INSPIRING INNOVATION | INNOVANTE PAR TRADITION

Ecole Nationale Supérieure des Mines SAINT-ETIENNE

www.emse.fr

JFRO, le 06 mars 2009

Branch and Price and Cut pour des problèmes de transport de biens ou de personnes

D. FEILLET- ECOLE DES MINES DE SAINT-ETIENNE

MINISTÈRE DE L'ÉCONOMIE DES FINANCES ET DE L'INDUSTRIE

Plan

- Branch and Cut and Price
  - Introduction
  - Proposition d'une méthodologie

- Trois cas d'études
  - Problème de tournées avec fractionnement des livraisons
  - Problème de tournées avec routes multiples
  - Problème du transMilenio (Bogota)

Génération de colonnes

Ensemble initial de colonnes Ω_0
i=0
Répéter
    Résoudre LP(Ω_i)
    ω = {colonnes retournées par le sous-problème}
    $\Omega_{i+1} \leftarrow \Omega_i \cup \omega$
    $i \leftarrow i+1$
Tant que $\omega \neq \emptyset$

Algorithme de génération de colonnes

Remarque : on obtient une borne uniquement à la dernière itération

Plans coupants

Ensemble initial de coupes Ψ_0
i=0
Répéter
    Résoudre LP(Ψ_i)
    ψ = {coupes retournées par les algorithmes de séparation}
    $\Psi_{i+1} \leftarrow \Psi_i \cup \psi$
    $i \leftarrow i+1$
Tant que $\psi \neq \emptyset$

Algorithme de plans coupants

Remarque : toutes les itérations fournissent une borne, on stoppe quand on veut

Génération de colonnes et de coupes

Ensemble initial de colonnes Ω_0
Ensemble initial de coupes Ψ_0
i=0
Répéter
    Résoudre MP(Ω_i,Ψ_i)
    ω = {colonnes retournées par le sous-problème}
    Si **CONDITION**, ψ = {coupes retournées par les algorithmes de séparation} sinon $\psi \neq \emptyset$
    $\Omega_{i+1} \leftarrow \Omega_i \cup \omega$
    $\Psi_{i+1} \leftarrow \Psi_i \cup \psi$
    $i \leftarrow i+1$
Tant que $\omega \neq \emptyset$ ou $\psi \neq \emptyset$

Schéma général de génération de colonnes
et de coupes

Remarque : le sous-problème doit être capable de gérer les coupes

Génération simultanées de colonnes et de coupes

Ensemble initial de colonnes Ω_0
Ensemble initial de coupes Ψ_0
i=0
Répéter
    Résoudre PM(Ω_i,Ψ_i)
    ω = {colonnes retournées par le sous-problème}
    $\Omega_{i+1} \leftarrow \Omega_i \cup \omega$
    $\Psi_{i+1} \leftarrow \Psi_i \cup \psi(\omega)$
    $i \leftarrow i+1$
Tant que $\omega \neq \emptyset$ ou $\psi \neq \emptyset$

Schéma général de génération simultanée de colonnes et de coupes

Remarque : les coupes sont induites par les colonnes ajoutées

Exemple (problème de tournées avec fractionnement de la livraison)

$$(MP) \qquad \text{minimize} \sum_{r_k \in \Omega} c_k x_k, \tag{10}$$

Ajout d'une route r_k :
- ajout de x_k et y_{ik}
- ajout de (12) et (14)

$$\sum_{r_k \in \Omega} a_{ik} y_{ik} \geq d_i \qquad (v_i \in V^\star), \tag{11}$$

$$Q_k x_k \geq \sum_{v_i \in V^\star} a_{ik} y_{ik} \qquad (r_k \in \Omega), \tag{12}$$

$$\sum_{r_k \in \Omega} a_{ik} x_k \geq \lceil \frac{d_i}{Q} \rceil \qquad (v_i \in V^\star), \tag{13}$$

