Modélisation et applications de la coloration de graphe ou d'hypergraphe

D. Cornaz

Equipe Combinatoire et Optimisation de Paris 6

Introduction

On étendra l'approche classique (par la programmation 0-1) pour le *problème du sous-graphe biparti arête-maximum* aux problèmes suivants :

1) Forêt induite arête-maximum

2) Sous-graphe biparti induit arête-maximum

3) Sous-graphe biparti complet (biclique) arête-maximum

4) Sous-graphe multiparti complet arête-maximum

Introduction

Ceci permet de montrer que les problèmes suivants dans $G = (V, E)$:

- Recouvrement de E par un minimum de bicliques de G
- Recouvrement de E par un minimum des multipartis complets de G

se modélisent comme un problème de

- Coloration d'un graphe sur E si G est un graphe particulier
- Coloration d'un hypergraphe sur E quand G est quelconque

Pour finir on étendra aussi l'approche classique pour le biparti maximum au problème de la **coloration de graphe ou d'hypergraphe**.

APPROCHE CLASSIQUE DU BIPARTI MAXIMUM DE $G = (V, E)$

$$\tau(\mathcal{H}) = \begin{cases} \min \quad x(E) & \text{s.c.} \\ \qquad\quad x & \in \{0,1\}^E \\ \qquad x(C) & \geq 1 \qquad\qquad \text{pour } C \in \mathcal{C} \end{cases}$$

où $\mathcal{H} = (E, \mathcal{C})$ est l'hypergraphe des cycles impairs de G.

Problème de séparation associé :

Soit $x : E \to \mathbb{R}_+$. Déterminer $C \in \mathcal{C}$ minimisant $x(C)$.

Transversal min $\Leftrightarrow$ indépendant max

Une collection $\mathcal{I}$ de sous-ensembles de E est un *système d'indépendants de* E si :

- $I \in \mathcal{I}$ et $I' \subseteq I \Rightarrow I' \in \mathcal{I}$. $(\emptyset \in \mathcal{I})$

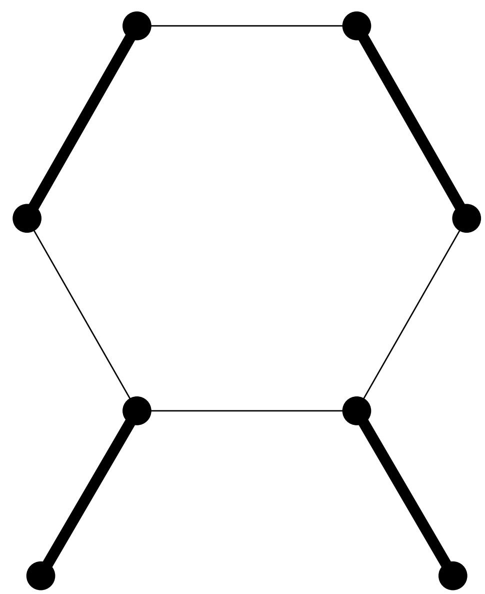
$\mathcal{C}$ est l'ensemble des *dépendants minimaux* si :

- $C \in \mathcal{C} \Rightarrow C \notin \mathcal{I}$,
- $C \in \mathcal{C}$ et $C' \subset C \Rightarrow C' \in \mathcal{I}$.

1) Forêt induite arête-maximum

$\mathcal{I} := \{F \subseteq E : F$ est **contenu** dans une forêt induite de $G\}$.

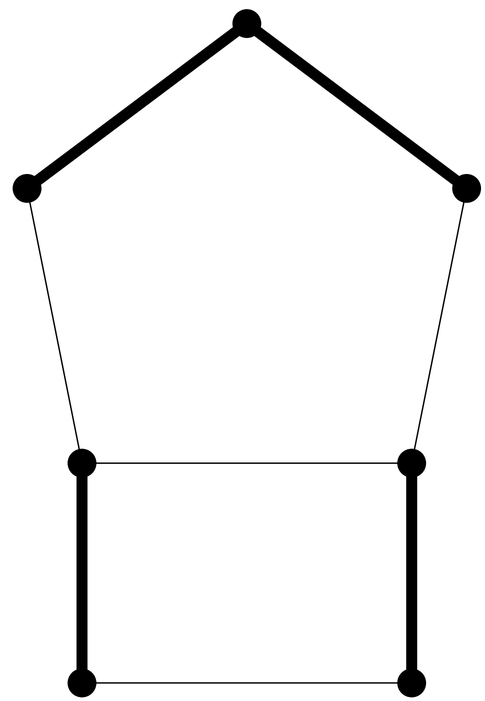
Exemple de dépendant minimal :



2) Sous-graphe biparti induit arête-maximum

$\mathcal{I} := \{F \subseteq E : F \subseteq \text{un sous-graphe biparti induit de } G\}$.

