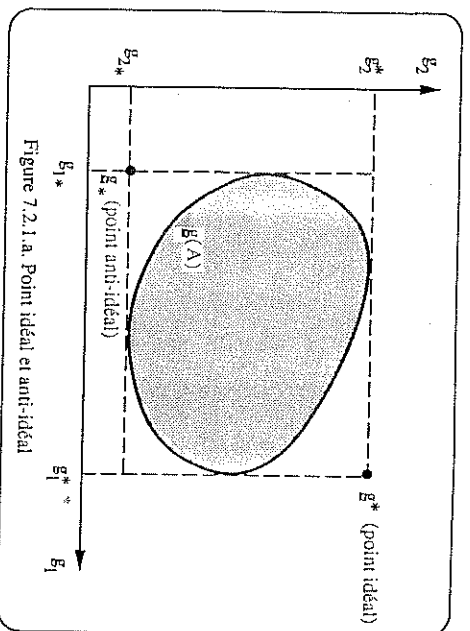


Figure 7.2.1.a. Point idéal et anti-idéal

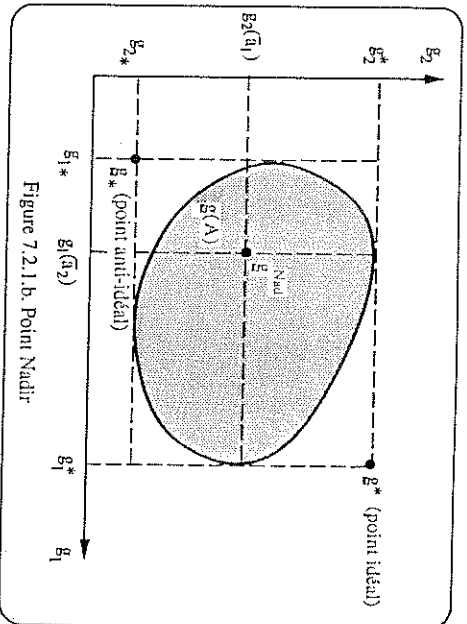


Figure 7.2.1.b. Point Nadir

¹ La valeur de $\underline{g}^{\text{Nadir}}$ dépend du choix du tableau des gains. Sur le choix du tableau de gains et sur la définition de $\underline{g}^{\text{Nadir}}$, on pourra se reporter à Steuer et Gardiner (1990).

Figure 7.2.2 : Tableau des gains

	g_1	g_2	...	g_i	...	g_n
\bar{a}_1	g_1^*	$g_2(\bar{a}_1)$...	$g_j(\bar{a}_1)$...	$g_n(\bar{a}_1)$
\bar{a}_2	$g_1(\bar{a}_2)$	g_2^*	...	$g_j(\bar{a}_2)$...	$g_n(\bar{a}_2)$
...
\bar{a}_j	$g_1(\bar{a}_j)$	$g_2(\bar{a}_j)$...	g_j^*	...	$g_n(\bar{a}_j)$
...
\bar{a}_n	$g_1(\bar{a}_n)$	$g_2(\bar{a}_n)$...	$g_j(\bar{a}_n)$...	g_n^*

Rappelons que la relation de dominance sur A est définie par (cf. 1.7) :

$$b \Delta_F a \Leftrightarrow g_i(b) \geq g_i(a), \forall i \in F.$$

On dira qu'une action $a \in B$ est efficace dans $B \subset A$ s'il n'existe pas d'action $b \in B$ telle que $b \Delta_F a$ et Non($a \Delta_F b$). On notera $\text{Eff}(B)$ l'ensemble des actions efficaces dans B. Dans l'espace des critères, un vecteur de performances $\underline{g} \in \underline{g}(B)$ sera dit efficace s'il est l'image, dans l'espace des critères, d'une action de $\text{Eff}(B)$, c'est-à-dire si (cf. figure 7.2.3) :

$$\forall \underline{g}' \in \underline{g}(B) \text{ tel que } \underline{g}' \neq \underline{g}, \exists i \in F \text{ tel que } g_i > g_i'.$$

7.2.2 L'étape de dialogue

Le but de toute étape de dialogue est double. Il s'agit d'une part de présenter une proposition à l'interrogé de la manière la plus informative et la plus motivante possible ; c'est la phase d'explication. D'autre part, il faut demander à l'interrogé de réagir face à cette proposition et interpréter ses réactions ; c'est la phase d'interrogation.

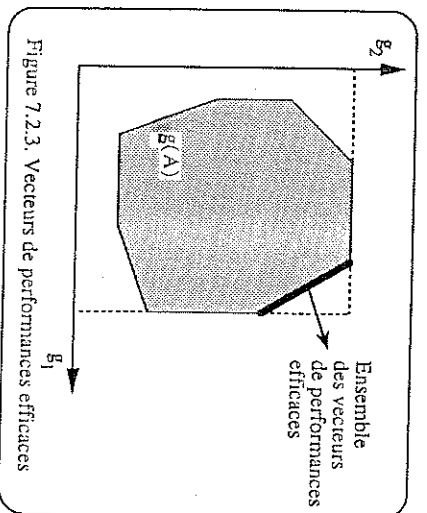


Figure 7.2.3. Vecteurs de performances efficaces

7.2.2.1 La phase d'explication

Cette phase vise à fournir à l'interrogé toute information nécessaire pour le motiver à poursuivre le dialogue et lui permettre de mieux percevoir la proposition qui lui a été faite. Il est clair que la qualité de cette phase dépendra, de façon importante, de la manière dont le protocole d'interaction aura été mis en œuvre. Il paraît bon que les explications permettent à l'interrogé :

a) De prendre conscience des possibilités et limites de l'ensemble A ou de la partie de A sur laquelle les itérations précédentes auront conduit à travailler. Les concepts de point idéal, anti-idéal et de tableau des gains qui ont été présentés au 7.2.1 peuvent être utiles à cet égard.

b) De comprendre un certain nombre de concepts, en particulier celui d'efficacité. Comme on le verra au 7.2.3 et au 7.3, la plupart des méthodes interactives en P.α ne proposent à l'interrogé de réagir que sur des actions efficaces. Il est alors important de faire en sorte que l'interrogé réalise qu'il n'est pas possible, à moins de faire évoluer A, de trouver une action potentielle améliorant, sur tous les critères, les performances d'une action efficace et que, améliorer certaines performances, impliquera nécessairement que d'autres se dégradent.

c) De "visualiser" au mieux les propositions qui lui sont faites. Ce dernier point est particulièrement important dans le cas

où A est défini de manière implicite par un ensemble de contraintes. Il pourra, de plus, être intéressant de permettre à l'interrogé d'explorer un voisinage de l'action (ou des actions) qui lui seront proposées.

7.2.2.2 La phase d'interrogation

La phase d'interrogation consiste tout d'abord à obtenir de l'interrogé une réaction face à la proposition qui lui a été présentée dans la phase d'explication. Dans la plupart des méthodes interactives en P.α (STEM, méthode du point de mire évolutif, méthode du point de référence, etc., cf. 7.3), cette proposition est une action de A. Dans d'autres méthodes (Geoffrion-Dyer-Feinberg, Steuer et Choo, Korhonen et Laasko, etc., cf. 7.3), on présente simultanément plusieurs actions. Comme indiqué au 7.2.1, il s'agira tout d'abord de chercher à savoir si l'interrogé trouve, dans la proposition qui lui est faite, une réponse aux questions qu'il se posait et estime l'action (ou une des actions) proposée satisfaisante. Si tel est le cas, précisons que le protocole d'interaction peut prévoir de ne pas arrêter là le dialogue. On pourra par exemple chercher à explorer un voisinage¹ de l'action jugée satisfaisante ou redémarrer le dialogue sur de nouvelles bases pour explorer plus complètement A et/ou tester la robustesse de ce à quoi le cheminement précédent a conduit afin de rechercher s'il n'existe pas des actions très différentes de celles trouvées qui pourraient également être satisfaisantes.

Il faut noter que si la question qui est posée à ce niveau peut se formuler simplement ("l'action (ou une des actions) proposée vous paraît-elle satisfaisante ?"), on ne doit pas sous-estimer la difficulté qu'elle présente. Cette difficulté sera d'autant diminuée que la phase d'explication aura été bien menée.

Dans le cas où la proposition courante est jugée insatisfaisante, il convient de chercher à poursuivre le dialogue pour tenter de cerner ce qui est la cause de cette insatisfaction et ainsi permettre à l'interrogateur de rassembler suffisamment d'informations pour

¹ au sens d'une topologie propre à chaque méthode.

bâir ultérieurement une proposition ayant de "meilleures chances" d'être jugée satisfaisante. Pour cela, bien des façons de faire sont envisageables. Nous en présentons quelques unes ci-après.

Dans le cas où les propositions ne font intervenir qu'une seule action, on pourra :

- a) faire comparer à l'interrogé la proposition courante avec une ou plusieurs des propositions présentées précédemment,
 - b) faire comparer la proposition courante avec quelques actions qui lui sont proches ou même
 - c) faire expliciter des taux de substitution au voisinage de cette proposition,
 - d) demander à l'interrogé sur quels critères les performances de la proposition courante sont jugées insatisfaisantes et éventuellement
 - e) demander à l'interrogé de combien il souhaiterait voir augmenter les performances sur certains critères,
 - f) demander à l'interrogé sur quel(s) critère(s) il serait prêt à diminuer les performances de la proposition courante en vue de les augmenter sur d'autres critères et, éventuellement,
 - g) demander à l'interrogé combien il serait prêt à concéder sur certains critères,
 - h) demander à l'interrogé de spécifier, sur certains critères, des niveaux minimaux en-deçà desquels il jugerait toute proposition insatisfaisante,
 - i) demander à l'interrogé de spécifier, sur certains critères, des niveaux au-delà desquels il juge sans grand intérêt d'améliorer les performances,
 - j) demander à l'interrogé de spécifier un vecteur de performances qui le satisfierait,
 - k) demander à l'interrogé s'il souhaite faire évoluer la définition de l'ensemble A (mise en question de certaines contraintes, quête de nouvelles actions, ...).
- Dans le cas où les propositions se présentent sous la forme d'un sous-ensemble d'actions, on pourra de plus :
- l) demander à l'interrogé d'indiquer l'action qu'il préfère ou

m) demander à l'interrogé de ranger les actions en un préordre complet ou partiel.

Précisons tout de suite que cette liste, si elle recouvre à peu près ce qui est fait dans la plupart des méthodes, ne prétend nullement épuiser toutes les façons envisageables de demander à l'interrogé d'expliquer son insatisfaction. Notons également que ces diverses façons de faire ne sont pas exclusives.

La nature de l'information demandée varie beaucoup avec les divers procédés présentés. Certaines questions (d), f) appellent une réponse purement qualitative. Dans d'autres (a), b), l), m)), on demandera à l'interrogé d'effectuer des comparaisons paires ou de donner un classement. Enfin, certaines appellent une réponse en termes numériques (c), e), g), h), i), j)). Si l'on peut penser, a priori, que la difficulté de la question varie avec le type d'information demandé, il ne faut pas oublier qu'une question "difficile" n'est pas nécessairement à exclure pourvu que la façon d'exploiter la réponse et la suite du déroulement de l'interaction tolèrent les réponses imprécises, ambiguës et les retours en arrière. Il est de plus possible de faire évoluer le type de questions posées à mesure du déroulement de l'interaction, par exemple en laissant à l'interrogé la possibilité de fournir une information plus "riche" après une première phase d'apprentissage.

On n'abordera qu'au paragraphe suivant la façon de tirer parti des réponses de l'interrogé. Celle-ci est en effet fortement dépendante de la technique utilisée pour construire les propositions lors de l'étape de calcul.

