Analyse de sensibilité du problème du partage équitable

Perturbation du profit d'un élément

Tarik BELGACEM

CERMSEM-CNRS UMR 8095, MSE, Université de Paris 1.
106-112, boulevard de l'Hôpital, 75647 Paris.

14-ème Journées Franciliennes de Recherche Opérationnelle
Vendredi 13 janvier 2006

Plan

1. Presentation des problèmes
   - Analyse de sensibilité
   - Le problème du partage équitable
2. Perturbation du profit d'un élément quelconque
   - Formulation du problème perturbé
   - Résultats généraux
   - Détermination des limites de l'intervalle
3. Algorithme
   - Une classe optimale unique
   - Plusieurs classes optimales
4. Partie expérimentale
   - Exemple
   - Instances de la literature
5. Conclusion

Analyse de sensibilité

Qu'est ce que l'analyse de sensibilité ?

Étude de la stabilité d'une solution optimale d'un problème face à une variation des données.

Intervalle de sensibilité dans lequel les données peuvent varier sans affecter la solution optimale.

Paramétrisation -réoptimisation- la possibilité de résoudre le problème perturbé en utilisant la résolution du problème initial.

Rayon de stabilité : Soit d une distance dans $\mathbb{R}^n$, posons $d(p, p') = \rho$. Le rayon de stabilité $\rho(p)$ est la plus grande valeur de $\rho \geq 0$ tel que le problème perturbé garde la même solution optimale.

où p représente le vecteur des paramètres $(p_1, p_2, \ldots, p_n)$

Analyse de sensibilité

Qu'est ce que l'analyse de sensibilité ?

Étude de la stabilité d'une solution optimale d'un problème face à une variation des données.

Intervalle de sensibilité dans lequel les données peuvent varier sans affecter la solution optimale.

Paramétrisation -réoptimisation- la possibilité de résoudre le problème perturbé en utilisant la résolution du problème initial.

Rayon de stabilité : Soit d une distance dans $\mathbb{R}^n$, posons $d(p, p') = \rho$. Le rayon de stabilité $\rho(p)$ est la plus grande valeur de $\rho \geq 0$ tel que le problème perturbé garde la même solution optimale.

où p représente le vecteur des paramètres $(p_1, p_2, \dots, p_n)$

Analyse de sensibilité

Qu'est ce que l'analyse de sensibilité ?

Étude de la stabilité d'une solution optimale d'un problème face à une variation des données.

Intervalle de sensibilité dans lequel les données peuvent varier sans affecter la solution optimale.

Paramétrisation -réoptimisation- la possibilité de résoudre le problème perturbé en utilisant la résolution du problème initial.

Rayon de stabilité : Soit d une distance dans $\mathbb{R}^n$, posons $d(p,p') = \rho$. Le rayon de stabilité $\rho(p)$ est la plus grande valeur de $\rho \geq 0$ tel que le problème perturbé garde la même solution optimale.

où p représente le vecteur des paramètres $(p_1, p_2, \ldots, p_n)$

Analyse de sensibilité

Qu'est ce que l'analyse de sensibilité ?

Étude de la stabilité d'une solution optimale d'un problème face à une variation des données.

Intervalle de sensibilité dans lequel les données peuvent varier sans affecter la solution optimale.

Paramétrisation -réoptimisation- la possibilité de résoudre le problème perturbé en utilisant la résolution du problème initial.

Rayon de stabilité : Soit d une distance dans $\mathbb{R}^n$, posons $d(p, p') = \rho$. Le rayon de stabilité $\rho(p)$ est la plus grande valeur de $\rho \geq 0$ tel que le problème perturbé garde la même solution optimale.

où p représente le vecteur des paramètres $(p_1, p_2, ..., p_n)$

Analyse de sensibilité du problème du sac-à-dos :

- B. Thiongane, A. Nagih et G. Plateau.
  Analyse de sensibilité pour les problèmes linéaires en variables 0-1.
  RAIRO Operations Research, **vol. 37**, 291-309, 2003.

- M. Hifi, H. Mhalla and S. Sadfi.
  Sensitivity of the optimum to perturbations of the profit or weight of an item in the binary knapsack problem.
  à paraître dans *Journal of Combinatorial Optimization.*

Analyse de sensibilité du problème du sac-à-dos

Résultat 1 (Hifi *et al.* à paraître dans JOCO)

Soit $\bar{x}$ une solution optimale de l'instance KP et KP' l'instance pour laquelle le profit p_s subit une perturbation $\Delta p_s \in [\Delta_s^-; \Delta_s^+]$.
Alors, $\bar{x}$ est une solution optimale pour KP' si :

1. $\bar{x}_s = 1 : \ \Delta_s^+ = +\infty$ et $\Delta_s^- = VO(KP|\bar{x}_s = 0) - VO(KP|\bar{x}_s = 1)$.
2. $\bar{x}_s = 0 : \ \Delta_s^- = 1 - p_s$ et $\Delta_s^+ = VO(KP|\bar{x}_s = 0) - VO(KP|\bar{x}_s = 1)$.