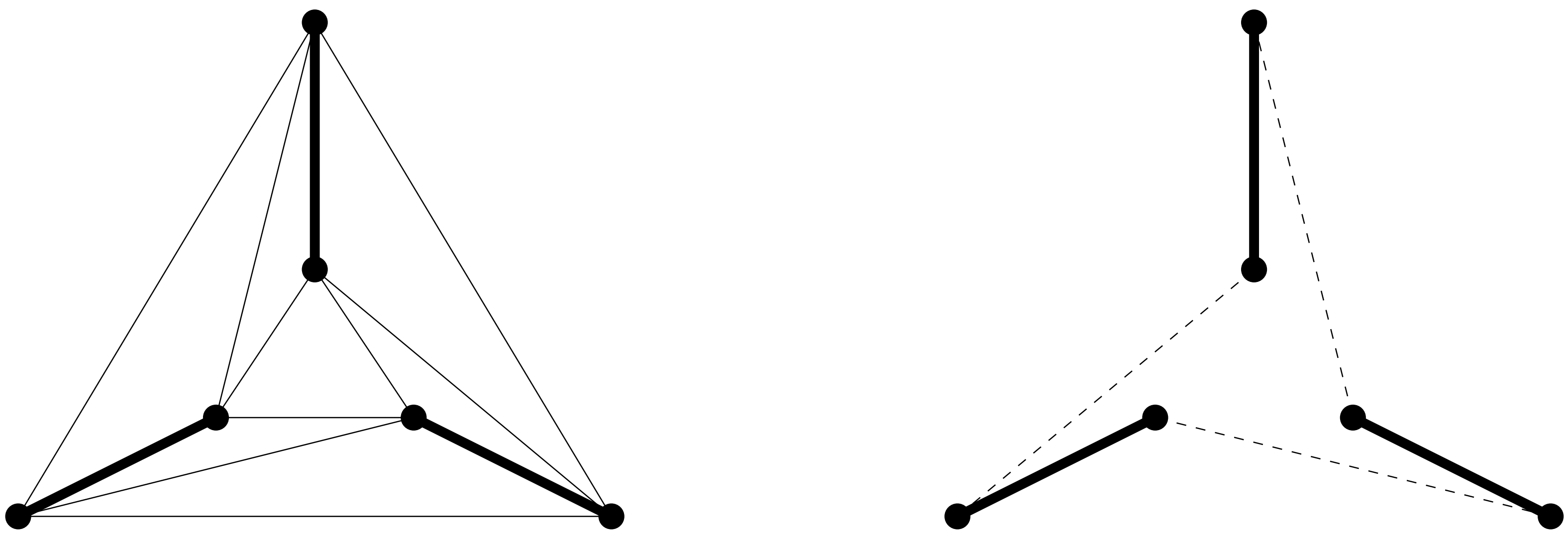
Exemple de dépendant minimal :



3) Biclique arête-maximum

$\mathcal{I} := \{F \subseteq E : F \subseteq$ un sous-graphe biparti complet de $G\}$.