Au 7.2.4, on présentera une méthode interactive élémentaire en P et α dont la phase d'interrogation consiste, après avoir présenté une action à l'interrogé, à lui demander si cette action est satisfaisante. En cas d'insatisfaction, l'interrogateur demande à l'interrogé sur quel(s) critère(s) les performances de l'action présentées sont jugées insatisfaisantes (question de type d)). Cet ensemble de critères à l'itération k sera noté $J_k \subset F$.

7.2.3 L'étape de calcul

Le rôle de l'étape de calcul dans une méthode interactive est de construire une proposition compte-tenu de l'information obtenue lors des étapes de dialogue précédentes et de fournir toute information utile s'y rapportant. On se limitera ici au cas où les propositions consistent en une seule action de A, les méthodes proposant des sous-ensembles de A ne faisant généralement que répéter le procédé que nous allons décrire.

On peut, de façon schématique, découper l'étape de calcul en deux phases distinctes (cf. Vanderpooten (1989a)) :

- une première phase visant à délimiter un sous-ensemble de A à l'intérieur duquel on recherchera une proposition ;
- une seconde phase consistant à choisir une action parmi ce sous-ensemble.

Ces deux phases prendront appui sur une certaine façon de modéliser l'information fournie par l'interrogé dans les étapes de dialogue précédentes.

Plus précisément, chaque méthode fait appel à un certain nombre de "paramètres" dans l'étape de calcul, la valeur de ces paramètres étant "mise à jour" à la fin de chaque étape de dialogue. On notera Φ l'ensemble de toutes les valeurs possibles de ces paramètres. Deux types de paramètres sont classiquement utilisés de façon non exclusive :

- un vecteur $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ de coefficients d'importance visant provisoirement à cerner l'importance relative des divers critères ;

- des vecteurs de performances (correspondant ou non à des actions potentielles) ayant une signification particulière comme :

des niveaux d'exigence minimale sur certains critères g_{Min}^{Min}
 $= (g_1^{Min}, g_2^{Min}, \dots, g_n^{Min})$,

des niveaux de référence indiquant des profils jugés satisfaisants $g_{Ref}^{Ref} = (g_1^{Ref}, g_2^{Ref}, \dots, g_n^{Ref})$.

Le type de paramètres utilisés et la façon de les mettre à jour dépendent du questionnement utilisé dans la phase d'interrogation. Certaines des questions présentées au 7.2.2 invitent naturellement à faire usage d'un certain type de paramètres :

- niveaux minimaux sur certains critères (d), e), i)),
- niveaux de référence sur certains critères (j)).

Pour d'autres, l'interprétation est moins simple. Par exemple (question a)), si l'on fait comparer la proposition courante a_k avec la proposition précédente a_{k-1} , on pourra, si a_k est jugée préférable à a_{k-1} , chercher à déterminer un jeu (ou un ensemble de jeux) de coefficients $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ qui, dans une règle d'agrégation donnée (somme pondérée par exemple), est compatible avec cette préférence. On verra en détail, au 7.3, comment diverses méthodes mettent à jour les paramètres qu'elles utilisent.

Précisons dès maintenant qu'un point crucial dans la mise à jour de ces paramètres réside dans la "mémoire" que l'on veut donner au protocole d'interaction. On pourra soit :

- ne prendre en compte que l'information la plus récente,
- prendre en compte toute l'information depuis le début de l'interaction¹ ou encore
- ne prendre en compte que l'information issue des r étapes précédentes².

Nous reviendrons sur ce point au 7.2.4 et au 7.3. Mentionnons dès maintenant que si donner une mémoire longue à un protocole permet généralement d'assurer une certaine cohérence entre les propositions présentées successivement et de réduire le nombre d'itérations, les possibilités d'apprentissage via des processus essais-erreurs en sont réduites d'autant (sur l'ensemble de ces points, on pourra se reporter à Vanderpooten (1989b)).

¹ Une telle façon de faire n'est possible que si l'on suppose une certaine cohérence dans les informations fournies depuis le début de l'interaction.

² Le nombre r pouvant évoluer à mesure du déroulement de l'interaction.

La première phase de la $k^{\text{ième}}$ étape de calcul vise à déterminer un sous-ensemble $A_k \subset A$ dont on a de bonnes raisons de penser, à ce stade de l'interaction, qu'il contient une action qui sera jugée satisfaisante ou meilleure que la proposition précédente. Dans certaines méthodes (méthode du point de référence, cf. 7.3), cette première phase est inexistante et on a $A_k = A$ à chaque itération k . Les caractérisations les plus courantes de A_k sont les suivantes (cf. Vanderpooten (1989 a)) :

- A_k est déterminé en ne retenant que les actions dont le profil domine un profil minimal g^{Min} ;
- A_k est déterminé en ne retenant que les actions n'étant "pas trop éloignées" d'un profil de référence g^{Ref} ;
- A_k est déterminé comme un voisinage de la proposition précédente a_{k-1} .

Comme on le verra, la proposition qui sera faite à l'interrogé lors de la $k^{\text{ième}}$ étape de dialogue correspondra à une action $a_k \in \text{Eff}(A_k)$, c'est-à-dire à une action efficace dans A_k . Si l'on ne souhaite pas faire une proposition à l'interrogé correspondant à une action dominée dans A , il convient donc de caractériser l'ensemble A_k de manière à ce que $\text{Eff}(A_k) \subset \text{Eff}(A)$, c'est-à-dire à ce que les actions efficaces dans A_k soient aussi efficaces dans A .

Il est facile de montrer qu'il en va toujours ainsi lorsque A_k est déterminé en ne retenant les actions dont le profil domine un profil minimal. Moyennant certaines précautions¹ sur la métrique utilisée, il en va de même dans les deux autres cas.

Bâtir un protocole avec mémoire revient à supposer que $A_k \subset A_{k-1}$ à chaque itération k ou pour certaines itérations k . Dans un protocole sans mémoire, on aura simplement A_k indépendant de A_h pour $h < k$.

Précisons enfin, à propos de cette première phase, que tout protocole d'interaction se doit de gérer les cas où l'application

¹ Voir à ce sujet Vanderpooten (1990, chapitre 7).

d'une des techniques précédentes conduirait à $A_k = \emptyset$. Une telle situation est fréquente lorsque, dans l'étape du dialogue, l'interrogé aura spécifié des augmentations de performances sur certains critères définissant des niveaux minimaux à atteindre. Dans ce cas, le protocole pourra, par exemple, prévoir d'avertir l'interrogé qu'il n'est pas possible (avec la définition actuelle de A) de satisfaire aux exigences qu'il formule et l'inviter soit à revoir ses exigences à la baisse, soit à modifier A par une question de type k). Une autre façon de faire consiste à continuer l'étape de calcul en ignorant certaines contraintes (souvent les plus anciennes) dans la définition de A_k . L'occurrence d'une telle situation ne doit pas être considérée comme un "accident" dans l'interaction. Elle contribue au contraire à faire percevoir clairement à l'interrogé les limites de A .

La méthode élémentaire que nous présenterons au 7.2.4 définira, à l'itération k , la zone d'intérêt A_k en éliminant de A les actions ayant une performance moindre que celle de la proposition jugée insatisfaisante sur les critères de I_k (c'est-à-dire sur les critères dont l'interrogé aura spécifié qu'ils étaient à l'origine de cette insatisfaction).

Une fois l'ensemble A_k délimité, la phase suivante de l'étape de calcul consiste à choisir, dans cet ensemble, une action qui constituera la nouvelle proposition faite à l'interrogé. Il semble raisonnable, dans une méthode interactive en P.α, d'imposer que ce choix satisfasse aux deux exigences suivantes¹.

Exigence 1 : L'étape de calcul conduit toujours à proposer une action $a \in \text{Eff}(A_k)$.

Exigence 2 : L'étape de calcul peut conduire à proposer toute action de $\text{Eff}(A_k)$.

La nécessité de l'exigence 1 tient au fait que, l'interrogé pouvant à tout moment se déclarer satisfait de la proposition courante, il importe de s'assurer que la méthode ne conduise pas

¹ Pour plus de détails, nous renvoyons à Vanderpooten (1990, chapitre 7).

à faire une proposition dominée, rien n'empêchant une telle proposition d'être jugée satisfaisante (problème des "brillants seconds"). L'exigence 2 vise à empêcher que certaines actions efficaces de A_k ne puissent jamais être proposées, ce qui semble raisonnable puisque toute action efficace de A_k (et donc, en général, de A) peut constituer une proposition satisfaisante.

Dans la plupart des méthodes interactives, le choix d'une action de A_k s'opère en optimisant¹ sur A_k une fonction à valeurs réelles. Une telle fonction est connue, dans la littérature anglo-saxonne, sous le nom de "scalarizing function". Elle peut s'interpréter formellement comme une PAMC permettant d'établir, sur A_k , un s.r.p. (P, D) ayant une structure de préordre complet. Mais, comme on l'a dit au 7.1.1 b), cette analogie s'arrête au niveau formel. Nous appellerons ici une telle fonction une **fonction d'agrégation temporaire**. Dans une méthode interactive, il ne s'agit pas de modéliser des préférences globales sur A_k mais de disposer d'un moyen simple et efficace de choisir une action de A_k dont on peut penser qu'elle a de bonnes chances d'être jugée satisfaisante. Le choix d'une telle fonction doit se raisonner en tenant compte :

- du temps de calcul nécessaire pour réaliser l'optimisation désirée sur A_k ;
- de la capacité de cette fonction à intégrer l'information déjà recueillie dans les étapes de dialogue précédentes ;
- du respect des deux exigences présentées ci-dessus².

Formellement, une fonction d'agrégation temporaire peut donc se représenter comme une fonction :

$$s : A \times \emptyset \rightarrow \mathbb{R} \\ (a, P) \mapsto s(a, P)$$

¹ Le protocole d'interaction devant gérer les cas où cette optimisation conduirait à des solutions multiples.

² Ce dernier point entre en conflit avec la rapidité de l'étape de calcul, le respect simultané des deux exigences imposant souvent de réaliser de coûteuses optimisations auxiliaires. A ce sujet, voir Wierzbicki (1980, 1986).

où \emptyset représente l'ensemble de toutes les valeurs possibles des paramètres préférentiels utilisés.

Une fonction d'agrégation temporaire simple et économique en termes de calcul est la somme pondérée :

$$s(a, \lambda) = \sum_{i=1}^n \lambda_i g_i(a). \quad (r.7.2.1)$$

Soit a^* une solution optimale du problème :

$$\text{Max}_{a \in B} \sum_{i=1}^n \lambda_i g_i(a) \quad (P1)$$

où B est un sous-ensemble de A .

Il est facile de montrer que si $\lambda_i > 0$, $\forall i \in F$, alors $a^* \in \text{Eff}(B)$. La somme pondérée vérifie donc l'exigence 1.

L'exemple du tableau 7.2.1 permet de constater qu'elle ne satisfait pas, en général, l'exigence 2.

Tableau 7.2.1 : Exemple numérique

$$B = \{a, b, c\}, F = \{g_1, g_2\}$$

	g_1	g_2
a	1	5
b	2	2
c	5	1

Dans cet exemple, l'ensemble $\text{Eff}(B)$ des actions efficaces dans B n'est autre que l'ensemble B lui-même. Comme on pourra aisément le constater à la figure 7.2.4, il est cependant impossible, pour tout jeu de coefficients positifs λ_1, λ_2 , que b puisse être obtenue comme la solution du problème (P1). L'exigence 2 n'est

vérifiée avec (r.7.2.1) que moyennant certaines hypothèses sur la structure de B, par exemple en supposant $g(B)$ convexe. Ceci explique le fréquent recours à d'autres types de fonctions d'agrégation temporaires telle que celle que nous allons présenter¹.

Une fonction d'agrégation temporaire plus complexe consiste à minimiser une distance pondérée à un point de référence g^{Ref} . Les distances les plus utilisées appartiennent à la famille L_p des distances de Minkowski $\sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot |g_i^{Ref} - g_i(a)|^{p_i}$. En raison de ses propriétés, la distance de Tchebychev L_∞ (qui correspond à la limite de L_p lorsque p tend vers l'infini) :

$$\text{Max}_{a \in F} \{ \lambda_i \cdot |g_i^{Ref} - g_i(a)| \}$$

est souvent utilisée².