Analyse de sensibilité du problème du sac-à-dos

Résultat 1 (Hifi *et al.* à paraître dans JOCO)

Soit $\bar{x}$ une solution optimale de l'instance KP et KP' l'instance pour laquelle le profit p_s subit une perturbation $\Delta p_s \in [\Delta_s^-; \Delta_s^+]$.
Alors, $\bar{x}$ est une solution optimale pour KP' si :

1. $\bar{x}_s = 1$: $\Delta_s^+ = +\infty$ *et* $\Delta_s^- = VO(KP|\bar{x}_s = 0) - VO(KP|\bar{x}_s = 1)$.
2. $\bar{x}_s = 0$: $\Delta_s^- = 1 - p_s$ *et* $\Delta_s^+ = VO(KP|\bar{x}_s = 0) - VO(KP|\bar{x}_s = 1)$.

$$VO(KP) = Max\left\{VO(KP|x_s = 0); VO(KP|x_s = 1)\right\}$$

Analyse de sensibilité du problème du sac-à-dos

Résultat 1 (Hifi *et al.* à paraître dans JOCO)

Soit $\bar{x}$ une solution optimale de l'instance KP et KP' l'instance pour laquelle le profit p_s subit une perturbation $\Delta p_s \in [\Delta_s^-; \Delta_s^+]$.
Alors, $\bar{x}$ est une solution optimale pour KP' si :

1. $\bar{x}_s = 1$: $\Delta_s^+ = +\infty$ *et* $\Delta_s^- = VO(KP|\bar{x}_s = 0) - VO(KP|\bar{x}_s = 1)$.
2. $\bar{x}_s = 0$: $\Delta_s^- = 1 - p_s$ *et* $\Delta_s^+ = VO(KP|\bar{x}_s = 0) - VO(KP|\bar{x}_s = 1)$.

$$VO(KP) = Max\left\{VO(KP|x_s = 0); VO(KP|x_s = 1)\right\}$$

Analyse de sensibilité du problème du sac-à-dos

Résultat 1 (Hifi *et al.* à paraître dans JOCO)

Soit $\bar{x}$ une solution optimale de l'instance KP et KP′ l'instance pour laquelle le profit p_s subit une perturbation $\Delta p_s \in [\Delta_s^-; \Delta_s^+]$.
Alors, $\bar{x}$ est une solution optimale pour KP′ si :

1. $\bar{x}_s = 1$: $\Delta_s^+ = +\infty$ et $\Delta_s^- = VO(KP|\bar{x}_s = 0) - VO(KP)$.
2. $\bar{x}_s = 0$: $\Delta_s^- = 1 - p_s$ et $\Delta_s^+ = VO(KP) - VO(KP|\bar{x}_s = 1)$.

$$VO(KP) = Max\left\{VO(KP|x_s = 0); VO(KP|x_s = 1)\right\}$$

Analyse de sensibilité du problème du sac-à-dos

Résultat 1 (Hifi *et al.* à paraître dans JOCO)

Soit $\bar{x}$ une solution optimale de l'instance KP et KP' l'instance pour laquelle le profit p_s subit une perturbation $\Delta p_s \in [\Delta_s^-; \Delta_s^+]$.
Alors, $\bar{x}$ est une solution optimale pour KP' si :

1. $\bar{x}_s = 1$: $\Delta_s^+ = +\infty$ *et* $\Delta_s^- = VO(KP|\bar{x}_s = 0) - VO(KP)$.
2. $\bar{x}_s = 0$: $\Delta_s^- = 1 - p_s$ *et* $\Delta_s^+ = VO(KP) - VO(KP|\bar{x}_s = 1)$.

Utilisation de la borne de Danzig

1. $\bar{x}_s = 1 : \Delta_s'^+ = +\infty$ et $\Delta_s'^- = UB(KP\backslash\{s\}) - VO(KP)$.
2. $\bar{x}_s = 0 : \Delta_s'^- = 1 - p_s$ et $\Delta_s'^+ = VO(KP) - UB(KP_{[c-w_s]}\backslash\{s\}) - p_s$.

$KP_{[c-w_s]}\backslash\{s\}$ représente une instance du problème du sac-à-dos obtenue à partir de KP en supprimant l'élément s et dont la capacité vaut $c - w_s$.

Le problème du partage équitable

Exemple (de T.Yammada)

Un gouvernement veut partager un budget annuel c sur ses m départements. Chaque département j, $j \in \{1, \ldots, m\}$, doit présenter un ensemble J_j de projets.

Chaque projet i est représenté par : $\begin{cases} \text{un profit} & p_i \\ \text{un coût} & w_i \end{cases}$

Pour chaque département nous définissons une fonction objectif par la somme des profits des projets acceptés.

Objectif

Distribuer équitablement le budget sur les différents département.
Maximiser la plus petite fonction objectif sans dépasser le budget.

Le problème du partage équitable

Exemple (de T.Yammada)

Un gouvernement veut partager un budget annuel c sur ses m départements. Chaque département j, $j \in \{1, ..., m\}$, doit présenter un ensemble J_j de projets.

Chaque projet i est représenté par : $\begin{cases} \text{un profit} & p_i \\ \text{un coût} & w_i \end{cases}$

Pour chaque département nous définissons une fonction objectif par la somme des profits des projets acceptés.

Objectif

Distribuer équitablement le budget sur les différents département.
Maximiser la plus petite fonction objectif sans dépasser le budget.

