Polynômes chromatiques des graphes

Olivier Hudry

École nationale supérieure des télécommunications

Historique

* 1912 : G.D. Birkhoff tente de démontrer le théorème des quatre couleurs en étudiant le nombre de colorations d'un graphe à l'aide de *c* couleurs.

* 1932 : H. Whitney poursuit l'étude.

* 1946 : introduction des polynômes chromatiques par G.D. Birkhoff et D.C. Lewis.

* 1954 et 1970 : W.T. Tutte contribue à l'étude des polynômes chromatiques.

* 1968 : synthèse sur les polynômes chromatiques proposée par R.C. Read.

(* 1976 : méthode de K. Appel et W. Haken pour la C4C).

* 2002 : nouvelle synthèse par B. Jackson.

Définitions et notations

* $G = (X, E)$ un graphe simple fini non orienté à k composantes connexes et b blocs non réduits à des points isolés.

* Une c-coloration de G est une application C de X dans $\{1, 2, ..., c\}$ vérifiant :

$$\{x, y\} \in E \Rightarrow C(x) \neq C(y).$$

* Polynômes chromatiques :
$P(G, c)$ = nbre de c-colorations différentes de G.

* Ex.

$$P(K_n, c) = c(c-1)(c-2)...(c-n+1).$$

$$P(\overline{K}_n, c) = c^n.$$

* Rq. C4C ⁄ $\forall\, G$ planaire, $P(G, 4) \neq 0$.

* Soit $e \notin E$. On note $G + e$ le graphe obtenu en ajoutant e dans G et $G_{|e}$ le graphe obtenu en superposant les extrémités de e dans G.

* $P(G, c) = P(G + e, c) + P(G_{|e}, c)$.

Un exemple

Rappel : $P(G, c) = P(G + e, c) + P(G_{|e}, c)$.

$$
\begin{aligned}
P(G, c) &= P(K_5, c) + 2\,P(K_4, c) + P(K_3, c) \\
&= c(c-1)(c-2)(c-3)(c-4) \\
&\qquad + 2\,c(c-1)(c-2)(c-3) \\
&\qquad + c(c-1)(c-2) \\
&= c(c-1)(c-2)(c^2 - 5c + 7)
\end{aligned}
$$

Quelques propriétés générales des polynômes chromatiques

* $\chi(G) = 1 +$ plus grande racine entière de $P(G, c)$.
∅ intérêt pour les *racines chromatiques de G*.

* Si G possède q composantes connexes H_1, H_2, ..., H_q, alors :

$$P(G, c) = P(H_1, c) \infty P(H_2, c) \infty \ldots \infty P(H_q, c).$$

* Si G admet K_r comme ensemble d'articulation avec q pièces H_1, H_2, ..., H_q, alors :

$$P(G, c) = \frac{P(H_1, c) \times P(H_2, c) \times \ldots \times P(H_q, c)}{[c(c-1)(c-2)\ldots(c-r+1)]^{q-1}}.$$

Résultats sur les coefficients de $P(G, c)$

* $P(G, c)$ = polynôme de degré n et les signes des coefficients de $P(G, c)$ sont alternés.

* $P(G, c) = a_0 c^{n} - a_1 c^{n-1} + a_2 c^{n-2} - a_3 c^{n-3} + \ldots + (-1)^{n-1} a_{n-1} c + (-1)^{n} a_n$

avec $a_i \geq 0$ $(0 \leq i \leq n)$. Alors :

$$a_0 = 1 \; ; \; a_1 = m \; ; \; a_n = 0.$$

* Si H est un sous-graphe de G, alors, pour $1 \leq i \leq n - 1$, $a_i(G) \geq a_i(H)$.

D'où, pour $1 \leq i \leq n - 1$: $a_{n-i} \geq \genfrac{}{}{0pt}{}{i-1}{n-1}$.

* $a_{n-i} = \sum_{j=0}^{m} (-1)^{n-i+j} N(i, j)$ où $N(i, j)$ est le nombre de sous-graphes partiels de G à i composantes connexes et j arêtes.

• Conjecture (Read, 1968) : il existe i^* t. q.

$$a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_{i^*-1} \leq a_{i^*} \geq a_{i^*+1} \geq \ldots \geq a_{n-1}.$$

• Conjecture (Hoggar, 1974) :

$$\text{pour } 2 \leq i \leq n - 1,\ a_{i-1}\, a_{i+1} < (a_i)^2.$$

Distribution des racines chromatiques

* Pour tout G, pas de racine chromatique entière de G dans $[\chi(G), +\infty[$.

* $P(G, c)$ ne s'annule pas et est de signe $(-1)^n$ sur $]-\infty, 0[$ (Tutte, 1974).

* $P(G, c)$ admet un zéro d'ordre k en $c = 0$ (Tutte, 1974).

* $P(G, c)$ ne s'annule pas et est de signe $(-1)^{n+k}$ sur $]0, 1[$ (Tutte, 1974).

* $P(G, c)$ admet un zéro d'ordre b en $c = 1$ (Woodall, 1977).

* $P(G, c)$ ne s'annule pas et est de signe $(-1)^{n+k+b}$ sur $]1, \frac{32}{27}[$ (Jackson, 1993).