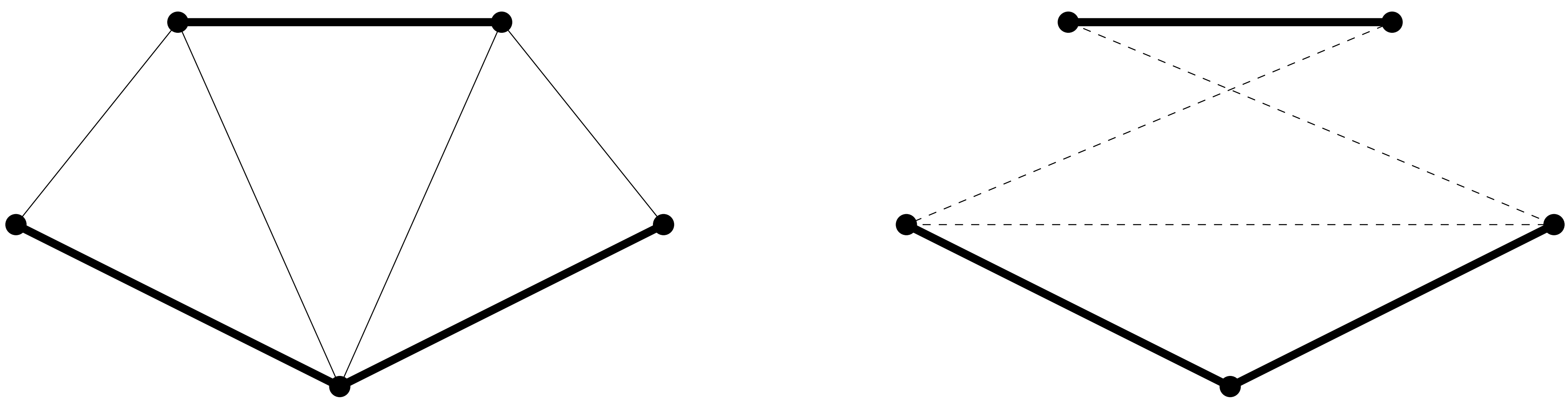
Exemple de dépendant minimal :



4) Sous-graphe multiparti complet arête-maximum

$\mathcal{I} := \{F \subseteq E : F \subseteq \text{un sous-graphe multiparti complet de } G\}$.

Exemple de dépendant minimal :



Résultats

- **Caractérisation complète des dépendants minimaux**,
- **Algorithme polynomial de séparation** (i.e. résolution du problème du dépendant de coût minimum).

Bibliographie

Chromatic characterization of biclique covers, Cornaz and Fonlupt,

A linear programming formulation for the maximum complete multipartite subgraph problem, Cornaz,

The maximum induced bipartite subgraph with edge weights, Cornaz and Mahjoub.

Coloration et recouvrement

Déterminer un **recouvrement** de E par un minimum de sous-graphes multipartis complets de $G = (V, E)$

$$\Updownarrow$$

Déterminer une **partition** minimum de E par des indépendants du système $\mathcal{I} = \{F \subseteq E : F \subseteq \text{un sous-graphe multiparti complet de } G\}$

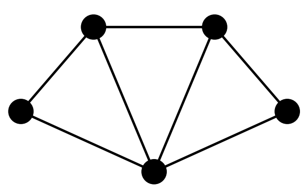
$$\Updownarrow$$

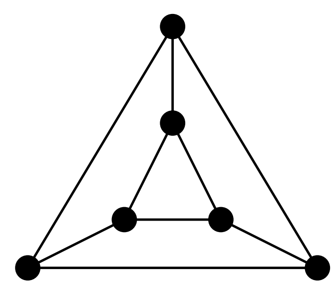
Déterminer une **coloration** minimum de l'hypergraphe $\mathcal{H} = (E, \mathcal{C})$, où $\mathcal{C}$ est l'ensemble des dépendants minimaux

Cas particulier : coloration de graphe

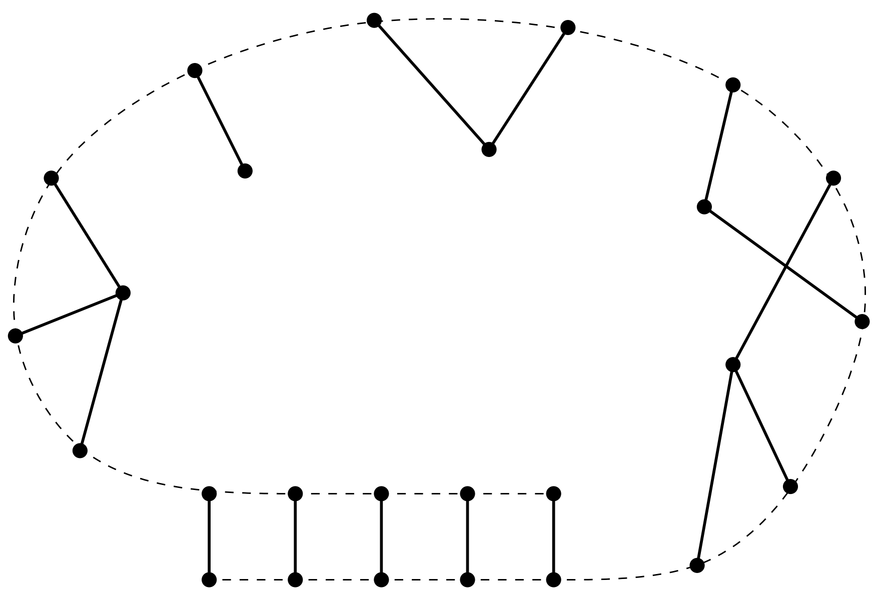
Soit $\mathcal{C}$ l'ensemble des dépendants minimaux du système
$\mathcal{I} = \{F \subseteq E : F \subseteq$ un sous-graphe multiparti complet de $G\}$.