Formulation du problème

Hypothèse

$$\mathcal{N} = \underbrace{\overbrace{1, \ldots |J_1|}^{J_1}, \overbrace{|J_1| + 1, \ldots, |J_1| + |J_2|}^{J_2}, \ldots, \overbrace{1 + \sum_{j=1}^{m-1} |J_j|, \ldots, \sum_{j=1}^{m} |J_m|}^{J_m}}_{n \text{ éléments}}$$

Formulation mathématique

$$(KSP) \begin{cases} \text{maximiser} & \min\limits_{1 \le j \le m} \left\{ \sum\limits_{i \in J_j} p_i x_i \right\} \\ \text{s. c.} & \sum\limits_{i \in \mathcal{N}} w_i x_i \le c \\ & x_i \in \{0, 1\}, \quad \text{pour } i = 1, \ldots, n. \end{cases}$$

Formulation du problème

Hypothèse

$$\mathcal{N} = \underbrace{\overbrace{1, \ldots |J_1|}^{J_1}, \overbrace{|J_1|+1, \ldots, |J_1|+|J_2|}^{J_2}, \ldots, \overbrace{1+\sum_{j=1}^{m-1}|J_j|, \ldots, \sum_{j=1}^{m}|J_m|}^{J_m}}_{n \text{ éléments}}$$

Formulation mathématique

$$(KSP)\begin{cases} \text{maximiser} & \min_{1\leq j\leq m} \left\{\sum_{i\in J_j} p_i x_i\right\} \\ \text{s. c.} & \sum_{i\in\mathcal{N}} w_i x_i \leq c \\ & x_i \in \{0,1\}, \quad \text{pour } i = 1,\ldots,n. \end{cases}$$

Résolution

J.R. Brown.
The knapsack sharing.
Operations Research. **vol. 9**, 341-355, 1979.

T. Yamada, M. Futakawa and S. Kataoka.
Some exact algorithms for the knapsack sharing problem.
European Journal of Operational Research. **vol. 106**, 177-183, 1998.

M. Hifi and S. Sadfi.
The knapsack sharing problem : an exact algorithm.
Journal of Combinatorial Optimization. **vol. 6**, 35-54, 2002.

Résolution du *KSP* « Hifi et Sadfi. 2002 »

$\bar{x}$ une solution optimale et ℓ l'indice de la classe optimale.

$KP_i^{c_i}$ pour chaque classe i

$$\begin{cases} \text{maximiser} & \sum_{j \in J_i} p_j x_j \\ \text{s. c.} & \sum_{j \in \mathcal{J}_\rangle} w_j x_j \leq c_i \\ & x_j \in \{0, 1\}, \forall j \in J_i \end{cases}$$

Principe

- distribuer la capacité et déterminer la solution de chaque classe $KP_i^{c_i}$.
- augmenter la capacité de la classe minimale • s'arrêter si les conditions d'ordre et d'optimalité sont vérifiées.

$KP_1^{c_1}, \ldots, KP_i^{c_i}, \ldots, KP_m^{c_m}$ une décomposition de *KSP* en une série de *KP*

Résolution du *KSP* « Hifi et Sadfi. 2002 »

$\bar{x}$ une solution optimale et ℓ l'indice de la classe optimale.

$KP_i^{c_i}$ pour chaque classe i

$$\begin{cases} \text{maximiser} & \sum_{j \in J_i} p_j x_j \\ \text{s. c.} & \sum_{j \in \mathcal{J}_\rangle} w_j x_j \le c_i \\ & x_j \in \{0, 1\}, \forall j \in J_i \end{cases}$$

Principe

• distribuer la capacité et déterminer la solution de chaque classe $KP_i^{c_i}$.

• augmenter la capacité de la classe minimale • s'arrêter si les conditions d'ordre et d'optimalité sont vérifiées.

$KP_1^{c_1}, \ldots, KP_i^{c_i}, \ldots, KP_m^{c_m}$ une décomposition de *KSP* en une série de *KP*

Résolution du *KSP* « Hifi et Sadfi. 2002 »

$\bar{x}$ une solution optimale et ℓ l'indice de la classe optimale.

La condition d'ordre

$$\forall i \neq \ell, i \in \{1, ..., m\}, \quad VO(KP_{\ell}^{\bar{c}_{\ell}}) \leq VO(KP_{i}^{\bar{c}_{i}}). \tag{1}$$

La condition d'optimalité

$$\forall i \neq \ell, i \in \{1, ..., m\} : \quad VO(KP_{\ell}^{\bar{c}_{\ell}}) \geq VO(KP_{i}^{\bar{c}_{i}-1}). \tag{2}$$

où $VO(KP_{i}^{\bar{c}_{i}})$ représente la valeur de la fonction objectif du problème $KP_{i}^{\bar{c}_{i}}$.

Résolution du *KSP* « Hifi et Sadfi. 2002 »

$\bar{x}$ une solution optimale et ℓ l'indice de la classe optimale.

La condition d'ordre

$$\forall i \neq \ell, i \in \{1, ..., m\}, \quad VO(KP_{\ell}^{\bar{c}_{\ell}}) \leq VO(KP_{i}^{\bar{c}_{i}}). \tag{1}$$

La condition d'optimalité

$$\forall i \neq \ell, i \in \{1, ..., m\} : \quad VO(KP_{\ell}^{\bar{c}_{\ell}}) \geq VO(KP_{i}^{\bar{c}_{i}-1}). \tag{2}$$

où $VO(KP_{i}^{\bar{c}_{i}})$ représente la valeur de la fonction objectif du problème $KP_{i}^{\bar{c}_{i}}$.