Examinons comment se comporte la fonction d'agrégation temporaire

$$s(a, \lambda, g^{Ref}) = \text{Max}_{i \in F} \{ \lambda_i \cdot |g_i^{Ref} - g_i(a)| \} \quad (r.7.2.2)$$

vis-à-vis des exigences 1 et 2.

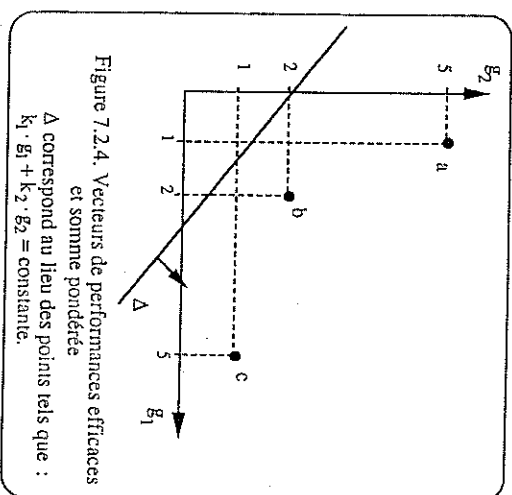
Soit a^* une solution optimale du problème :

¹ Pour l'étude détaillée des propriétés de ces diverses fonctions, nous renvoyons à Wierzbicki (1980 et 1986), à Sawaragi et al. (1985) et à Vanderpooten (1990).

² Notons de plus que l'utilisation de cette distance facilite les calculs. Le problème d'optimisation à résoudre se ramène, comme c'est le cas avec la somme pondérée, à la résolution d'un programme linéaire lorsque A est défini de manière implicite par un ensemble de contraintes linéaires, les critères étant eux-mêmes des fonctions linéaires des variables de décision, c'est-à-dire dans le cas de la programmation linéaire multicritère. Il en va de même avec (r.7.2.3).

$$\text{Min}_{a \in B} \text{Max}_{i \in F} \{ \lambda_i \cdot |g_i^{Ref} - g_i(a)| \} \quad (P2)$$

où B est un sous-ensemble de A.



Il est clair que si $g^{Ref} \in g(B)$, alors toute solution optimale de (P2) est nécessairement confondue avec g^{Ref} . La fonction d'agrégation (r.7.2.2) ne pourra respecter l'exigence 1 que moyennant un choix judicieux de g^{Ref} qui doit être "extérieur" et "au-dessus" de $g[B]$. Lorsque le point de référence g^{Ref} a toutes ses composantes strictement supérieures à celles de $g^*[B]$, point idéal de B, on peut démontrer les résultats suivants¹ :

— si a^* est solution optimale unique de (P2) (avec $\lambda_i \geq 0$, $\forall i \in F$, l'une au moins des inégalités étant stricte), alors $a^* \in \text{Eff}(B)$;

— $\forall b \in \text{Eff}(B)$, il existe un jeu de coefficients d'importance $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ (avec $\lambda_i > 0$, $\forall i \in F$) tel que b soit solution optimale unique de (P2).

¹ Voir par exemple Vanderpooten (1990, chapitre 7).

Moyennant un choix judicieux du point de référence ¹, la fonction (r.7.2.2) permet donc de respecter l'exigence 2, contrairement à ce qui était le cas avec la somme pondérée. Elle ne respecte cependant l'exigence 1 que sous réserve d'une condition d'unicité parfois lourde à vérifier en pratique (cf. figures 7.2.5 (1) et 7.2.5 (2)).

Un compromis entre la somme pondérée et la distance de Tchebychev consiste à utiliser la fonction d'agrégation temporelle :

$$s(a, \lambda, g^{Ref}) = \text{Max}_{i \in F} \{ \lambda_i |g_i^{Ref} - g_i(a)| \} - \sum_{i=1}^n \rho_i g_i(a), \quad (r.7.2.3)$$

dite distance de Tchebychev augmentée.

Sous réserve de choisir un point de référence et des coefficients λ de même qu'avec la métrique de Tchebychev et d'utiliser des coefficients ρ_i strictement positifs et "petits", on peut montrer que (r.7.2.3) :

- vérifie l'exigence 1 ;
- vérifie l'exigence 2 pour "presque toutes" les actions efficaces.

Ses avantages apparaissent à la figure 7.2.5 (3). Notons enfin que la charge de calcul nécessaire pour optimiser (r.7.2.3) est du même ordre que celle nécessaire avec (r.7.2.1) et (r.7.2.2).

Dans certaines méthodes comme la méthode de Vanderpooten (cf. 7.3.1.4) et la méthode du point de référence (cf. 7.3.2), on est amené à utiliser des points de référence ne vérifiant pas nécessairement la condition qui vient d'être évoquée à propos de la métrique de Tchebychev et de la métrique de Tchebychev aug-

¹ Notons que la condition sur le point de référence est toujours satisfaite dès lors que $g^{Ref} > g_i^*$, $\forall i \in F$. On peut alors supprimer les valeurs absolues dans (r.7.2.2) et (r.7.2.3). Nous les conserverons néanmoins dans la suite pour rappeler leur parenté avec la distance de Minkowski.

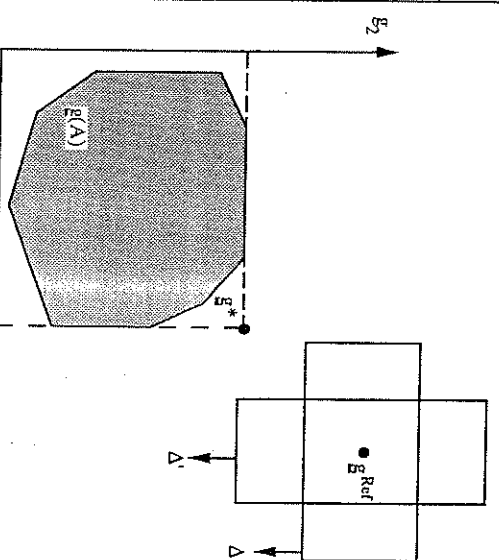


Figure 7.2.5 (1). Courbes diso-distance à un point de référence dominant le point idéal avec la distance de Tchebychev Δ correspond au lieu des points tels que :

$$\text{Max } \{ \lambda_1 |g_1^{Ref} - g_1(a)|; \lambda_2 |g_2^{Ref} - g_2(a)| \} = \text{constante},$$

Δ' correspond au lieu des points tels que :

$$\text{Max } \{ \lambda_1 |g_1^{Ref} - g_1(a)|; \lambda_2 |g_2^{Ref} - g_2(a)| \} = \text{constante},$$

avec $\lambda_2 \leq \lambda_1$ et $\lambda_1 \geq \lambda_2$, l'une des deux inégalités étant stricte.

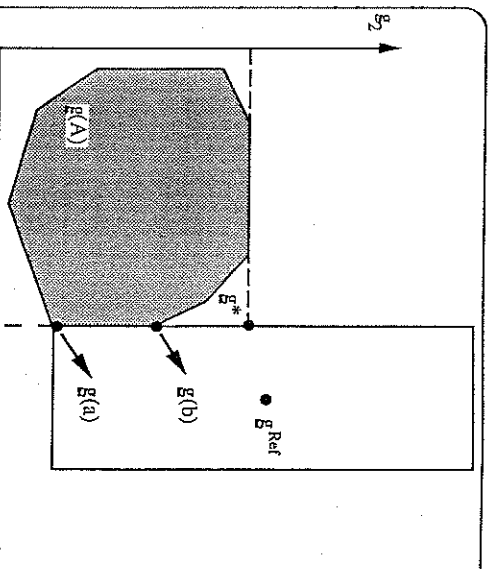
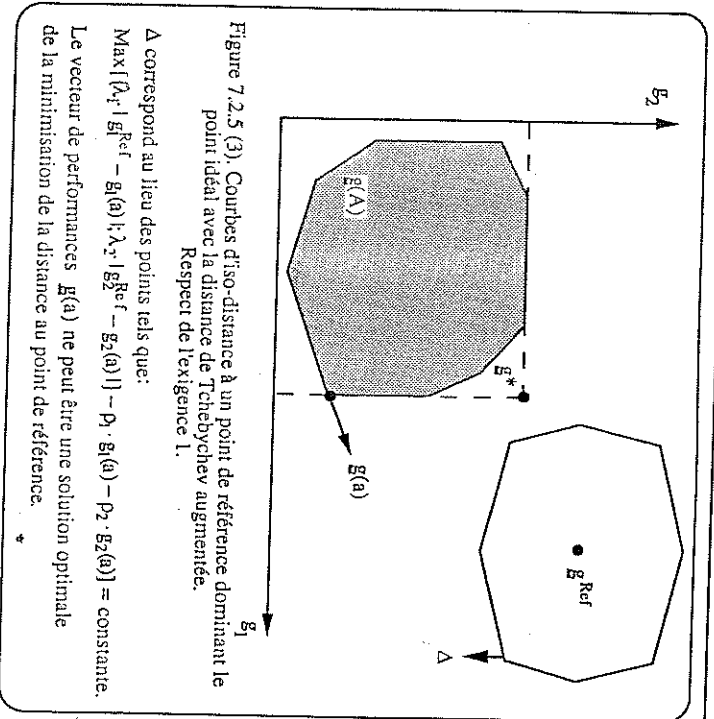


Figure 7.2.5 (2). Non respect de l'exigence 1 avec la distance de Tchebychev à un point de référence dominant le point idéal. Tous les vecteurs de performances sur le segment allant de $g(a)$ à $g(b)$ minimisent la distance au point de référence mais seul $g(b)$ est efficace.



mentée. Il faut alors recourir à d'autres types de fonctions d'agrégation temporaires. Une famille de fonctions d'agrégation temporaires particulièrement intéressante en ce sens consiste à utiliser (r.7.2.2) ou (r.7.2.3) en supprimant les valeurs absolues (sur les propriétés de telles fonctions, nous renvoyons à Vanderpooten (1990, chapitre 7)).

7.2.4 Remarques et exemples

On peut, à ce niveau, résumer les caractéristiques de toute méthode interactive en $P.\alpha$ par un certain nombre de traits distinctifs :

- nature de la proposition faite : une action ou plusieurs actions ;
- choix de la fonction d'agrégation temporaire ;
- nature des paramètres préférentiels utilisés ;
- type de questionnement utilisé dans la phase d'interrogation (a), b), ..., m)) (cf. 7.2.2.2) ;

- type de mise à jour des paramètres préférentiels à chaque itération ;
- définition de la zone d'intérêt à chaque itération ;
- nature des informations fournies dans la phase d'explication.

Sur cette base, on peut à nouveau préciser le schéma général présenté à la fin du 7.2.1.

Toute méthode interactive en $P.\alpha$ utilisant des propositions constituées d'une seule action peut, d'un point de vue technique, se ramener à un schéma du type ¹ (rappelons que la notation $a_k := \text{Arg Opt } s(a, P_k)$ signifie que a_k est une des actions de A_k telle que : $s(a_k, P_k) \geq s(a, P_k), \forall a \in A_k$, lorsque Opt signifie Max et $s(a_k, P_k) \leq s(a, P_k), \forall a \in A_k$, lorsque Opt signifie Min) :

Initialisation

$k := 1$

Choix de $P_k \in \rho$

Choix de A_k

{compteur d'itérations}
{initialisation des paramètres préférentiels}
{définition de la zone d'intérêt initiale}

Etape de calcul

$a_k := \text{Arg Opt } s(a, P_k)$

{obtention de la nouvelle proposition}

Etape de dialogue

Phase d'explication

Phase d'interrogation

La proposition a_k est-elle satisfaisante ?