Prop. $|C| = 2, \forall C \in \mathcal{C} \Leftrightarrow$ aucun sous-graphe induit de G n'est





hyperarête de $\mathcal{H} = (E, \mathcal{C}) \Leftrightarrow$ dependant minimal



Rq. Soit $x : E \to \mathbb{R}_+$. On peut déterminer une hyperarête C de $\mathcal{H}$ minimisant $x(C)$ en temps polynomial.

Partition minimum par des cliques (coloration de graphe)

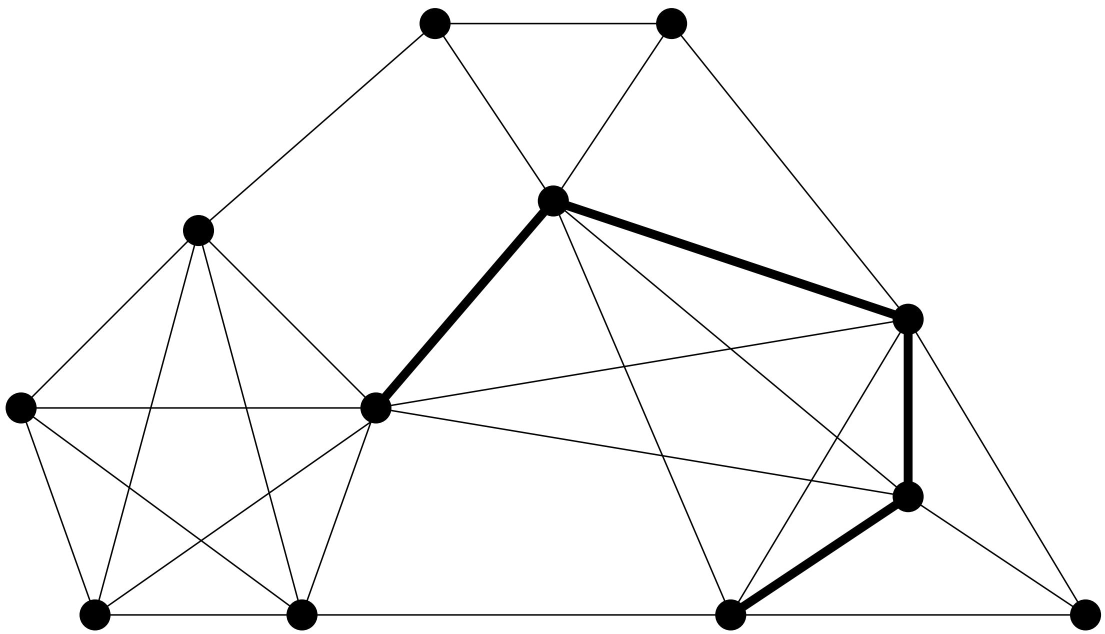
Soit $G = (V, E)$ et $F \subseteq E$.