Résolution du KSP (suite)

Considérons le couple d'entiers (p, q) réalisant :

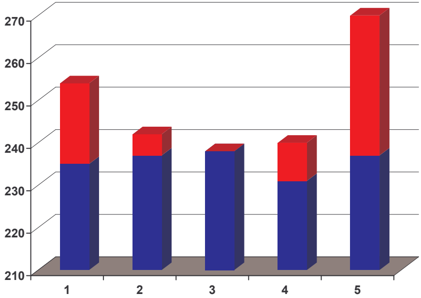
$$VO(KP_p^{\bar{c}_p}) = \min_{\substack{1 \le i \le m \\ i \ne \ell}} \left\{ VO(KP_i^{\bar{c}_i}) \right\} \quad \text{et} \quad VO(KP_q^{\bar{c}_q - 1}) = \max_{1 \le i \le m} \left\{ VO(KP_i^{\bar{c}_i - 1}) \right\}.$$

Les conditions d'ordre et d'optimalité peuvent alors s'écrire comme suit :

$$VO(KP_\ell^{\bar{c}_\ell}) \le VO(KP_p^{\bar{c}_p}) \quad \text{et} \quad VO(KP_\ell^{\bar{c}_\ell}) \ge VO(KP_q^{\bar{c}_q - 1}).$$

Classe i	1	2	3	4	5
Nb d'élés	6	7	5	7	5
$\bar{c}_i$	140	67	100	99	94
$VO(KP_i^{\bar{c}_i})$	254	242	238	240	272
$VO(KP_i^{\bar{c}_i - 1})$	235	237	238	231	237

TAB.: un partage optimal pour un petit exemple.



Plan

1 Presentation des problèmes
- Analyse de sensibilité
- Le problème du partage équitable

2 Perturbation du profit d'un élément quelconque
- Formulation du problème perturbé
- Résultats généraux
- Détermination des limites de l'intervalle

3 Algorithme
- Une classe optimale unique
- Plusieurs classes optimales

4 Partie expérimentale
- Exemple
- Instances de la literature

5 Conclusion

Formulation du problème perturbé

Notation

Considérons la nouvelle instance KSP' dans laquelle nous remplaçons le profit p_s de l'élément s appartenant à la classe t par $p_s + \Delta p_s$.

$$KSP \left\{ \begin{array}{lll} \text{maximiser} \min\limits_{1 \leq j \leq m} & \left\{ \sum\limits_{\substack{i \in J_j \\ j \neq t}} p_i x_i ; \sum\limits_{\substack{i \in J_t \\ i \neq s}} p_i x_i + p_s x_s \right\} \\ \text{s . c} & \sum\limits_{i \in \mathcal{N}} w_i x_i \leq c \\ & x_i \in \{0, 1\}, \ \text{pour } i = 1, \ldots, n. \end{array} \right.$$

Question

- Dans quel intervalle, noté $[I^-; I^+]$, le profit p_s peut-il varier pour que $\bar{x}$ reste une solution optimale pour KSP' ?

Formulation du problème perturbé

Notation

Considérons la nouvelle instance KSP' dans laquelle nous remplaçons le profit p_s de l'élément s appartenant à la classe t par $p_s + \Delta p_s$.

$$KSP' \begin{cases} \text{maximiser} \min\limits_{1\leq j\leq m} & \left\{ \sum\limits_{\substack{i\in J_j \\ j\neq t}} p_i x_i ; \sum\limits_{\substack{i\in J_t \\ i\neq s}} p_i x_i + (p_s + \Delta p_s) x_s \right\} \\ \text{s . c} & \sum\limits_{i\in\mathcal{N}} w_i x_i \leq c \\ & x_i \in \{0,1\}, \text{ pour } i = 1,\ldots,n. \end{cases}$$

Question

- Dans quel intervalle, noté $[I^-; I^+]$, le profit p_s peut-il varier pour que $\bar{x}$ reste une solution optimale pour KSP' ?

Formulation du problème perturbé

Notation

Considérons la nouvelle instance KSP' dans laquelle nous remplaçons le profit p_s de l'élément s appartenant à la classe t par $p_s + \Delta p_s$.

$$KSP' \begin{cases} \text{maximiser } \min\limits_{1 \le j \le m} & \left\{ \sum\limits_{\substack{i \in J_j \\ j \neq t}} p_i x_i ; \sum\limits_{\substack{i \in J_t \\ i \neq s}} p_i x_i + (p_s + \Delta p_s) x_s \right\} \\ \text{s . c} & \sum\limits_{i \in \mathcal{N}} w_i x_i \le c \\ & x_i \in \{0, 1\}, \text{ pour } i = 1, \ldots, n. \end{cases}$$

Question

- Dans quel intervalle, noté $[I^-; I^+]$, le profit p_s peut-il varier pour que $\bar{x}$ reste une solution optimale pour KSP' ?

Résultats généraux

Lemme (Solutions réalisables)

Les problèmes KSP et KSP' ont le même ensemble de solutions réalisables.

Proposition (Fonctions objectifs)

Soit $\bar{x}$ (resp. $\bar{x}'$) une solution optimale pour le KSP (resp. KSP').
Si $\bar{x} = \bar{x}'$ alors,

1. $VO(KSP') = VO(KSP) + \Delta p_s.\bar{x}_s$ si $t = \ell$.
2. $VO(KSP') = VO(KSP)$ si $t \neq \ell$.

Rappelons que ℓ est l'indice de la classe optimale et t celui de la classe perturbée.

Résultats généraux

Lemme (Solutions réalisables)

Les problèmes KSP et KSP' ont le même ensemble de solutions réalisables.