Si Réponse = OUI

Fin (ou retour à l'initialisation),

Sinon

Questionnement de type a), b), ..., k)

¹ Pour des raisons de clarté, on ne détaillera pas, dans ce schéma, la phase d'explication et on n'envisagera pas la possibilité, pour l'interrogé, de réagir en modifiant la définition de A_k . En toute rigueur, il serait bon, dans ce qui suit, d'indiquer par k la fonction s_k , le type de fonction d'agrégation temporaire utilisée pouvant varier au cours de l'interaction.

Définition de $P_{k+1} \in \emptyset$ [mise à jour des paramètres préférentiels]
 Définition de A_{k+1} [mise à jour de la zone d'intérêt]
 Si $A_{k+1} = \emptyset$
 gestion de la zone d'intérêt vide.
 Fin Si
 Fin Si
 $k := k + 1$ [nouvelle itération]
 Retour à l'étape de calcul.

Ce schéma général, joint à l'ensemble des options présentées au 7.2.2 et au 7.2.3, pourrait laisser croire que la conception d'une méthode interactive consiste avant tout en un assemblage de "morceaux" venant se greffer sur un tronc commun. Concevoir, dans le détail, une méthode interactive soulève cependant de nombreux problèmes d'ergonomie, de rapidité, de cohérence comme le lecteur s'en convaincra en analysant la méthode interactive élémentaire¹ décrite formellement ci-après et que nous commenterons ensuite.

Initialisation

$k := 1$

$A_k := A$

(compteur d'itérations)

$g^{Ref} = g^*[A_k] + \underline{\varepsilon}$

[définition de la zone d'intérêt initiale : la zone d'intérêt de départ est l'ensemble A tout entier]

[définition du point de référence initial : le point de référence initial domine le point idéal]

Etape de calcul

$a_k := \text{Arg Min}_{a \in A_k} \text{Max}_{i \in F} |g_i^{Ref} - g_i(a)|$ [nouvelle proposition obtenue en minimisant une distance L_∞ au point de référence]

Etape de dialogue

Phase d'explication

Présentation du tableau des gains de A_k .

Phase d'interrogation

La proposition a_k est-elle satisfaisante ?

¹ Rappelons que $g^*[B]$ désigne le point idéal associé au sous-ensemble d'actions potentielles $B \subset A$. Dans tout ce qui suit, $\underline{\varepsilon} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)$ désignera un vecteur de \mathbb{R}^n , $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ étant "petits" et tous strictement positifs.

Si Réponse = OUI
 Fin.
 Sinon

Définir l'ensemble $J_k \subset F$ des critères sur lesquels les performances de a_k sont jugées insatisfaisantes

$A_{k+1} := \{a \in A : g_i(a) \geq g_i(a_k) + \varepsilon_i, \forall i \in J_k\}$ [question de type d)

[mise à jour de la zone d'intérêt]

Si $A_{k+1} = \emptyset$

Prévenir l'interrogé que l'on ne peut augmenter les performances de a_k sur tous les critères de J_k .

$A_{k+1} := A_k$ [gestion de zone d'intérêt vide]

Fin Si

$g^{Ref} := g^*[A_{k+1}] + \underline{\varepsilon}$ [définition du nouveau point de référence]

Fin Si

$k := k + 1$ [nouvelle itération]

Retour à l'étape de calcul.

Cette méthode élémentaire consiste :

- à définir A_k par des incréments sur les critères de J_k ;
- à retenir comme proposition dans A_k l'action qui minimise la distance de Tchebychev non pondérée au point idéal de A_k augmenté d'une petite quantité¹.

Notons que l'on peut facilement améliorer la méthode élémentaire telle qu'elle a été présentée en modifiant l'étape de calcul comme suit :

$$a_k := \text{Arg Min}_{a \in A_k} \left\{ \text{Max}_{i \in F} \lambda_i |g_i^{Ref} - g_i(a)| \right\} - \sum_{i=1}^n \varepsilon_i g_i(a)$$

où les coefficients d'importance λ_i sont définis lors de la phase d'initialisation en posant, pour $i = 1, 2, \dots, n$:

¹ Notons que la définition du point de référence permet ici de bénéficier des "bonnes propriétés" de (r.7.2.2) évoquées au 7.2.3.

$$\lambda_i = 1 / (g_i^* - g_i^{Ned})$$

Cette modification permet :

- de bénéficier des "bonnes propriétés" de (r.7.2.3) vues au 7.2.3 et
- de s'affranchir des problèmes d'échelles sur les différents critères par l'introduction des coefficients λ_i qui sont d'autant plus grands que l'écart $(g_i^* - g_i^{Ned})$ (donnant un ordre d'idée, imparfait, de la plage de variation du critère g_i sur $\text{Eff}(A)$) est faible.

On peut également rendre optionnelle la phase d'explication, ce qui a pour conséquence d'alléger le volume de calcul à effectuer.

Dans le cas où $n = 2$, on peut illustrer graphiquement ce à quoi conduit cette méthode en notant (cf. figure 7.2.5) que le lieu des points dans l'espace des critères équidistants au sens d'une métrique L_∞ (non pondérée) d'un point donné n'est autre qu'un carré centré sur ce point. Trois itérations de cette méthode élémentaire sont présentées à la figure 7.2.6 dans le cas où A a une structure continue.

L'exemple développé à la figure 7.2.6 montre clairement une des limites de la méthode proposée. Partant d'une première proposition a_1 , on souhaite augmenter les performances sur g_2 , ce qui est bien le cas avec la nouvelle proposition a_2 . L'interrogé constate alors que les performances sur g_1 se sont trop dégradées et souhaite les augmenter. Mais la nouvelle proposition a_3 , si elle est telle que $g_1(a_3) > g_1(a_2)$, est aussi telle que $g_2(a_3) < g_2(a_1)$ alors que les performances de a_1 sur g_2 avaient été jugées insatisfaisantes. On peut alors chercher à empêcher de telles situations de se produire en donnant de la "mémoire" à l'interaction en modifiant la mise à jour de la zone d'intérêt comme suit :

$$A_{k+1} := \{a \in A_k : g_i(a) \geq g_i(a_k) + \epsilon_i, \forall i \in J_k\}$$

Cependant, le prix à payer pour cette modification est important puisque, alors, tout jugement hâtif ou procédant d'un raisonnement de type essai-erreur est irrémédiablement pris en

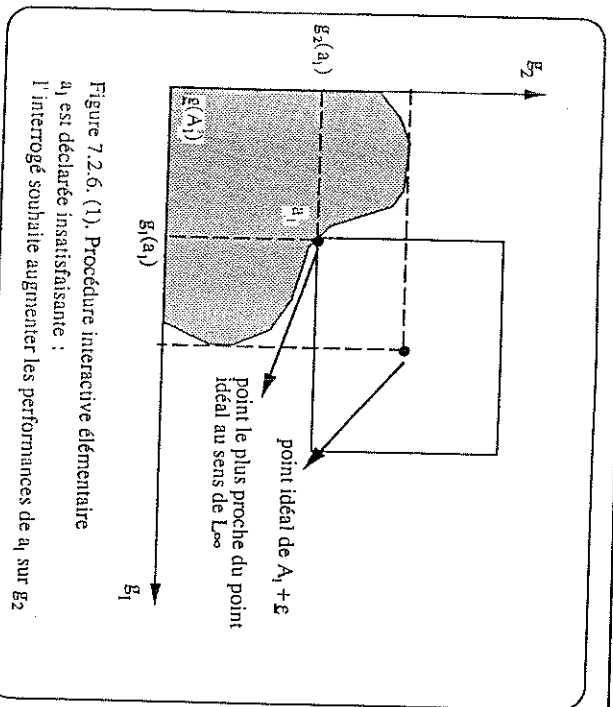


Figure 7.2.6. (1). Procédure interactive élémentaire a_1 est déclarée insatisfaisante : l'interrogé souhaite augmenter les performances de a_1 sur g_2

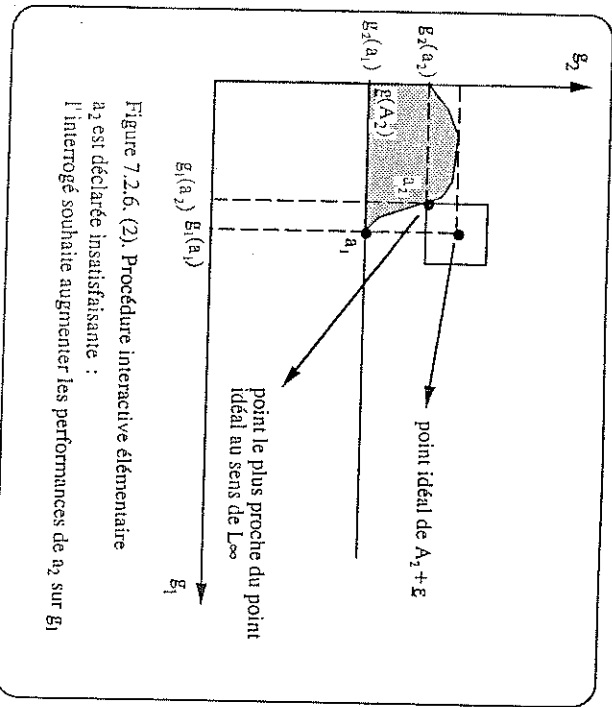


Figure 7.2.6. (2). Procédure interactive élémentaire a_2 est déclarée insatisfaisante : l'interrogé souhaite augmenter les performances de a_2 sur g_1

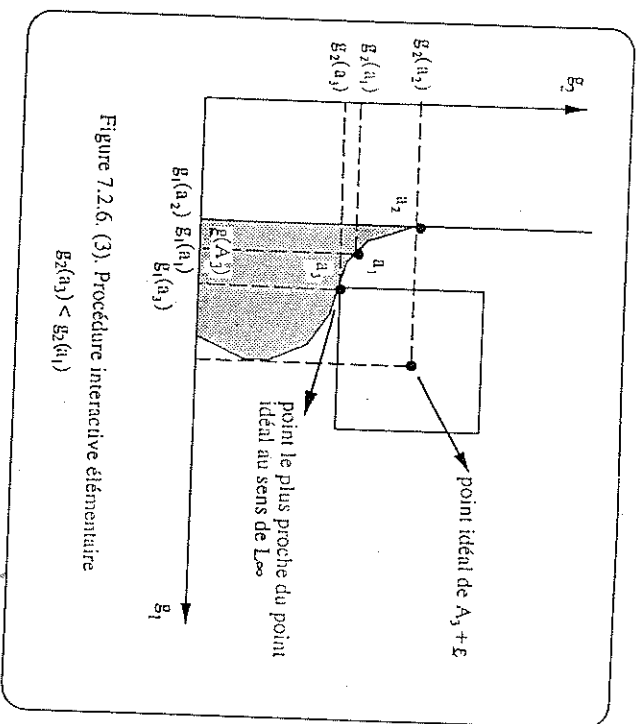


Figure 7.2.6. (3) Procédure interactive élémentaire
 $g_2(a_3) < g_2(a_1)$

compte dans la suite du processus. Mais garder la méthode en l'état ne paraît guère satisfaisant non plus, tout portant à croire que l'interrogé serait profondément troublé par ce qu'il pourrait interpréter comme étant une "incohérence" de la méthode. Des options intermédiaires entre ces deux extrêmes sont possibles (cf. 7.3), par exemple :

- en modifiant adéquatement la métrique, par le biais de coefficients d'importance accordés aux critères, à chaque itération ;
- en demandant à l'interrogé s'il est ou non certain de vouloir augmenter les performances sur certains critères ;
- en donnant au processus d'interaction une mémoire limitée empêchant des phénomènes tel que celui venant d'être décrit de se produire avant qu'un certain nombre d'itérations ne se soit écoulé.