Def. F *induit une partition par des cliques* (F *i.p.c.*) si :
(V', F') composante connexe de $(V, F) \Rightarrow V'$ clique de G.
Sinon : F *non i.p.c.*

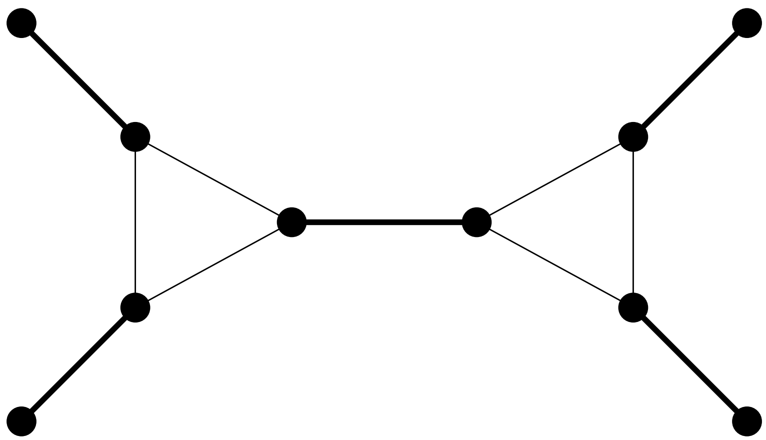
Rq. (i) $\emptyset$ *i.p.c.*
(ii) F *i.p.c.* et $F' \subseteq F \Rightarrow F'$ *i.p.c.*
(iii) $\overline{\chi}(G) \leq k \Leftrightarrow \exists\ F$ *i.p.c.* tel que (V, F) a k comp. conn.

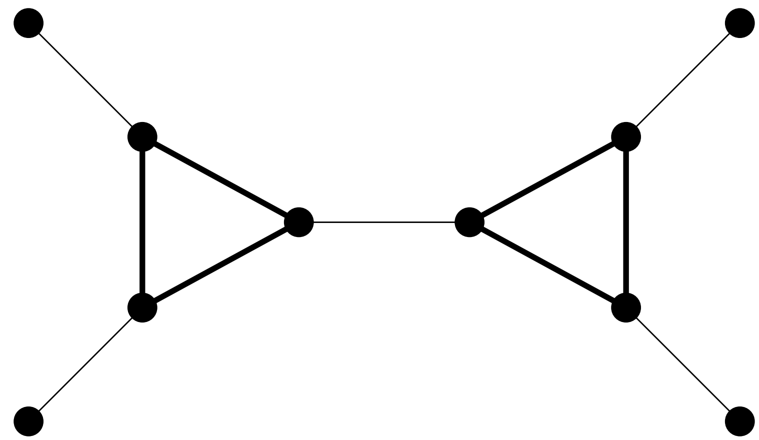
Prop. F *non i.p.c.* et, $\forall F' \subset F$, F' *i.p.c.* $\Leftrightarrow F$ est un *chemin pseudoclique.*

Chemin pseudoclique



NOMBRE DE COMPOSANTES CONNEXES DE (V, F) ET CARDINALITÉ DE F





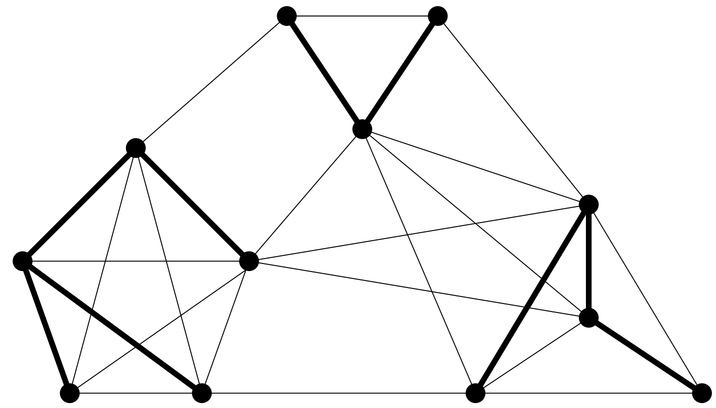
Forêts induisant une partition par clique - Transversal

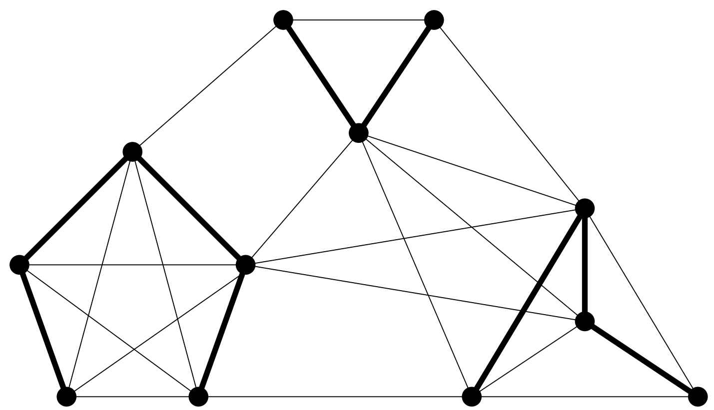
Prop. Soit F une forêt induisant une partition par clique de G de cardinalité maximum. Alors