Proposition (Fonctions objectifs)

Soit $\bar{x}$ (resp. $\bar{x}'$) une solution optimale pour le KSP (resp. KSP').
Si $\bar{x} = \bar{x}'$ alors,

1. $VO(KSP') = VO(KSP) + \Delta p_s.\bar{x}_s$ si $t = \ell$.
2. $VO(KSP') = VO(KSP)$ si $t \neq \ell$.

Rappelons que ℓ est l'indice de la classe optimale et t celui de la classe perturbée.

Résultats généraux

Lemme (Solutions réalisables)

Les problèmes KSP et KSP' ont le même ensemble de solutions réalisables.

Proposition (Fonctions objectifs)

Soit $\bar{x}$ (resp. $\bar{x}'$) une solution optimale pour le KSP (resp. KSP').
Si $\bar{x} = \bar{x}'$ alors,

1. $VO(KSP') = VO(KSP) + \Delta p_s.\bar{x}_s$ si $t = \ell$.
2. $VO(KSP') = VO(KSP)$ si $t \neq \ell$.

Rappelons que ℓ est l'indice de la classe optimale et t celui de la classe perturbée.

Schéma de la méthode

$\bar{x}$ et l'indice s

Décomposition de l'instance KSP

$KP_1^{\bar{c}_1}, \ldots, KP_i^{\bar{c}_i}, \ldots, KP_m^{\bar{c}_m}$

Intervalle de sensibilité dans $KP_t^{\bar{c}_t}$

$[\Delta_s^-, \Delta_s^+]$

Condition d'ordre

$VO(KP_\ell^{\bar{c}_\ell}) \leq VO(KP_i^{\bar{c}_i})$

Condition d'optimalité

$VO(KP_\ell^{\bar{c}_\ell}) \geq VO(KP_i^{\bar{c}_i - 1})$

Intervalle de sensibilité dans KSP

$[I_s^-, I_s^+]$

Schéma de la méthode

$\bar{x}$ et l'indice s

↓

Décomposition de l'instance KSP

$KP_1^{\bar{c}_1}, \ldots, KP_i^{\bar{c}_i}, \ldots, KP_m^{\bar{c}_m}$

↓

Intervalle de sensibilité dans $KP_t^{\bar{c}_t}$

$[\Delta_s^-, \Delta_s^+]$

Condition d'ordre

$VO(KP_\ell^{\bar{c}_\ell}) \leq VO(KP_i^{\bar{c}_i})$

Condition d'optimalité

$VO(KP_\ell^{\bar{c}_\ell}) \geq VO(KP_i^{\bar{c}_i - 1})$

Intervalle de sensibilité dans KSP

$[I_s^-, I_s^+]$

Schéma de la méthode

$\bar{x}$ et l'indice s

↓

Décomposition de l'instance KSP

$KP_1^{\bar{c}_1}, \ldots, KP_i^{\bar{c}_i}, \ldots, KP_m^{\bar{c}_m}$

↓

Intervalle de sensibilité dans $KP_t^{\bar{c}_t}$

$[\Delta_s^-, \Delta_s^+]$

Condition d'ordre

$VO(KP_\ell^{\bar{c}_\ell}) \leq VO(KP_i^{\bar{c}_i})$

Condition d'optimalité

$VO(KP_\ell^{\bar{c}_\ell}) \geq VO(KP_i^{\bar{c}_i - 1})$

Intervalle de sensibilité dans KSP

$[I_s^-, I_s^+]$

Schéma de la méthode

$\bar{x}$ et l'indice s

Décomposition de l'instance KSP

$KP_1^{\bar{c}_1}, \ldots, KP_i^{\bar{c}_i}, \ldots, KP_m^{\bar{c}_m}$

Intervalle de sensibilité dans $KP_t^{\bar{c}_t}$

$[\Delta_s^-, \Delta_s^+]$

Condition d'ordre

$VO(KP_\ell^{\bar{c}_\ell}) \leq VO(KP_i^{\bar{c}_i})$

Condition d'optimalité

$VO(KP_\ell^{\bar{c}_\ell}) \geq VO(KP_i^{\bar{c}_i - 1})$

Intervalle de sensibilité dans KSP

$[I_s^-, I_s^+]$

Schéma de la méthode

$\bar{x}$ et l'indice s

↓

Décomposition de l'instance KSP

$KP_1^{\bar{c}_1}, \ldots, KP_i^{\bar{c}_i}, \ldots, KP_m^{\bar{c}_m}$

↓

Intervalle de sensibilité dans $KP_t^{\bar{c}_t}$

$[\Delta_s^-, \Delta_s^+]$

Condition d'ordre

$VO(KP_\ell^{\bar{c}_\ell}) \leq VO(KP_i^{\bar{c}_i})$

Condition d'optimalité

$VO(KP_\ell^{\bar{c}_\ell}) \geq VO(KP_i^{\bar{c}_i - 1})$

Intervalle de sensibilité dans KSP

$[I_s^-, I_s^+]$

s appartient à une classe optimale

Théorème 1 : $t = \ell$

1. Pour $\Delta p_s \leq 0$, nous avons
$$I^- = \begin{cases} \max\left\{\Delta_s^-,\ \Delta_{q-\ell}^{(c_q-1)-c_\ell}\right\} & \text{si} \quad \bar{x}_s = 1 \\ \Delta_s^- = 1 - p_s & \text{si} \quad \bar{x}_s = 0 \end{cases}$$

2. Pour $\Delta p_s \geq 0$, nous avons $I^+ = \begin{cases} \Delta_{p-\ell}^{c_p-c_\ell} & \text{si} \quad \bar{x}_s = 1 \\ \Delta_s^+ & \text{si} \quad \bar{x}_s = 0 \end{cases}$