$$\min(Q, d_i) x_k \geq a_{ik} y_{ik} \qquad (v_i \in V^\star, r_k \in \Omega), \tag{14}$$

$$\sum_{r_k \in \Omega} b_{ijk} x_k \leq 1 \qquad (v_i \in V^\star, v_j \in V^\star), \tag{15}$$

sélection de la route r_k

$$x_k \geq 0 \qquad (r_k \in \Omega), \tag{16}$$

quantité délivrée par r_k au client v_i

$$y_{ik} \geq 0 \qquad (v_i \in V^\star, r_k \in \Omega), \tag{17}$$

Génération de colonnes : raisonnement classique

- On se place dans le cas d'une minimisation

- Résoudre MP(Ω_j)
  - Fournit (X_R^*,Z_R^*) et (Π_R^*,Y_R^*)
    - Respectivement (variables, coût) du primal et du dual restreint
    - On note $Z^* = Y^*$ la borne inférieure recherchée
  - Π_R^* est une solution non forcément réalisable de D(Ω)
    - Solution car la génération de routes ne rajoute pas de variables dans le dual
    - Non forcément réalisable car D(Ω) est plus contraint que D(Ω_j)

Génération de colonnes : raisonnement classique

- Sous-problème : chercher si Π_R* est réalisable pour D(Ω)
  - Si oui, optimal
    - $Y^* \geq Y_R^*$ car Π_R^* de coût Y_R^* est réalisable pour D(Ω)
    - $Y^* \leq Y_R^*$ car D(Ω) est plus contraint que D(Ω_i)

      $\Big\}$ $Y^*=Y_R^*$
    - $Y_R^*=Z_R^*$ et $Y^*=Z^*$ par dualité
  - Si non, la contrainte violée correspond à une variable dans le primal, qui est ajoutée à Ω_i

En résumé : l'argument de la preuve est de disposer d'une solution duale à la fois réalisable et optimale (pour D(Ω))

Génération de colonnes et coupes simultanées

- Résoudre $MP(\Omega_i)$
  - Fournit (X_R^*, Z_R^*) et (Π_R^*, Y_R^*)
    - Respectivement (variables, coût) du primal et du dual restreint
  - Π_R^* n'est pas une solution de $D(\Omega)$
    - La génération de routes rajoute des variables dans le dual

  - Construire une solution Π à l'aide de Π_R^* pour $D(\Omega)$
    - Non nécessairement réalisable
    - De même coût que Π_R^* (c'est-à-dire de coût Y_R^*)

Génération de colonnes et coupes simultanées

- Sous-problème : chercher si Π est réalisable pour $D(\Omega)$
  - Si oui, optimal ?
    - $Y^* \geq Y_R^*$ car Π de coût Y_R^* est réalisable pour $D(\Omega)$
    - $Y_R^* = Z_R^*$ et $Y^* = Z^*$ par dualité
    - $Y^* \leq Y_R^*$? $D(\Omega_i)$ n'est pas une relaxation de $D(\Omega)$

Proposition de méthodologie

- Résoudre MP(Ω_i)
  - Fournit (X_R*,Z_R*) et (Π_R*,Y_R*)
  - Construire une solution X pour MP(Ω)
    - Réalisable
    - De coût Z_R*
    - Typiquement en complétant X_R* par des 0…
    - Assure $Z^* \leq Z_R^*$ donc $Y^* \leq Y_R^*$
  - Construire une solution Π à l'aide de Π_R* pour D(Ω)
    - Non nécessairement réalisable
    - De même coût que Π_R* (c'est-à-dire de coût Y_R*)

Proposition de méthodologie

- Sous-problème : chercher si Π est réalisable pour $D(\Omega)$
  - Si oui, optimal
    - $Y^* \geq Y_R^*$ car Π de coût Y_R^* est réalisable pour $D(\Omega)$
    - $Y_R^* = Z_R^*$ et $Y^* = Z^*$ par dualité
    - $Z^* \leq Z_R^*$ (X solution réalisable de coût Z_R^* pour $MP(\Omega)$)