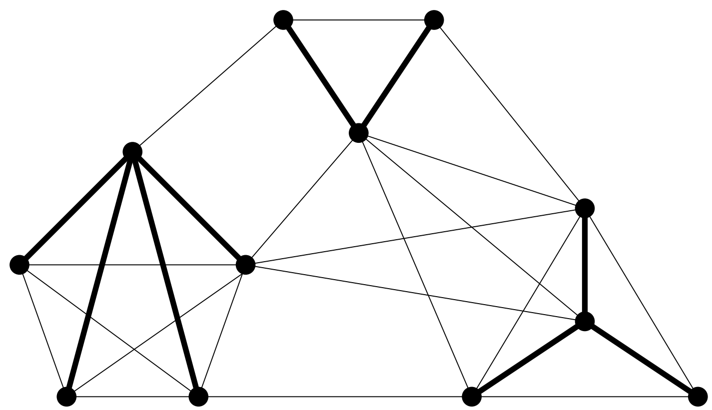
$$\overline{\chi}(G) + |F| = n.$$

Thm min-min. Soit $\hat{\mathcal{H}} = (E, \mathcal{C})$ où $\mathcal{C}$ est l'ensemble des chemins pseudocliques et des cycles (cliques) de G. Alors

$$\overline{\chi}(G) + m = n + \tau(\hat{\mathcal{H}}).$$







MODÈLE EN 0-1 POUR LA COLORATION DE GRAPHE

$$
(\mathcal{P}_I)\left\{\begin{array}{rlll}
\text{Maximiser} \quad x(E) & \text{s.c.} & & \\
x & \in \{0,1\}^E, & & (\alpha) \\
x(C) & \leq |C|-1, & \text{pour } C \in \mathcal{C}, & (\beta) \\
x(E(V')) & \leq |V'|-1, & \text{pour } V' \subseteq V, & (\gamma) \\
x(\delta(v)) & \leq 2, & \text{pour } v \in V. & (\delta)
\end{array}\right.
$$

Rq. L'optimum de $(\mathcal{P}_I)$ est $n - \overline{\chi}(G)$.

Thm. La relaxation continue de $(\mathcal{P}_I)$ est polynomiale.