$\Delta_{i-j}^{c_i-c_j} = VO(KP_i^{\bar{c}_i}) - VO(KP_j^{\bar{c}_j})$ représente l'écart entre les valeurs de la fonction objectif de $KP_i^{\bar{c}_i}$ et celle de $KP_j^{\bar{c}_j}$.

s appartient à une classe optimale

Théorème 1 : $t = \ell$

1. Pour $\Delta p_s \leq 0$, nous avons
$$I^- = \begin{cases} \max\left\{\Delta_s^-,\ \Delta_{q-\ell}^{(c_q-1)-c_\ell}\right\} & \text{si} \quad \bar{x}_s = 1 \\ \Delta_s^- = 1 - p_s & \text{si} \quad \bar{x}_s = 0 \end{cases}$$
2. Pour $\Delta p_s \geq 0$, nous avons $I^+ = \begin{cases} \Delta_{p-\ell}^{c_p-c_\ell} & \text{si} \quad \bar{x}_s = 1 \\ \Delta_s^+ & \text{si} \quad \bar{x}_s = 0 \end{cases}$

$\Delta_{i-j}^{c_i-c_j} = VO(KP_i^{\bar{c}_i}) - VO(KP_j^{\bar{c}_j})$ représente l'écart entre les valeurs de la fonction objectif de $KP_i^{\bar{c}_i}$ et celle de $KP_j^{\bar{c}_j}$.

s appartient à une classe non-optimale

Théorème 2 : $t \neq \ell$

1. Pour $\Delta p_s \leq 0$, nous avons $I^- = \begin{cases} \max\left\{\Delta_s^-,\ \Delta_{\ell-t}^{c_\ell - c_t}\right\} & \text{si} \quad \bar{x}_s = 1 \\ \Delta_s^- = 1 - p_s & \text{si} \quad \bar{x}_s = 0 \end{cases}$
2. Pour $\Delta p_s \geq 0$, nous avons $I^+ = \min\left\{\Delta_s^+,\ \Delta_{\ell-t}^{\bar{c}_\ell - (\bar{c}_t - 1)}\right\}$.

Amélioration

Si $\bar{x}_s^{\bar{c}_i - 1} = 0$: $I^+ = \min\left\{\Delta_s^+; \Delta_{\ell-t}^{c_\ell - (\bar{c}_t - 1 - w_s)} - p_s\right\}$

s appartient à une classe non-optimale

Théorème 2 : $t \neq \ell$

1. Pour $\Delta p_s \leq 0$, nous avons $I^- = \begin{cases} \max\left\{\Delta_s^-,\ \Delta_{\ell-t}^{c_\ell - c_t}\right\} & \text{si} \quad \bar{x}_s = 1 \\ \Delta_s^- = 1 - p_s & \text{si} \quad \bar{x}_s = 0 \end{cases}$
2. Pour $\Delta p_s \geq 0$, nous avons $I^+ = \min\left\{\Delta_s^+,\ \Delta_{\ell-t}^{\bar{c}_\ell - (\bar{c}_t - 1)}\right\}$.

Amélioration

Si $\bar{x}_s^{\bar{c}_i - 1} = 0$: $I^+ = \min\left\{\Delta_s^+; \Delta_{\ell-t}^{c_\ell - (\bar{c}_t - 1 - w_s)} - p_s\right\}$

s appartient à une classe non-optimale

Théorème 2 : $t \neq \ell$

1. Pour $\Delta p_s \leq 0$, nous avons $I^- = \begin{cases} \max\left\{\Delta_s^-,\ \Delta_{\ell-t}^{c_\ell - c_t}\right\} & \text{si} \quad \bar{x}_s = 1 \\ \Delta_s^- = 1 - p_s & \text{si} \quad \bar{x}_s = 0 \end{cases}$
2. Pour $\Delta p_s \geq 0$, nous avons $I^+ = \min\left\{\Delta_s^+,\ \Delta_{\ell-t}^{\bar{c}_\ell - (\bar{c}_t - 1)}\right\}$.

Amélioration

Si $\bar{x}_s^{\bar{c}_i - 1} = 0$: $\quad I^+ = \min\left\{\Delta_s^+ ; \Delta_{\ell-t}^{c_\ell - (\bar{c}_t - 1 - w_s)} - p_s\right\}$

Plan

1. Presentation des problèmes
   - Analyse de sensibilité
   - Le problème du partage équitable
2. Perturbation du profit d'un élément quelconque
   - Formulation du problème perturbé
   - Résultats généraux
   - Détermination des limites de l'intervalle
3. Algorithme
   - Une classe optimale unique
   - Plusieurs classes optimales
4. Partie expérimentale
   - Exemple
   - Instances de la literature
5. Conclusion

Algorithme

Initialisation

Entrée : $\bar{x}, \forall i \in \{1, ..., m\} : \bar{x}^{c_i - 1}$ et $s \in t$.
Sortie : L'intervalle $I_s = [I_s^- ; I_s^+]$.
Initialisation : $I_s^- = I_s^+ = 0$.

Préparation

1. Décomposer le *KSP* en une série de problèmes de sac-à-dos $KP_i^{\bar{c}_i}$.
2. Déterminer les limites $\Delta_s'^-$ and $\Delta_s'^+$ pour chaque élément s en appliquant le Résultat 1.