7.3 MÉTHODES INTERACTIVES DANS UNE PROBLÉMATIQUE DE CHOIX

Comme on l'a vu au 7.2., c'est pour répondre à une problématique de choix qu'ont été développées la plupart des méthodes interactives. Elles sont très nombreuses et de nature fort variée. En tenter une présentation exhaustive sortirait du cadre du présent ouvrage. Au 7.3.1, nous avons fait le choix d'en présenter quatre en détail¹ que nous croyons représentatives de l'ensemble des méthodes proposées à ce jour. Deux d'entre elles (STEM, Geoffron-Dyer-Feinberg) sont anciennes mais ont inspiré beaucoup d'autres méthodes. Les deux autres (méthode du point de mire évolutif, méthode de Vanderpooten), plus récentes, mettent en œuvre des protocoles d'interaction d'une grande souplesse prenant largement en compte l'hypothèse 3 développée au 7.1.2. Dans un second paragraphe, on présentera plus brièvement d'autres méthodes.

7.3.1 Présentation de quelques méthodes interactives en P.α²

7.3.1.1 La méthode STEM (cf. Benayoun et al. (1971))

La méthode STEM présente, à chaque itération, une proposition à l'interrogé obtenue en minimisant une distance de Techebychev pondérée au point idéal de A (r.7.2.2). Au cas où cette proposition est jugée insatisfaisante par l'interrogé au cours de la phase de dialogue, celui-ci est invité à réagir en indiquant un critère sur lequel il serait prêt à faire une concession et en

¹ Concernant les étapes de dialogue, nous ne ferons que suggérer les lignes directrices. Rappelons (cf. 7.1.1) qu'il est essentiel, pour mettre en œuvre ces méthodes dans de bonnes conditions, de prêter beaucoup d'attention à la façon dont les questions sont formulées et à la présentation de l'information à l'utilisateur.

² La présentation de ces méthodes s'inspire en grande partie de Vanderpooten et Vincke (1989). Pour certaines méthodes, nous avons, dans un souci de simplification et de clarté, légèrement modifié la présentation qui en était faite dans les articles originaux.

indiquant la quantité maximale qu'il serait prêt à concéder sur ce critère. Cette indication est utilisée dans l'étape de calcul ultérieure pour redéfinir la zone d'intérêt (cf. 7.2.3) et modifier la pondération utilisée dans la fonction d'agrégation temporaire.

De façon plus précise, en reprenant les notations introduites au 7.2.1, la méthode STEM peut se présenter comme suit :

Initialisation

$k := 1$

Présentation du tableau des gains de A. (phase d'explication initiale)

$g_j^{Ref} := g_j^* + \varepsilon$

{compteur d'itérations}

$\alpha_j := (g_j^* - g_j^{Ned}) / |g_j^*|, j = 1, 2, \dots, n.$

{définition du point de référence}

$\lambda_j := \alpha_j / \sum_{i=1}^n \alpha_i, j = 1, 2, \dots, n.$

$A_k := A$

{initialisation des coefficients d'importance}

{définition de la zone d'intérêt initiale}

Etape de calcul

$a_k := \text{Arg Min}_{a \in A_k} \text{Max}_{j \in F} \lambda_j |g_j^{Ref} - g_j(a)|$

{nouvelle proposition obtenue en minimisant une distance de Tchebychev au point de référence}

Etape de dialogue

La proposition a_k est-elle satisfaisante ?

Si Réponse = OUI

Fin.

Sinon

Demander à l'interrogé sur quel critère $h \in F$ il accepterait de diminuer la performance de a_k pour pouvoir augmenter ses performances sur d'autres critères et d'indiquer la quantité maximale Δ_h qu'il serait prêt à concéder sur ce critère.

$A_{k+1} := \{a \in A_k : g_h(a) \geq g_h(a_k) - \Delta_h\}$

{mise à jour de la zone d'intérêt}

$\lambda_h := 0$

{définition d'une nouvelle pondération : les coefficients autres que λ_h sont inchangés}

Fin Si

$k := k + 1$

{nouvelle itération}

Retour à l'étape de calcul.

Cette méthode appelle les remarques suivantes :

a) La méthode STEM est particulièrement simple et très économe en termes de calculs. Dans le cas où A est défini par un ensemble de contraintes linéaires pesant sur des variables de décision réelles et où les critères sont des fonctions linéaires de ces variables (cadre de la programmation linéaire multicritère dans lequel la méthode fut initialement présentée), chaque étape de calcul nécessite la résolution d'un seul programme linéaire¹.

b) La méthode STEM ne favorise guère l'apprentissage par essai et erreur. Les concessions qui sont faites à chaque itération sont définitives et ne peuvent plus être remises en cause par la suite. Ce caractère définitif apparaît également dans la mise à jour de la pondération à chaque itération. Une fois une concession faite sur un critère, celui-ci est définitivement ignoré dans la suite de l'interaction. A la $n^{\text{ième}}$ itération, on a $\lambda_j = 0, \forall j \in F$ et la méthode ne peut plus progresser, même si la proposition a_n est jugée insatisfaisante.

c) Comme on l'a vu au 7.2.3, on aura intérêt à remplacer la fonction d'agrégation temporaire utilisée (métrique de Tchebychev, cf. (r.7.2.2)) par une métrique de Tchebychev augmentée (cf. (r.7.2.3)) sans que cela conduise à alourdir les calculs.

d) Dans la phase d'interrogation, STEM demande un effort cognitif important à l'interrogé. On peut penser en effet qu'il est, a priori, plus simple d'indiquer un critère sur lequel on souhaiterait augmenter les performances que d'en indiquer un sur lequel on est prêt à faire une concession. De plus, indiquer une valeur

¹ La détermination du tableau des gains de A lors de la phase d'initialisation nécessite la résolution de n programmes linéaires pour lesquels seule la fonction objectif varie.

maximale pour cette concession ne paraît pas être une tâche aisée¹. C'est là un défaut majeur de STEM qui demande une information relativement difficile qui est ensuite utilisée sans donner la possibilité à l'interrogé de revenir sur une opinion précédemment émise (à moins de reprendre la procédure depuis le début).

e) Les coefficients λ_j utilisés dans la fonction d'agrégation temporaire sont déterminés au départ pour donner un poids important aux critères pour lesquels il y a une différence importante entre le niveau idéal et le niveau nadir. Ceci peut se justifier dans la mesure où cette différence rend compte, de manière imparfaite², de l'éventail des valeurs sur ce critère pour les actions efficaces de A. Notons que, dans STEM, les coefficients λ_j ne visent pas à refléter l'importance relative que l'interrogé souhaite accorder aux divers critères.

7.3.1.2 La méthode de Geoffrion-Dyer-Feinberg (1972)

Cette méthode présente, à chaque itération, une proposition à l'interrogé qui résulte d'une amélioration de la proposition précédente le long d'une direction déterminée à l'aide de taux de substitution.

Contrairement à la méthode STEM, la méthode de Geoffrion-Dyer-Feinberg (GDF) travaille de façon essentiellement locale. Elle ne peut s'appliquer que dans le cas où A est défini en compréhension par un ensemble de contraintes pesant sur des variables de décision réelles (cf. 1.2). Une action $a \in A$ est définie au moyen d'un vecteur de m variables de décision $\underline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ (cf. exemples 3 et 11 dans MMCAD). Dans tout ce qui suit, on supposera que A est un sous-ensemble convexe et

¹ Dans leur article original, les auteurs de la méthode indiquent qu'il est possible d'assister l'interrogé en lui fournissant le résultat d'analyses de sensibilité autour de la proposition courante. Cependant, comme le font remarquer Vanderpooten et Vincke (1989), la technique proposée ne semble guère satisfaisante.

² Cf. Steuer et Gardiner (1990).

7.3.1.2

compact¹ de \mathbb{R}^m . On admettra de plus que les fonctions-critères sont toutes dérivables par rapport aux m variables de décision et on notera $g_j(\underline{x}) = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ la dérivée partielle du $j^{\text{ème}}$ critère par rapport à la $i^{\text{ème}}$ variable de décision évaluée au point $\underline{x} \in A \subset \mathbb{R}^m$.

On peut présenter la méthode GDF de la manière suivante :

Initialisation

$k := 1$,
 $\omega \in]\text{IN} \setminus \{0\}]$. [choix d'un paramètre de discrétisation]
 $\beta_0 := 0, \beta_t := \beta_{t-1} + 1/\omega, t = 1, 2, \dots, \omega$. [choix d'une discrétisation de l'intervalle $[0, 1]$]
 $\underline{z}^k \in A$ [choix arbitraire d'une proposition]

Demander à l'interrogé d'exprimer des taux marginaux de substitution $r_j(\underline{z}^k)$ ($j = 2, 3, \dots, n$) au voisinage de \underline{z}^k entre un critère de référence g_1 et tous les autres critères.

[initialisation des paramètres préférentiels]

Etape de calcul

$\xi := \text{Arg Max}_{\underline{x} \in A} \sum_{j \in F} r_j(\underline{z}^k) \cdot \left[\sum_{i=1}^m g_i'(\underline{z}^k) \cdot x_i \right]$
 $\delta_t := \xi - \underline{z}^k$ [détermination d'une direction d'amélioration]
 $\underline{x}^t := \underline{z}^k + \beta_t \cdot \delta_t, t = 1, 2, \dots, \omega$ [détermination de ω actions \underline{x}^t le long de la direction d'amélioration]

Etape de dialogue

Demander à l'interrogé de déterminer, parmi les actions \underline{x}^t ($t = 1, 2, \dots, \omega$), l'action \underline{y} qu'il préfère.

Si $\underline{y} = \underline{z}^k$ (ou si \underline{y} est jugée satisfaisante)
 Fin.

Sinon

$\underline{z}^{k+1} := \underline{y}$

Demander à l'interrogé d'exprimer des taux marginaux de substitution $r_j(\underline{z}^{k+1})$ ($j = 2, 3, \dots, n$) au voisinage de \underline{z}^{k+1}

¹ cette dernière supposition étant fort peu restrictive dans les problèmes réels.

entre un critère de référence g_1 et tous les autres critères.

Fin Si

$k := k + 1$

Retour à l'étape de calcul.

[nouvelle itération]

Cette méthode appelle les remarques suivantes :

a) Supposons que, à chaque étape de dialogue, l'interrogé réponde aux questions en termes de taux de substitution en conformité avec une fonction d'utilité

$$U(g_1(\mathbf{x}), g_2(\mathbf{x}), \dots, g_n(\mathbf{x})).$$

La méthode cherche alors, au voisinage de la proposition courante \mathbf{z}^k , à estimer le gradient de la fonction d'utilité en ce point. Notons ce gradient

$$\begin{aligned} \nabla_x [U(g_1(\mathbf{z}^k), g_2(\mathbf{z}^k), \dots, g_n(\mathbf{z}^k))] &= \nabla_x [U(\cdot)] = \\ [\partial U(\cdot)/\partial x_1; \partial U(\cdot)/\partial x_2; \partial U(\cdot)/\partial x_m]. \end{aligned}$$

Or :

$$\partial U(\cdot)/\partial x_i = \sum_{j=1}^n (\partial U(\cdot)/\partial g_j) \cdot (\partial g_j(\mathbf{z}^k)/\partial x_i).$$

$$\text{et } r_{1j}(\mathbf{z}^k) = [\partial U(\cdot)/\partial g_j] / [\partial U(\cdot)/\partial g_1].$$

Les dérivées des critères étant connues, la connaissance de $r_{1j}(\mathbf{z}^k)$ pour $j = 2, \dots, n$ permet donc d'estimer le gradient de U en ce point à un coefficient multiplicatif près. Connaissant le gradient en un point, la méthode GDF cherche alors à se déplacer linéairement de manière optimale le long de cette direction de façon tout-à-fait analogue à ce qui est fait dans l'algorithme de Frank et Wolfe (1956). C'est l'objectif de l'étape de calcul présentée plus haut.

b) Compte-tenu de ce qui précède, il résulte des propriétés de l'algorithme de Frank et Wolfe que la méthode GDF conduira un

interrogé, répondant à toutes les questions posées dans l'étape de dialogue en conformité avec une fonction d'utilité $U(g_1(\mathbf{x}), g_2(\mathbf{x}), \dots, g_n(\mathbf{x}))$ concave, vers une des actions de A donnant à cette fonction la valeur maximum. Notons néanmoins que la méthode GDF conserve tout son intérêt en-dehors de cette hypothèse très restrictive. Elle fonctionne alors comme une série de tentatives pour améliorer localement une proposition.

c) La phase d'interrogation demande à l'interrogé un effort cognitif très important. On a vu, au 4.2.1.3, que l'estimation de taux de substitution était loin d'être une tâche aisée. Notons cependant que, contrairement à ce qui était le cas dans STEM, l'information demandée par la méthode GDF ne conduit à aucune décision irrévocable et on a, tout au long de la méthode, une zone d'intérêt confondue avec l'ensemble A tout entier. Cette méthode n'exclut donc pas un apprentissage par essais-erreurs, les essais conduisant ici à explorer une certaine zone de A au voisinage de la proposition précédente. Signalons enfin que la comparaison des actions $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \dots, \mathbf{x}^\omega$ obtenues par discrétisation le long de la direction d'amélioration ne va pas sans poser de difficultés dès lors que ω dépasse quelques unités.

d) Le volume de calcul requis par la méthode reste raisonnable, particulièrement dans le cas de la programmation linéaire multicritère.