    $\Rightarrow Z^* = Y^* = Y_R^* = Z_R^*$
  - Si non, ajouter à Ω_i une ou des routes provoquant l'irréalisabilité de Π

Cas d'étude 1 : Problème de tournées avec fractionnement des livraisons

- Satisfaire la demande de clients avec une flotte de véhicules de manière à minimiser la somme des coûts de parcours sous les contraintes suivantes :
  - chaque véhicule fait au plus une tournée ayant pour origine et destination finale le dépôt
  - la somme des demandes des clients servis par un véhicule est inférieure ou égale à la capacité du véhicule

- Les clients peuvent être servis par plusieurs véhicules

Co-auteurs : P. Dejax, M. Gendreau, C. Gueguen

Problème maître

$$\text{minimize} \sum_{r_k \in \Omega} c_k x_k, \tag{10}$$

Ajout d'une route r_k :
- ajout de x_k et y_{ik}
- ajout de (12) et (14)

$$\sum_{r_k \in \Omega} a_{ik} y_{ik} \geq d_i \qquad (v_i \in V^\star), \tag{11}$$

$$Q_k x_k \geq \sum_{v_i \in V^\star} a_{ik} y_{ik} \qquad (r_k \in \Omega), \tag{12}$$

$$\sum_{r_k \in \Omega} a_{ik} x_k \geq \lceil \frac{d_i}{Q} \rceil \qquad (v_i \in V^\star), \tag{13}$$

$$\min(Q, d_i) x_k \geq a_{ik} y_{ik} \qquad (v_i \in V^\star, r_k \in \Omega), \tag{14}$$

$$\sum_{r_k \in \Omega} b_{ijk} x_k \leq 1 \qquad (v_i \in V^\star, v_j \in V^\star), \tag{15}$$

sélection de la route r_k

$$x_k \geq 0 \qquad (r_k \in \Omega), \tag{16}$$

quantité délivrée par r_k au client v_i

$$y_{ik} \geq 0 \qquad (v_i \in V^\star, r_k \in \Omega), \tag{17}$$

Construction de X

Conserver les valeurs de X_R^*, x_k=0 et y_{ik}=0 pour $r_k \in \Omega \backslash \Omega_i$

$$\text{minimize} \sum_{r_k \in \Omega} c_k x_k, \tag{10}$$

subject to

$$\sum_{r_k \in \Omega} a_{ik} y_{ik} \geq d_i \qquad (v_i \in V^\star), \tag{11}$$

$$Q_k x_k \geq \sum_{v_i \in V^\star} a_{ik} y_{ik} \qquad (r_k \in \Omega), \tag{12}$$

$$\sum_{r_k \in \Omega} a_{ik} x_k \geq \lceil \frac{d_i}{Q} \rceil \qquad (v_i \in V^\star), \tag{13}$$

$$\min(Q, d_i) x_k \geq a_{ik} y_{ik} \qquad (v_i \in V^\star, r_k \in \Omega), \tag{14}$$

$$\sum_{r_k \in \Omega} b_{ijk} x_k \leq 1 \qquad (v_i \in V^\star, v_j \in V^\star), \tag{15}$$

$$x_k \geq 0 \qquad (r_k \in \Omega), \tag{16}$$

$$y_{ik} \geq 0 \qquad (v_i \in V^\star, r_k \in \Omega), \tag{17}$$

Problème dual

$$\text{maximize} \sum_{v_i \in V^\star} d_i \beta_i + \lceil \frac{d_i}{Q} \rceil \alpha_i - \sum_{v_i, v_j \in V^\star} \mu_{ij}, \tag{19}$$

subject to

$$Q_k \omega_k + \sum_{v_i \in V^\star} a_{ik} \alpha_i - \sum_{v_i, v_j \in V^\star} b_{ijk} \mu_{ij} + \sum_{v_i \in V^\star} a_{ik} \min(Q, d_i) \gamma_{ik} \leq c_k \qquad (r_k \in \Omega), \tag{20}$$