Soit $\mathcal{L}$ l'ensemble des classes réalisant le minimum

Algorithme (suite)

Calcul de l'intervalle : $|\mathcal{L}| = 1$

Cas 1 : $t = \ell$:

- Si $\bar{x}_s = 0$ $\quad I^- = \Delta_s'^- = 1 - p_s \quad I^+ = \Delta_s'^+$.
- Si $\bar{x}_s = 1$ $\quad I^- = \max\left\{\Delta_s'^-; \Delta_{q-\ell}^{(c_q-1)-c_\ell}\right\} \quad I^+ = \Delta_{\ell-p}^{c_\ell-c_p}$.

Cas 2 : $t \neq \ell$:

- Si $\bar{x}_s = 1$ $\quad I^- = \max\left\{\Delta_s'^-; \Delta_{\ell-t}^{c_\ell-c_t}\right\}$.
- Si $\bar{x}_s = 0$ $\quad I^- = 1 - p_s$.
- Si $\bar{x}_s^{\bar{c}_t-1} = 1$ $\quad I^+ = \min\left\{\Delta_s'^+; \Delta_{\ell-t}^{c_\ell-(c_t-1)}\right\}$.
- Si $\bar{x}_s^{\bar{c}_t-1} = 0$ $\quad I^+ = \min\left\{\Delta_s'^+; \Delta_{\ell-t}^{c_\ell-(\bar{c}_t-1-w_s)} - p_s\right\}$.

Algorithme (suite)

Calcul de l'intervalle : $|\mathcal{L}| = 1$

Cas 1 : $t = \ell$:

- Si $\bar{x}_s = 0$ $\quad I^- = \Delta_s'^- = 1 - p_s \quad I^+ = \Delta_s'^+$.
- Si $\bar{x}_s = 1$ $\quad I^- = \max\left\{\Delta_s'^-; \Delta_{q-\ell}^{(c_q-1)-c_\ell}\right\} \quad I^+ = \Delta_{\ell-p}^{c_\ell - c_p}$.

Cas 2 : $t \neq \ell$:

- Si $\bar{x}_s = 1$ $\quad I^- = \max\left\{\Delta_s'^-; \Delta_{\ell-t}^{c_\ell - c_t}\right\}$.
- Si $\bar{x}_s = 0$ $\quad I^- = 1 - p_s$.
- Si $\bar{x}_s^{\bar{c}_t - 1} = 1$ $\quad I^+ = \min\left\{\Delta_s'^+; \Delta_{\ell-t}^{c_\ell-(c_t-1)}\right\}$.
- Si $\bar{x}_s^{\bar{c}_t - 1} = 0$ $\quad I^+ = \min\left\{\Delta_s'^+; \Delta_{\ell-t}^{c_\ell-(\bar{c}_t-1-w_s)} - p_s\right\}$.

Algorithme (suite)

Calcul de l'intervalle : $|\mathcal{L}| > 1$

$t \notin \mathcal{L}$: Appliquer le Théorème 2.

$t \in \mathcal{L}$: $\bar{x}_s = 0$: Utiliser les résultats du Théorème 1.

$\bar{x}_s = 1$:

- Considérons le résidu $\hat{c}_j = \bar{c}_j - \sum_{i \in J_j} w_i \bar{x}_i$.
- Poser $\bar{c}_t \leftarrow \bar{c}_t - \hat{c}_t$
- Appliquer le résultat suivant :

Théorème

Soit $t \in \mathcal{L}$ et $\bar{x}_s = 1$. Alors,

$$I^- = \max\left\{\Delta_s^-; \Delta_{p-t}^{(\bar{c}_p - 1) - \bar{c}_t}\right\} \quad \text{et} \quad I^+ = \min\left\{\Delta_s^+; \Delta_{\ell - t}^{\bar{c}_\ell - (\bar{c}_t - 1)}\right\}.$$

Algorithme (suite)

Calcul de l'intervalle : $|\mathcal{L}| > 1$

$t \notin \mathcal{L}$: Appliquer le Théorème 2.

$t \in \mathcal{L}$: $\bar{x}_s = 0$: Utiliser les résultats du Théorème 1.

$\bar{x}_s = 1$:

- Considérons le résidu $\hat{c}_j = \bar{c}_j - \sum\limits_{i \in J_j} w_i \bar{x}_i$.
- Poser $\bar{c}_t \leftarrow \bar{c}_t - \hat{c}_t$
- Appliquer le résultat suivant :

Théorème

Soit $t \in \mathcal{L}$ et $\bar{x}_s = 1$. Alors,

$$I^- = \max\left\{\Delta_s^-; \Delta_{p-t}^{(\bar{c}_p - 1) - \bar{c}_t}\right\} \quad \text{et} \quad I^+ = \min\left\{\Delta_s^+; \Delta_{\ell-t}^{\bar{c}_\ell - (\bar{c}_t - 1)}\right\}.$$

Algorithme (suite)

Calcul de l'intervalle : $|\mathcal{L}| > 1$

$t \notin \mathcal{L}$: Appliquer le Théorème 2.

$t \in \mathcal{L}$: $\bar{x}_s = 0$: Utiliser les résultats du Théorème 1.