7.3.1.3 La méthode du point de mire évolutif (cf. Roy (1974b et 1976))

Cette méthode, applicable quelle que soit la nature de A , reprend certaines des caractéristiques de STEM en abandonnant toute idée d'irrévocabilité.

On peut la présenter de la manière suivante :

Initialisation

$k := 1$

Choix de \mathbf{z}^k

$A_k := A$

$\mathbf{g}^{kref} := \mathbf{g}^*[A_k] + \mathbf{e}$

[compteur d'itérations]

[initialisation des coefficients d'importance]

[définition de la zone d'intérêt initiale]

[définition du point de référence initial]

Etape de calcul

$$a_k := \text{Arg Min}_{a \in A_k} \text{Max}_{j \in F} \lambda_j^k |g_j^{\text{Ref}} - g_j(a)|$$

[nouvelle proposition obtenue en minimisant une distance de Tchebychev au point de référence]

Etape de dialogue*Phase d'explication*

Présentation du tableau des gains de A_k .

Phase d'interrogation

La proposition a_k est-elle satisfaisante ?

Si Réponse = OUI

Fin.

Sinon

Demander à l'interrogé sur quels critères $J_k \subset F$ il accepterait de diminuer les performances de a_k pour pouvoir augmenter les performances sur d'autres critères et d'indiquer la quantité maximale Δ_j qu'il est prêt à concéder sur chacun des critères $j \in J_k$.

$$A_{k+1} := \{a \in A : g_i(a) \geq g_i(a_k), \forall i \notin J_k ; g_j(a) \geq g_j(a_k) - \Delta_j, \forall j \in J_k\}$$

$$g^{\text{Ref}} := g^* [A_{k+1}] + \epsilon$$

[mise à jour de la zone d'intérêt]

$$\lambda_j^{k+1} := \alpha \lambda_j^k \text{ si } j \in J_k$$

[définition du nouveau point de référence]

$$:= \lambda_j^k \text{ sinon (avec } \alpha < 1).$$

[définition d'une nouvelle pondération]

Fin Si

$k := k + 1$

Retour à l'étape de calcul. [nouvelle itération]

Cette méthode appelle les commentaires suivants :

a) De même que pour STEM, cette méthode est particulièrement simple et économe en calcul. Ici aussi, on pourra avoir intérêt à remplacer la fonction d'agrégation temporaire utilisée (métrique de Tchebychev, cf. (r.7.2.2)) par une métrique de Tchebychev augmentée (cf. (r.7.2.3)).

b) L'information demandée dans l'étape de dialogue est de même nature que dans STEM. Cependant, l'utilisation qui en est faite ici ne conduit à aucune irrévocabilité et autorise pleinement les comportements essais-erreurs.

c) Dans la présentation initiale de la méthode, la détermination des nouvelles pondérations à chaque itération se fait en demandant à l'interrogé de déterminer, à chaque itération k , un vecteur $(\delta_1^k, \delta_2^k, \dots, \delta_n^k)$ tel que passer de $g_1(a_k)$ à $g_1(a_k) - \delta_1^k$, $g_2(a_k)$ à $g_2(a_k) - \delta_2^k$, ..., $g_n(a_k)$ à $g_n(a_k) - \delta_n^k$ constitue des "regrets équivalents" et en posant $\lambda_j^k = 1/\delta_j^k$. On pourra préférer cette façon de faire à celle, plus arbitraire, présentée plus haut, en particulier en fin de méthode, lorsque l'interrogé aura enrichi suffisamment sa perception du problème. L'impact de la modification proposée est cependant faible, l'interaction venant corriger le côté arbitraire de la modification des coefficients de pondération.

d) Dans le cas où une proposition a_k est jugée satisfaisante, la version originale de la méthode prévoit la possibilité de stocker cette proposition et de laisser à l'interrogé la possibilité de redémarrer la méthode sur de nouvelles bases, par exemple en changeant la pondération initiale. Lorsque a_k est jugée insatisfaisante, on peut prévoir de laisser à l'interrogé la possibilité d'agir sur l'ensemble A , par exemple en ajoutant des actions ou en modifiant certaines contraintes.

7.3.1.4 La méthode de Vanderpooten (1989c et 1990)

Cette méthode, tout comme la méthode du point de mire évolutif, autorise une exploration très libre de l'ensemble des actions potentielles quelle que soit la structure de cet ensemble. Cette exploration est cependant guidée de façon locale de manière à garder une certaine cohérence¹ dans la succession des propositions faites à l'interrogé. Ce guidage permet d'éviter que ne se produisent des situations tels que celles que nous avons notées à la figure 7.2.6.

¹ Dans la méthode du point de mire, la modification des coefficients λ_j^k au cours de l'étape de calcul a le même objectif.

Cette méthode présente de plus la particularité de permettre à l'interrogé de réagir de deux façons différentes aux propositions qui lui sont faites :

– soit en indiquant des critères sur lesquels il souhaite améliorer les performances de la proposition courante (question de type d) ;

– soit en indiquant, sur tout ou partie des critères, des niveaux de performances qui le satisferaient.

Pour faciliter la comparaison de cette méthode avec STEM et la méthode du point de mire, on la présentera tout d'abord dans une version simplifiée, n'autorisant que le premier des deux modes d'interaction. On la présentera ensuite de manière générale.

Dans une version simplifiée n'autorisant qu'un seul mode d'interaction, la méthode de Vanderpooten se présente comme suit¹.

Initialisation

$k := 1$

$A_k := A$

$B_k := A$

$\lambda_k := 1 / (g^* - g^{N_{\text{Mod}}})$

$g^{\text{Ref}} := g^* + \varepsilon$

{compteur d'itérations}
{définition de la zone d'intérêt initiale}
{définition de la zone d'intérêt provisoire}
{choix des coefficients d'importance}
{définition du point de référence initial}

Etape de calcul

$$a_k := \text{Arg Min}_{a \in A_k} [\text{Max}_{j \in F} \{V_j^k | g_j^{\text{Ref}} - g_j(a)\}] - \sum_{j \in F} P_j g_j(a)]$$

Etape de dialogue

Si $k > 1$

Si $a_k = a_{k-1}$

Prévenir l'interrogé que, compte-tenu de A et de l'information fournie, il n'est pas possible de proposer une action plus satisfaisante que a_{k-1} .

Fin Si

Présenter a_{k-1} et a_k à l'interrogé et lui demander l'action qu'il préfère.

Si a_k est préférée à a_{k-1}

$B_k := \{a \in A : g_j(a) \geq g_j(a_{k-1}), \forall j \in J_{k-1}\}$

Fin Si

Demander à l'interrogé quels sont les critères $L_k \subset F$

qui motivent ce jugement

$B_k := \{a \in A : g_j(a) \geq g_j(a_k), \forall j \in L_k\}$

{détermination d'une zone d'intérêt provisoire}

$a_k := a_{k-1}$

{mise à jour de la proposition courante}

Fin Si

La proposition a_k est-elle satisfaisante ?

Si Réponse = OUI

Fin.

Fin

Demander à l'interrogé de spécifier les critères $J_k \subset F$ sur lesquels il souhaite améliorer en priorité les performances de a_k

$A_{k+1} := \{a \in B_k : g_j(a) \geq g_j(a_k), \forall j \in J_k\}$

{mise à jour de la zone d'intérêt}

$g^{\text{Ref}} := g^* [A_{k+1}] + \varepsilon$

{mise à jour du point de référence}

Fin Si

$\lambda_{k+1} := 1 / (g^* - g(a_k))$

{mise à jour des coefficients d'importance}

$k := k + 1$

{nouvelle itération}

Retour à l'étape de calcul.

Dans sa version simplifiée, cette méthode appelle les remarques suivantes :

a) De même que toutes les méthodes présentées précédemment, la méthode de Vanderpooten ne requiert qu'un volume limité de calcul à chaque itération.

b) Contrairement aux méthodes présentées précédemment, la méthode de Vanderpooten utilise un protocole d'interaction axé sur l'expression d'informations qualitatives se rapportant à des critères à améliorer et/ou à des comparaisons par paires. Il s'agit

¹ De même qu'au 7.2.4, ε et P représentent des vecteurs de \mathbb{R}^p dont toutes les composantes sont strictement positives et "petites".

là d'un avantage de cette méthode. Notons cependant que cet avantage semble aller de pair avec l'utilisation de questions plus ambiguës. Par exemple, on peut se demander combien de "critères à améliorer en priorité" il est judicieux de spécifier au cours de la phase d'interrogation sachant que, sur les critères non retenus, les performances pourront baisser.

c) La méthode cherche à imposer une certaine cohérence dans la succession des propositions sans pour cela, comme dans STEM, amener à des irrévocabilités par la définition, à chaque étape, de zones d'intérêt provisoire. Telle que nous l'avons présentée, elle n'exclut que les "incohérences" flagrantes telles celles mentionnées à la figure 7.2.6.

La méthode de Vanderpoolen¹ permet également à l'interrogé de réagir à la proposition courante en indiquant, sur tout ou partie des critères, des niveaux d'exigence qui le satisferaient. Ces niveaux de performances sont utilisés pour définir un point de référence. Si ce mode d'interaction est utilisé, 7.2.3 qui permet, à la fonction d'agrégation temporaire (r.7.2.3) (utilisée dans la version simplifiée), d'avoir de "bonnes propriétés". Il faut donc ici modifier la fonction d'agrégation temporaire (r.7.2.3). Comme on l'a vu à la fin du (r.7.2.3). La méthode de Vanderpoolen se présente alors comme suit :

Initialisation
 $k := 1$
 $A_k := A$ [compteur d'itérations]
 $B_k := A$ [définition de la zone d'intérêt initiale]
 $\lambda_k := 1 / (g^* - g^{Ref})$ [définition de la zone d'intérêt provisoire]
 $g^{Ref} := g + \epsilon$ [choix des coefficients d'importance]
 [définition du point de référence initial]

Etape de calcul

$$a_k := \text{Arg Min}_{a \in A} [\text{Max}_{j \in F} \lambda_j (g_j^{Ref} - g_j(a))] - \sum_{j \in F} p_j g_j(a)$$

¹ Dans ce qui suit, nous avons légèrement simplifié cette méthode. Dans sa version originale, elle permet également la fixation de niveaux d'exigence minimale sur tout ou partie des critères au cours de l'interaction.

Etape de dialogue

Si $k > 1$

Si $a_k = a_{k-1}$

Prévenir l'interrogé que, compte-tenu de A et de l'information fournie, il n'est pas possible de proposer une action plus satisfaisante que a_{k-1} .