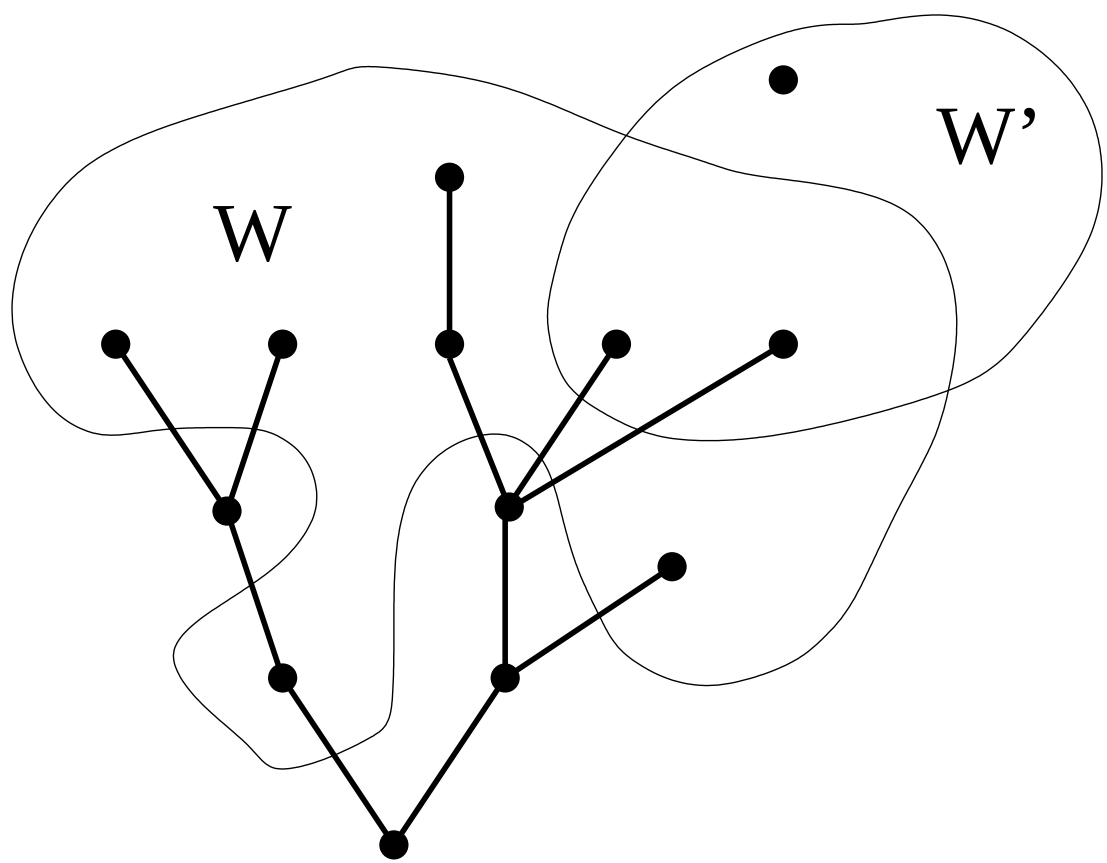
Soient

- $\mathcal{H} = (V, \mathcal{D})$ un *hypergraphe simple*
- $E = \{uv : u, v \in V, u \neq v, \{u, v\} \notin \mathcal{D}\}$

Def. $F \subseteq E$ *induit une coloration* (F *i.c.*) de $\mathcal{H}$ si :
(V', F') comp. conn. de $(V, F) \Rightarrow$ aucune hyperarête n'est dans V'.

Prop. F *non i.c.* et, $\forall F' \subset F$, F' *i.c.* si et seulement si F est un *arbre W-Steiner* où $W \in \mathcal{D}$.