$\bar{x}_s = 1$:

- Considérons le résidu $\hat{c}_j = \bar{c}_j - \sum_{i \in J_j} w_i \bar{x}_i$.
- Poser $\bar{c}_t \leftarrow \bar{c}_t - \hat{c}_t$
- Appliquer le résultat suivant :

Théorème

Soit $t \in \mathcal{L}$ et $\bar{x}_s = 1$. Alors,

$$I^- = \max\left\{\Delta_s^-; \Delta_{p-t}^{(\bar{c}_p - 1) - \bar{c}_t}\right\} \quad \text{et} \quad I^+ = \min\left\{\Delta_s^+; \Delta_{\ell-t}^{\bar{c}_\ell - (\bar{c}_t - 1)}\right\}.$$

Plan

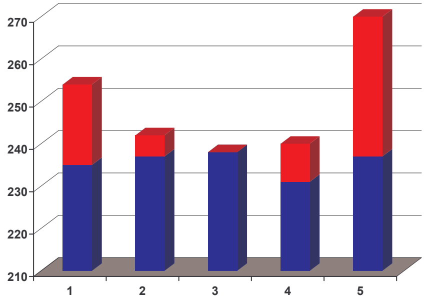
1. Presentation des problèmes
   - Analyse de sensibilité
   - Le problème du partage équitable
2. Perturbation du profit d'un élément quelconque
   - Formulation du problème perturbé
   - Résultats généraux
   - Détermination des limites de l'intervalle
3. Algorithme
   - Une classe optimale unique
   - Plusieurs classes optimales
4. Partie expérimentale
   - Exemple
   - Instances de la literature
5. Conclusion

Exemple

Considérons un exemple caractérisé par 30 éléments distribués sur 5 classes avec une capacité $c = 500$:

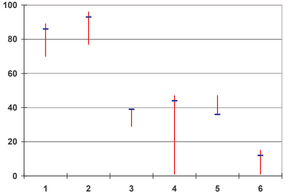
Class i	1	2	3	4	5
Nb of items	6	7	5	7	5
$\bar{c}_i$	140	67	100	99	94
$VO(KP_{J_i}^{c_i})$	254	242	238	240	272
$VO(KP_{J_i}^{c_i-1})$	235	237	238	231	237

TAB.: un partage équitable pour un petit exemple.

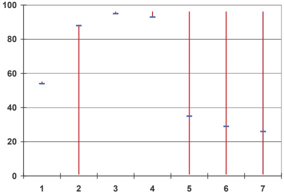


Légende : • : $VO(KP_{J_i}^{c_i-1})$ • : $VO(KP_{J_i}^{c_i}) - VO(KP_{J_i}^{c_i-1})$

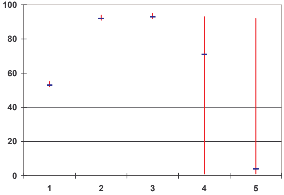
Exemple (suite)



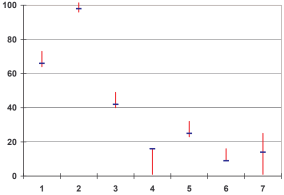
Classe 1



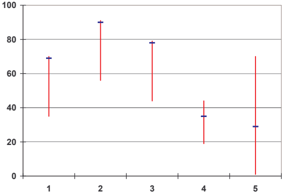
Classe 2



Classe 3



Classe 4



Classe 5

Légende : – : profit de l'élément — : Intervalle de sensibilité du profit.

Instances prises de http ://www.laria.u-picardie.fr/hifi/OR-Benchmark/

Instance	$\bar{\Delta}$	*gap*	$\bar{Pr}$
A20.1	97.40	2.512	99.67
A30.1	97.90	4.088	99.69
A40.1	96.95	4.268	99.55
A50.3	97.45	5.028	99.56
E20.1	99.45	1.010	99.96
E30.2	99.58	1.103	99.98
E40.2	98.46	1.182	99.96
E50.3	98.46	1.190	99.95
F20.2	98.12	1.000	99.94
F30.4	99.52	1.026	99.97
F40.4	98.26	1.050	99.95
F50.4	99.43	1.110	99.97

TAB.: analyse de sensibilité pour des grandes instances.

Considérons les paramètres suivant :

$$\bar{\Delta} = 100.(n - \delta)\backslash n$$

$$gap = \frac{\sum_{s=1}^{n}(I_s \ \text{Calculé} - I_s \ exacte)}{\delta}$$

$$\bar{Pr} = 100 \times \left(\frac{1}{n}\sum_{s=1}^{n}\frac{I_s \ \text{Calculé}}{I_s \ exacte}\right).$$

où δ est le nombre d'éléments pour lesquels la limite exacte est atteinte.

Plan

1. Presentation des problèmes
   - Analyse de sensibilité
   - Le problème du partage équitable
2. Perturbation du profit d'un élément quelconque
   - Formulation du problème perturbé
   - Résultats généraux
   - Détermination des limites de l'intervalle
3. Algorithme
   - Une classe optimale unique
   - Plusieurs classes optimales
4. Partie expérimentale
   - Exemple
   - Instances de la literature
5. Conclusion

Conclusion : Tarik.Belgacem@univ-paris1.fr

Récapitulatif

- Déterminer un algorithme polynomial pour le calcule de l'intervalle de sensibilité.
- Évaluation de la performance de la procédure sur un ensemble d'instances de grande taille de la littérature.

Autres résultats

Analyse de sensibilité pour la perturbation du

- poids d'un élément dans un KSP.
- profit ou poids d'un sous ensemble d'éléments dans un KP.

Perspective

- Comment déduire la nouvelle solution optimale quand le profit dépasse les limites de l'intervalle de sensibilité ?
- Analyser la sensibilité d'autres problèmes de types sac-à-dos et plus généralement, d'autres problèmes d'optimisation combinatoire.