Fin Si

Présenter a_{k-1} et a_k à l'interrogé et lui demander l'action qu'il préfère.

Si a_k est préférée à a_{k-1}

$J_k := \{j \in J_{k-1} : g_j(a_k) \geq g_j(a_{k-1})\}$ [J_k est l'ensemble des critères sur lesquels une amélioration a été demandée et a été obtenue. J_k est confondu avec J_{k-1} si le premier mode d'interaction a été utilisé]

$B_k := \{a \in A : g_j(a) \geq g_j(a_{k-1}), \forall j \in J_k\}$ [détermination d'une zone d'intérêt provisoire]

Sinon

Demander à l'interrogé quels sont les critères $L_k \subset F$ qui motivent ce jugement

$B_k := \{a \in A : g_j(a) \geq g_j(a_k), \forall j \in L_k\}$ [détermination d'une zone d'intérêt provisoire]

$a_k := a_{k-1}$

Fin Si

Fin Si

La proposition a_k est-elle satisfaisante ?

Si Réponse = OUI

Fin.

Sinon

[deux possibilités d'interactions au choix de l'interrogé]
 Si l'interrogé utilise le premier mode d'interaction

Demander à l'interrogé de spécifier les critères $J_k \subset F$ sur lesquels il souhaite améliorer en priorité les performances de a_k

[J_k est l'ensemble des critères sur lesquels on souhaite une amélioration]

$A_{k+1} := \{a \in B_k : g_j(a) \geq g_j(a_k), \forall j \in J_k\}$ [mise à jour de la zone d'intérêt]

$g^{Ref} := g[A_{k+1}] + \epsilon$ [mise à jour du point de référence]

Sinon

Demander à l'interrogé de spécifier, sur certains critères $M_k \subset F$, les performances v_j qu'il souhaiterait atteindre

$g_j^{Ref} := v_j, \forall j \in M_k$
 $g_j^{Ref} := g_j(a_k), \forall j \in M_k$

$A_{k+1} := A$ [mise à jour du point de référence]
 $J_k := \{j \in M_k : v_j > g_j(a_k)\}$ [J_k est l'ensemble des critères sur lesquels on souhaite une amélioration]

Fin Si

Fin Si

$$\lambda^{k+1} := 1 / (\underline{g}^* - \underline{g}(a_k))$$

$$k := k + 1$$

Retour à l'étape de calcul.

[mise à jour des coefficients d'importance]
[nouvelle itération]

Cette méthode présente la particularité d'autoriser différents modes d'interaction au choix de l'interrogé. Le premier mode peut être considéré comme un mode par défaut ne requérant que de l'information qualitative, relativement simple à exprimer. Le second mode a pour but de permettre à l'interrogé, lorsqu'il le désire, d'exprimer une information plus précise.

7.3.2 Autres méthodes interactives en P.α

Le but de ce paragraphe est de décrire brièvement et de manière non formelle un certain nombre de méthodes interactives fonctionnement et les références permettant au lecteur intéressé d'en approfondir l'étude¹.

a) La méthode de Zionts et Wallenius (1976 et 1983)

Condition d'utilisation : Programmation linéaire multicritère.

Principe :

- Maximiser une somme pondérée des critères pour obtenir une proposition.
- Faire comparer cette proposition avec des actions qui lui sont voisines.
- Utiliser le résultat de ces comparaisons par paires pour introduire des contraintes sur les coefficients de la somme pondérée de manière à ce que ces coefficients soient compatibles avec les préférences exprimées. Choisir un jeu de coefficients compatible avec les contraintes et retour à la maximisation de la somme pondérée.

Commentaires :

- La méthode est restreinte au cadre de la programmation linéaire multicritère. Les propositions faites par la méthode correspondent toujours à des sommets du polyèdre des solutions réalisables (cf. 7.2.3), ce qui apparaît restrictif.

- De même que dans la méthode GDF, on peut montrer que la méthode conduit nécessairement à présenter, à un interrogé répondant aux questions posées en conformité avec une fonction d'utilité $U(g_1(x), g_2(x), \dots, g_n(x))$ possédant certaines propriétés de concavité, un des sommets du polyèdre maximisant cette fonction au bout d'un certain nombre d'itérations.

- De nombreuses extensions de cette méthode ont été proposées pour traiter le cas de la programmation linéaire entière et celui où A est défini par une liste d'actions (cf. Zionts (1977 et 1981)).

- Le volume de calcul demandé par la méthode est important. A chaque étape de dialogue, l'interrogé doit répondre à de nombreuses questions.

b) La méthode de Vincke (1976)

Condition d'utilisation : Programmation linéaire multicritère.

Principe : Déterminer une première proposition de même que dans STEM. Utiliser ensuite les facilités offertes par la méthode du simplexe en termes d'analyse de sensibilité pour déterminer une nouvelle proposition.

Commentaires : La méthode est restreinte au cadre de la programmation linéaire multicritère. Dans ce cadre, elle offre, avec un faible volume de calcul, la possibilité à l'interrogé d'explorer très librement l'ensemble A et/ou de redéfinir celui-ci.

c) La méthode du point de référence (Wierzbicki (1980 et 1982))

Condition d'utilisation : Aucune.

Principe : L'interrogé spécifique, à chaque étape de dialogue, un ou plusieurs points de référence. La phase de calcul consiste alors à déterminer une ou plusieurs propositions compte tenu des points

¹ Pour plus de détails, on pourra se reporter à Vanderpooten et Vincke (1989) ainsi qu'à Steuer (1986).

de référence.

Commentaires :

– Cette méthode, très souple, peut être mise en œuvre de bien des façons. Elle autorise une exploration très libre de l'ensemble A.

– Déterminer des points de référence à chaque étape de dialogue ne semble pas une chose aisée. L'information demandée est de nature quantitative.

– Les points de référence peuvent correspondre ou non à des actions de A. Dans le second cas, les propositions sont construites en déterminant les actions de A les plus proches du point de référence. Dans le premier, elles correspondent à des actions efficaces se situant dans la direction indiquée par les points de référence ¹.

d) *La méthode de Steuer et Chao (1983)* ²

Condition d'utilisation : Aucune.

Principe : L'étape de calcul consiste à déterminer un grand nombre d'actions efficaces en utilisant une métrique de Tchebychev augmentée (r.7.2.3) et en utilisant diverses pondérations. Ces actions sont présentées à l'interrogé qui indique celle qu'il préfère. On retourne alors à l'étape de calcul en restreignant l'ensemble des pondérations à des pondérations "proches" de celle ayant permis d'obtenir la solution préférée par l'interrogé.

Commentaires :

– Cette méthode simple requiert de nombreux calculs, à la fois pour déterminer les actions efficaces et pour choisir adéquate-

¹ On peut utiliser pour cela une des fonctions d'agrégation temporaire dont il a été question à la fin du 7.2.3, par exemple la fonction d'agrégation temporaire utilisée dans la méthode de Vanderpoolen au 7.3.1.4.

² Voir aussi Mezziani (1987) et, dans un autre contexte, la méthode FLIP de Slowinski (1990).

ment les divers jeux de pondérations de manière à bien couvrir l'ensemble des actions efficaces.

– Les possibilités d'apprentissage par essai et erreur existent dans la méthode mais sont fortement contraintes.

e) *La méthode de Korhonen et Laakso (1986)*

Condition d'utilisation : Aucune.

Principe : L'interrogé spécifique, à chaque étape, un point de référence. La comparaison entre ce point de référence et la proposition antérieure indique une direction qui est projetée sur l'ensemble des actions efficaces de A. On recherche alors une nouvelle proposition sur la courbe qui résulte de la projection.

Commentaires :

– Cette méthode est très souple et permet une exploration libre de l'ensemble A.

– De même que pour la méthode du point de référence, la détermination, à chaque étape, d'un nouveau point de référence ne va pas sans poser de problèmes.

– Tout comme dans la méthode de Zionts et Wallenius, on peut montrer que cette méthode conduit à proposer, à un interrogé répondant aux questions en conformité avec une fonction d'utilité pseudo-concave, l'action maximisant cette fonction au bout d'un certain nombre d'itérations.

f) *La méthode PRIAM (Lévine et Pomerol (1986))*

Condition d'utilisation : Ensemble A défini en extension.

Principe : Améliorer itérativement une proposition par un relèvement progressif de niveaux d'exigence minimale sur l'ensemble des critères.

Commentaires :

– La méthode autorise une exploration très libre de A et permet la mise en œuvre de raisonnements essais-erreurs par la

fixation de niveaux d'exigences révocables.

— A chaque étape de dialogue, l'interrogé doit spécifier des niveaux d'exigence minimales et indiquer si ceux-ci sont révocables ou irrévocables. Ceci suppose un effort cognitif important. La méthode assiste l'interrogé en lui fournissant le nombre d'actions dont les performances sont supérieures ou égales aux niveaux d'exigence envisagés.

— Une extension de la méthode a été proposée dans le cadre de la programmation linéaire multicritère (cf. Pomerol et Trabelsi (1987)).

7.4 MÉTHODES INTERACTIVES DANS UN PROBLÈME TRI OU DE RANGEMENT

On a évoqué, au 7.2.1, la difficulté qu'il y a à concevoir une méthode interactive en P, β et P, γ . Dans ces problématiques, les propositions faites à l'interrogé se présentent sous la forme de règles d'affectation ou de rangement, éventuellement illustrées sur un sous-ensemble de A judicieusement choisi et il n'est pas aisé de faire réagir l'interrogé sur des propositions aussi complexes. A notre connaissance, aucune méthode interactive en P, β n'a été proposée à ce jour¹. On se contentera ici de décrire brièvement une méthode interactive² en P, γ : PREFCALC³. Cette méthode repose sur un concept d'agrégation-désagrégation des préférences⁴ et sur une technique particulière de régression ordinaire⁵.

La méthode PREFCALC vise à construire, de manière interactive, une règle de classement se présentant sous la forme

¹ On pourra cependant consulter Massaglia et Ostanello (1991).

² Pour d'autres méthodes interactives en P, γ , on pourra consulter Korhonen et Soismaa (1981) ou Korhonen (1986).

³ Cf. Jaquet-Lagrèze (1983). Des propositions d'extension de cette méthode figurent dans Jaquet-Lagrèze (1990).

⁴ Cf. Jaquet-Lagrèze (1978).