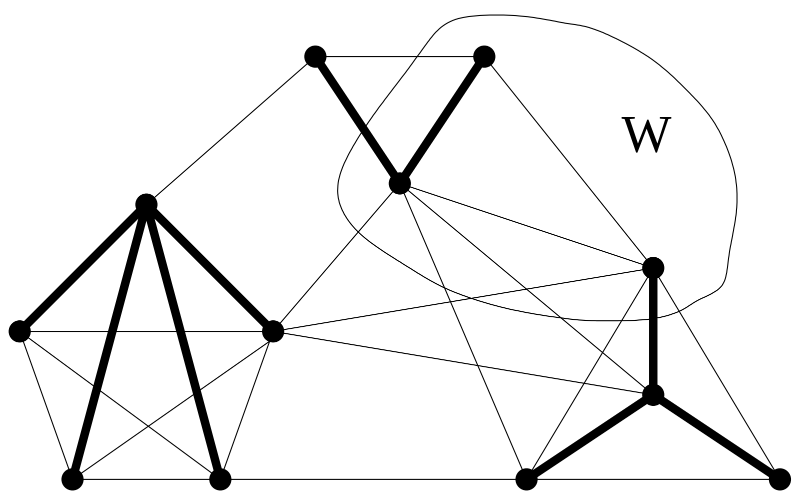
Arbre W-Steiner



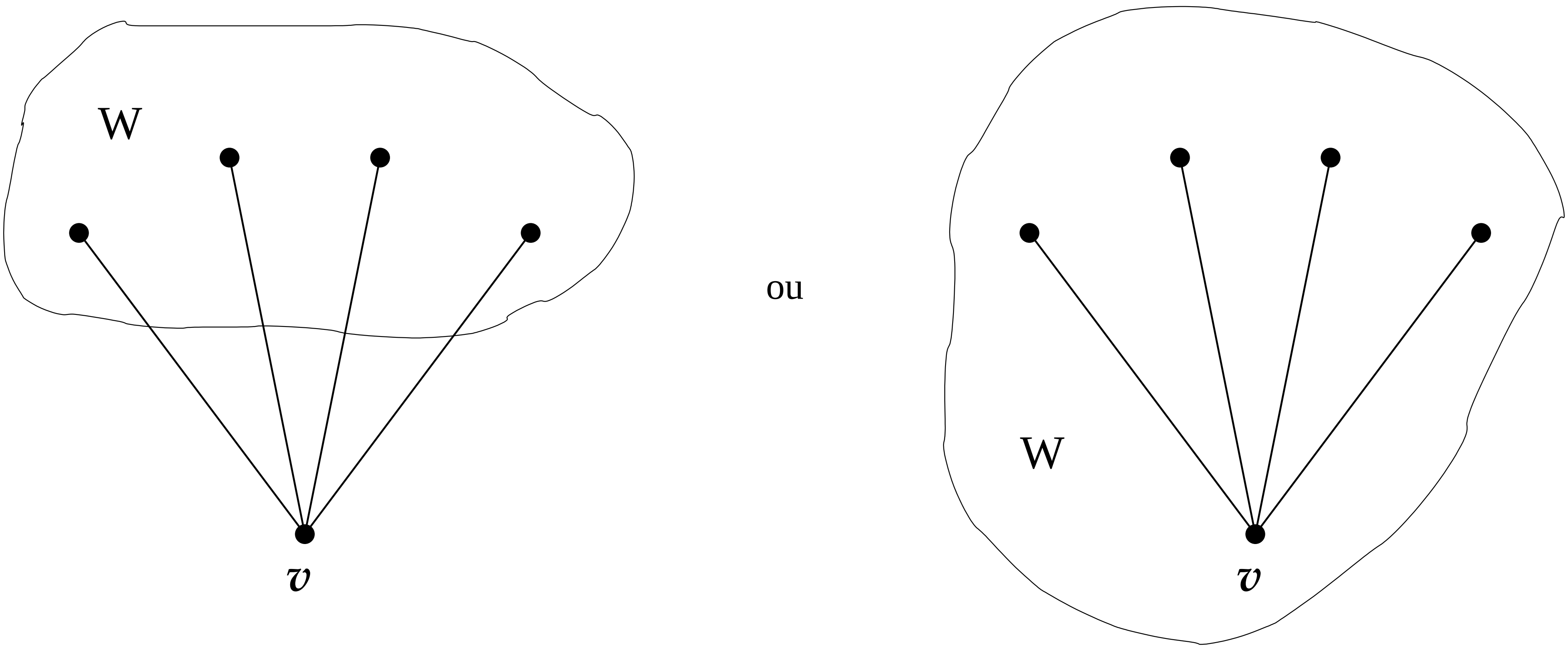
Forêts étoilées

Prop. Soit F une forêt étoilée de cardinalité maximum qui induit une coloration de $\mathcal{H}$. On a

$$\chi(\mathcal{H}) + |F| = n.$$



Ensemble $\mathcal{S}$ des étoiles W-Steiner



Soit $\mathcal{C}$ l'ensemble des P_4, des C_3 et des étoiles W-Steiner avec $W \in \mathcal{D}$.

Théorème 1. Soit $\hat{\mathcal{H}} = (E, \mathcal{C})$. Alors

$$\chi(\mathcal{H}) + m = n + \tau(\hat{\mathcal{H}}).$$

avec $m = |E|$ et $n = |V|$.

Théorème 2. La relaxation continue de

$$(\mathcal{P}_I) \begin{cases} \text{Minimiser} \quad x(E) & \text{s.c.} \\ \qquad\qquad\qquad x & \in \{0,1\}^E \\ \qquad\qquad\quad x(C) & \geq 1 \qquad\qquad \text{pour } C \in \mathcal{C} \end{cases}$$

est polynomiale si et seulement si déterminer une hyperarête $W \in \mathcal{D}$ de poids minimum est polynomial.

Preuve du théoreme 2. Séparation des contraintes $x(C) \geq 1$ pour $C \in \mathcal{S}$:

On a

$$\min_{C \in \mathcal{S}} x(C) = \min_{v \in V} \min_{W \in \mathcal{D}} c_v(W),$$

avec

$$c_v(u) = \begin{cases} 0, & \text{si } u = v, \\ x(uv), & \text{si } uv \in E, \\ +\infty, & \text{sinon.} \end{cases}$$