* Les racines chromatiques réelles sont denses partout dans $[\frac{32}{27}, +\infty[$ (Thomassen, 1997).

* Les racines chromatiques complexes sont denses partout dans le plan complexe (Sokal).

Résultats pour les graphes planaires G

* $P(G, c) > 0$ pour $c \in [5, +\infty[$ (Birkhoff et Lewis, 1946).

• Conjecture : $P(G, c) > 0$ pour $c \in [4, +\infty[$.

* Les racines chromatiques réelles sont denses partout dans $[\frac{32}{27}, 3]$.

• Conjecture : les racines chromatiques réelles sont denses partout dans $[\frac{32}{27}, 4]$.

* Les racines chromatiques complexes sont denses partout dans le plan complexe, sauf peut-être dans le disque $|z - 1| < 1$.

* G est un arbre $\Leftrightarrow P(G, c) = c(c - 1)^{n-1}$.

Résultats pour les graphes planaires triangulés G

* $P(G, c)$ ne s'annule pas et est de signe $(-1)^n$ sur $]1, 2[$ (Birkhoff et Lewis, 1946).

* $P(G, 2) = 0$.

* $P(G, c)$ ne s'annule pas sur $]2, \delta[$, où $\delta = 2{,}546$ est racine de $c^3 - 9c^2 + 29c - 32$ (Woodall, 1992).

* θ^2 (où θ = nombre d'or ; $\theta^2 = 1 + \theta = 2{,}61819$) n'est jamais racine, mais certains graphes planaires triangulés ont une racine qui s'approche de θ^2 :

$$0 \neq P(G, \theta^2) \leq \theta^{5-n}$$ (Tutte, 1970).

Conjectures pour les graphes planaires

* Si G est triangulé et 4-connexe, alors $P(G, c)$ s'annule au plus une fois sur $[\delta, \theta^2]$ (Woodall).

* Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un nombre fini de graphes G triangulés et 4-connexes tels que $P(G, c)$ s'annule sur $[\delta, \theta^2 - \varepsilon]$ (Woodall).

* Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un nombre fini de graphes G triangulés et 5-connexes tels que $P(G, c)$ s'annule sur $]\theta^2 + \varepsilon, 3[$ (Woodall).

* Si G est planaire et biparti, alors $P(G, c) > 0$ sur $[\theta^2, +\infty[$ (Salas et Sokal, 2001).

* Pour r entier ≥ 2, soit $b_r = 2 + 2\cos(2\pi/r)$ (nombres de Beraha). Pour tout $r \geq 2$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe un graphe planaire triangulé s'annulant sur $]b_r - \varepsilon, b_r + \varepsilon[$ (Beraha, 1975).
☛ Vrai pour $b_2 = 0$, $b_3 = 1$, $b_4 = 2$, $b_6 = 3$;
☛ Vrai pour $b_5 = \theta^2$ (Beraha, Kahane et Weiss, 1980), pour b_7 et b_{10} (Beraha, Kahane et Reid, 1973).

Problèmes ouverts divers

1. Déterminer l'expression de $P(G, c)$ pour certaines familles de graphes. Exemples :

* $P(K_n, c) = c(c-1)(c-2)...(c-n+1)$.

* $P(\overline{K}_n , c) = c^n$.

* G arbre, $P(G, c) = c(c-1)^{n-1}$.

* $P(C_n, c) = (c-1)^n + (-1)^n(c-1)$.

* Soit W_n la roue à $n - 1$ rayons (et donc à n sommets) :

$$P(W_n, c) = c(c-2)^{n-1} + (-1)^{n-1}(c-2).$$

* G connexe $\Rightarrow P(G, c) \leq c(c-1)^{n-1}$.

2. À quelle(s) condition(s) un nombre donné peut-il être racine d'un certain polynôme chromatique ?

* Exemple : 1 + θ n'est jamais racine, mais les nombres entiers positifs peuvent tous être racines chromatiques.

3. Caractérisation des polynômes qui sont chromatiques ?

4. CNS pour que deux graphes possède le même polynôme chromatique (Read, 1968) ?
Ex. : les arbres.

5. G est dit *chromatiquement unique* si $P(G, c) = P(H, c) \Rightarrow H$ isomorphe à G. Caractérisation des graphes chromatiquement uniques ?

6. Distribution des racines pour des familles de graphes. (Résultats partiels pour les graphes planaires, les graphes 3-connexes, les graphes hamiltoniens, les graphes de degré maximum borné...)

7. Liens avec d’autres types de polynômes : polynômes de flot, polynômes caractéristiques de matroïdes...

Bibliographie succincte

* C. Berge : Graphes, Gauthiers-Villars, 1983.

* G. D. Birkhoff et D. Lewis : Chromatic polynomials, Transactions of American Mathematical Society 60, 355-451, 1946.

* B. Jackson : Zeros of chromatic and flows polynomials of graphs, à paraître.

* T. R. Jensen et B. Toft : Graph coloring problems, Wiley, 1995.

* T. L. Saaty et P. C. Kainen : The four-color problem; assaults and conquest, Dover, 1977.