⁵ Cf. Jaquet-Lagrèze et Siskos (1986) et Siskos et Yannacopoulos (1985).

d'une fonction d'utilité additive (cf. (r.4.2.1)) sur un ensemble A défini en extension. On cherche donc à construire un vrai-critère de synthèse

$$g(a) = \sum_{j=1}^n v_j g_j(a).$$

La règle de classement associée conduit alors à un s.r.p. (P, I) ayant une structure de préordre complet en posant :

$$\begin{aligned} a P b &\Leftrightarrow g(a) > g(b) \\ a I b &\Leftrightarrow g(a) = g(b). \end{aligned}$$

On a vu, au 4.2, qu'un critère de synthèse du type (r.4.2.1) peut toujours, dans les problèmes réels, se mettre sous la forme équivalente (rappelons que e_i^* et e_{j^*} désignent respectivement la meilleure et la pire évaluation sur l'échelle E_i du critère g_i) :

$$g(a) = \sum_{j=1}^n u_j(g_j(a))$$

avec

$$u_j(e_{j^*}) = 0, \forall j \in F \text{ et}$$

$$(r.7.3.1)$$

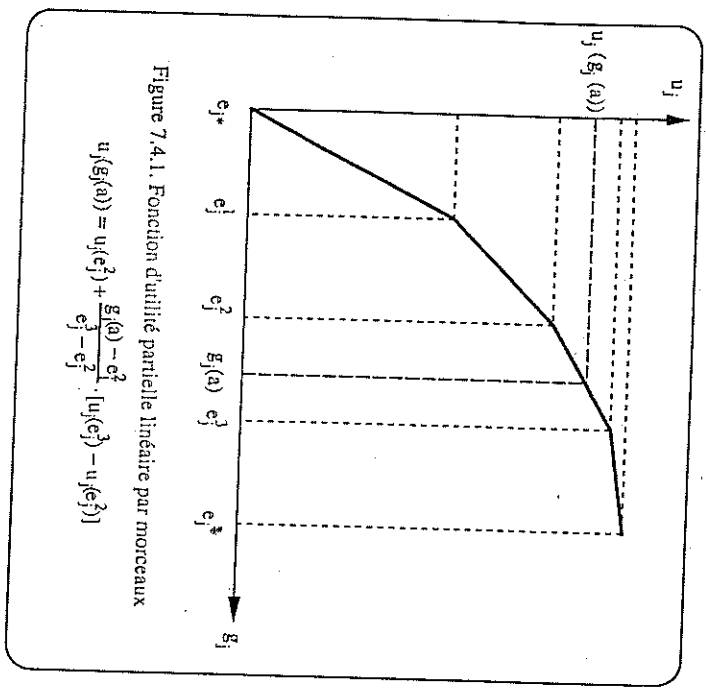
$$\sum_{j=1}^n u_j(e_j^*) = 1, \text{ les fonctions } u_j \text{ étant croissantes.}$$

La méthode PREFCALC cherchera à construire un vrai-critère de synthèse du type (r.7.3.1) où chaque fonction u_j est linéaire par morceaux. En découpant l'intervalle $[e_{j^*}; e_j^*]$ en m_j intervalles d'égale amplitude $[e_{j^*}; e_j^1]; [e_j^1; e_j^2]; \dots; [e_j^{m_j-1}; e_j^*]$, on a (cf. figure 7.4.1) :

$$u_j[g_j(a)] = u_j[e_j^k] + \frac{g_j(a) - e_j^k}{e_j^{k+1} - e_j^k} [u_j(e_j^{k+1}) - u_j(e_j^k)]$$

$$\text{lorsque } g_j(a) \in [e_j^k; e_j^{k+1}]. \quad (r.7.3.2)$$

Le vrai-critère (r.7.3.1) sera alors complètement défini par la donnée, sur chaque critère g_j , des m_j valeurs $u_j(e_j^1), u_j(e_j^2), \dots, u_j(e_j^{m_j-1}), u_j(e_j^{m_j})$. Ce sont ces $n \times m_j$ valeurs que la méthode PREF-CALC cherche à bâtir de manière interactive.

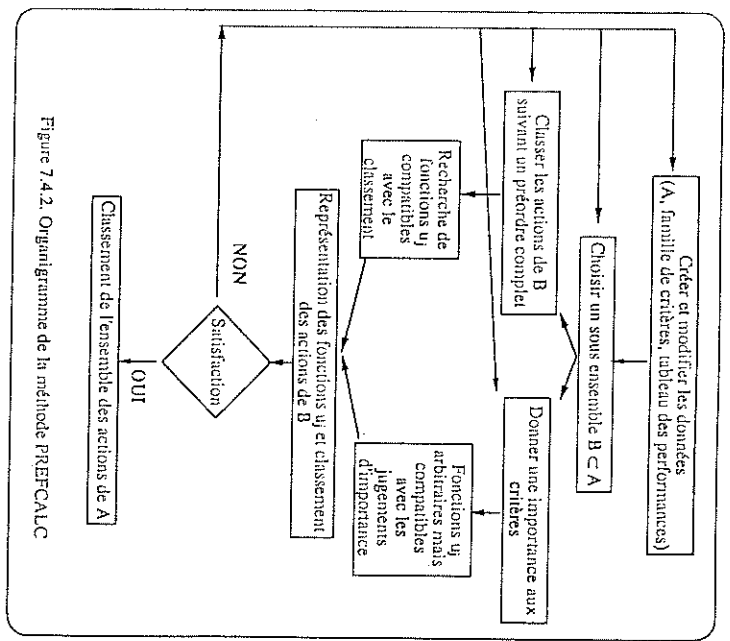


La méthode se déroule comme indiqué à la figure 7.4.2. On en détaille ci-après les principales étapes.

1) La méthode invite tout d'abord l'interrogé à choisir un sous-ensemble d'actions potentielles $B \subset A$ sur lequel les différentes règles de classement seront illustrées. Cette illustration est un élément crucial de la dynamique de l'interaction. Il importe donc que :

- le sous-ensemble B soit de taille suffisamment restreinte pour que l'illustration d'une règle de classement sur B ne constitue pas une information trop complexe ;

- le sous-ensemble B comprenne des actions dont l'interrogé a déjà une bonne connaissance.



2) Une fois choisi le sous-ensemble B, deux modes d'interaction sont proposés à l'interrogé :

- dans le mode direct, celui-ci est invité à indiquer, de manière qualitative, l'importance relative des critères ;
 - dans le mode indirect, celui-ci est invité à ranger les actions de B suivant un préordre complet.

3) La méthode fournit alors à l'interrogé une représentation graphique des fonctions u_j conforme à la figure 7.4.1 et illustre le critère de synthèse ainsi défini sur les éléments de B. C'est autour de cette représentation graphique et de cette illustration que l'interaction se déroule dans PREF-CALC.

Si l'interrogé a utilisé le mode direct, les fonctions u_j proposées ont une forme arbitraire et sont telles que :

$$g_j \text{ jugé plus important que } g_i \Rightarrow u_j(e_j^*) > u_i(e_i^*)$$

$$g_j \text{ jugé aussi important que } g_i \Rightarrow u_j(e_j^*) = u_i(e_i^*)$$

Si l'interrogé a utilisé le mode indirect en rangeant les actions de B suivant un préordre complet, on propose des fonctions u_j compatibles avec le classement proposé (en ce sens que la règle de classement qu'elles induisent donne sur B le même préordre que celui spécifié par l'interrogé).

Pour trouver une fonction d'utilité compatible avec le classement donné, on opère comme suit.

Considérons le programme linéaire suivant¹ (cf. 4.2.1.3) :

$$\begin{aligned} & \text{Min} \sum_{a \in B} \sigma(a) \\ & \text{s.c.} \sum_{j \in I} u_j(e_j^*) = 1 \\ & u_j(e_j^*) \geq u_j(e_j^{m-1}) \geq \dots \geq u_j(e_j^1) \quad (j = 1, 2, \dots, n) \\ & g(a) - g(b) \geq \varepsilon \text{ si } a \text{ est préférée à } b \\ & g(a) - g(b) = 0 \text{ si } a \text{ est indifférente à } b \end{aligned}$$

où

- ε est un nombre strictement positif et "petit",
- toutes les variables sont positives ou nulles,
- $g(a) = \sum_{j \in I} u_j(g_j(a)) + \sigma(a)$, $u_j(g_j(a))$ étant défini par (r.7.3.2).

Il est facile de montrer que si, à l'optimum, la valeur de la fonction économique de ce programme linéaire est nulle, il existe un jeu de fonctions u_j permettant de restituer parfaitement le classement des actions de B qui a été donné. Ce jeu de fonctions n'est pas unique. On sait² qu'il en existe une infinité. On pourra avoir une idée de l'ensemble des fonctions permettant de

¹ Comme le suggèrent Siskos et Yannacopoulos (1985), on peut reformuler, de manière plus économique, ce programme linéaire.

² Voir par exemple Krantz et al. (1971, chapitre 9).

restituer le classement en recourant à des techniques de post-optimisation appropriées. Lorsque, à l'optimum, la valeur de la fonction économique de ce programme linéaire est non nulle, il n'existe pas de fonctions permettant de restituer le classement donné. On peut, ici aussi, recourir à des techniques de post-optimisation pour palier l'arbitraire du critère d'optimisation utilisé. Notons que PREFCALC ne propose de fonctions u_j que si la restitution du classement donné est parfaite. La méthode propose alors une fonction "moyenne" parmi l'infinité de celles qui restituent parfaitement le classement.

4) L'interrogé est ainsi confronté à une représentation graphique des fonctions u_j , la règle de classement qu'elles induisent étant illustrée sur B. Celui-ci peut alors :

- soit accepter les fonctions proposées qui sont alors utilisées pour ranger l'ensemble des actions de A (fin de la méthode) ;
- soit réagir en¹ :
 - . modifiant le nombre de morceaux linéaires sur chaque critère,
 - . modifiant l'ensemble B,
 - . modifiant le classement des actions de B ou l'importance donnée aux divers critères,
 - . modifiant les données de départ (ensemble A, famille de critères, tableaux des performances),
 - . modifiant directement certains paramètres des fonctions u_j .

Notons que l'existence d'un logiciel convivial et performant a grandement contribué à la diffusion de cette méthode et à son application à des problèmes réels^{2 3}.

¹ L'interrogé dispose des mêmes moyens de réaction, à l'exception du dernier, si le mode indirect a été utilisé et s'il a été impossible de trouver une fonction restituant parfaitement le classement donné.

² Voir par exemple Jaquet-Lagrèze et Shakun (1984).

³ Une méthode voisine a été proposée par Yannacopoulos (1985) sous le nom de MINORA.

Jacquet-Lagrèze et al. (1987) ont proposé d'utiliser PREF-CALC pour résoudre, de manière interactive, des programmes linéaires multicritères dans une problématique de choix. Cette méthode, dite méthode en trois phases, consiste :

- à déterminer un petit nombre d'actions efficaces contrastées, par exemple en minimisant une distance de Tchebychev à un point idéal pour diverses pondérations ;
- à estimer, en utilisant PREFCALC, une fonction d'utilité additive linéaire par morceaux sur le sous-ensemble d'actions efficaces obtenu à l'étape précédente ;
- à utiliser des résultats classiques de programmation linéaire pour trouver l'optimum de la fonction d'utilité additive linéaire par morceaux sur A^1 .

¹ Voir aussi Siskos et Despois (1989). Dans la troisième phase, on n'est sûr d'obtenir un optimum global que si les fonctions d'utilité partielles sont concaves. Sur ce point, on pourra se reporter à Despois et Yannacopoulos (1989).

Chapitre 8

ANALYSE DES RÉPONSES À UN APPEL D'OFFRES : AIDE À LA SÉLECTION D'UNE MACHINE À TRIER LES PAQUETS

RÉSUMÉ

Dans ce chapitre, on présente un cas réel d'aide à la décision qui illustre bon nombre des aspects conceptuels et méthodologiques abordés dans les chapitres 1 à 6. L'environnement et l'origine de l'étude sont brièvement indiqués dans le passage introductif de ce chapitre.

Au 8.1, on expose tout d'abord le double problème d'évaluation et de sélection auquel la Direction Générale des Postes était confrontée. La section se termine en précisant comment l'action-type a été définie et quelle a été la problématique retenue.

Au 8.2, après avoir fourni quelques explications sur ce qu'est un système de tri-paquets, on expose en quoi consiste la procédure d'évaluation et la manière dont elle implique les différents services de la Poste concernés par le problème. Le dernier paragraphe de la section traite de l'élaboration des critères et de la prise en compte des sources d'imprécision, d'incertitude et d'indétermination.

La section 8.3 est tout d'abord consacrée à la démarche qui a abouti à une famille de onze, puis de douze, critères. Les neuf offres qui forment l'ensemble A ainsi que le tableau de performances associé sont ensuite présentés. La section s'achève par la discussion qui a conduit au choix de deux méthodes pour éclairer la décision.

La section 8.4 est consacrée à la mise en œuvre d'ELECTRE IS : choix des valeurs à attribuer aux coefficients d'importance k_j et aux seuils de veto v_j , application de la méthode à une première relation S de référence, finalement analyse de robustesse et principales conclusions.

Dans la dernière section, le lecteur trouvera d'une part la prescription finale de l'équipe d'étude et, d'autre part, les extraits du compte-rendu de la dernière séance du comité exposant la nature et les motifs de la décision arrêtée.