$$a_{ik}\beta_i - a_{ik}\omega_k - a_{ik}\gamma_{ik} \leq 0 \qquad (v_i \in V^\star, r_k \in \Omega), \tag{21}$$

$$\alpha_i \geq 0 \qquad (v_i \in V^\star), \tag{22}$$

$$\beta_i \geq 0 \qquad (v_i \in V^\star), \tag{23}$$

$$\mu_{ij} \geq 0 \qquad (v_i \in V^\star, v_j \in V^\star), \tag{24}$$

$$\omega_k \geq 0 \qquad (r_k \in \Omega), \tag{25}$$

$$\gamma_{ik} \geq 0 \qquad (v_i \in V^\star, r_k \in \Omega), \tag{26}$$

Construction de Π

$$\text{maximize} \sum_{v_i \in V^\star} d_i\beta_i + \lceil \frac{d_i}{Q} \rceil \alpha_i - \sum_{v_i, v_j \in V^\star} \mu_{ij}, \tag{19}$$

Conserver les valeurs de $\Pi_R{}^*$

subject to

$$Q_k\omega_k + \sum_{v_i \in V^\star} a_{ik}\alpha_i - \sum_{v_i, v_j \in V^\star} b_{ijk}\mu_{ij} + \sum_{v_i \in V^\star} a_{ik} \min(Q, d_i)\gamma_{ik} \le c_k \qquad (r_k \in \Omega), \tag{20}$$

$$a_{ik}\beta_i - a_{ik}\omega_k - a_{ik}\gamma_{ik} \le 0 \qquad (v_i \in V^\star, r_k \in \Omega), \tag{21}$$

$$\alpha_i \ge 0 \qquad (v_i \in V^\star), \tag{22}$$

$$\beta_i \ge 0 \qquad (v_i \in V^\star), \tag{23}$$

$$\mu_{ij} \ge 0 \qquad (v_i \in V^\star, v_j \in V^\star), \tag{24}$$

$$\omega_k \ge 0 \qquad (r_k \in \Omega), \tag{25}$$

$$\gamma_{ik} \ge 0 \qquad (v_i \in V^\star, r_k \in \Omega), \tag{26}$$

Valeurs de ω_k et γ_{ik} pour $r_k \in \Omega \backslash \Omega_i$?

Construction de Π

$$\text{maximize} \sum_{v_i \in V^\star} d_i \beta_i + \lceil \frac{d_i}{Q} \rceil \alpha_i - \sum_{v_i, v_j \in V^\star} \mu_{ij}, \tag{19}$$

subject to

$$Q_k \omega_k + \sum_{v_i \in V^\star} a_{ik} \alpha_i - \sum_{v_i, v_j \in V^\star} b_{ijk} \mu_{ij} + \sum_{v_i \in V^\star} a_{ik} \min(Q, d_i) \gamma_{ik} \leq c_k \qquad (r_k \in \Omega), \tag{20}$$

$$a_{ik}\beta_i - a_{ik}\omega_k - a_{ik}\gamma_{ik} \leq 0 \qquad (v_i \in V^\star, r_k \in \Omega), \tag{21}$$

$$\alpha_i \geq 0 \qquad (v_i \in V^\star), \tag{22}$$

$$\beta_i \geq 0 \qquad (v_i \in V^\star), \tag{23}$$

$$\mu_{ij} \geq 0 \qquad (v_i \in V^\star, v_j \in V^\star), \tag{24}$$

$$\omega_k \geq 0 \qquad (r_k \in \Omega), \tag{25}$$

$$\gamma_{ik} \geq 0 \qquad (v_i \in V^\star, r_k \in \Omega), \tag{26}$$

Valeurs de ω_k et γ_{ik} pour $r_k \in \Omega \backslash \Omega_i$?

$\omega_k = \beta_{\hat{\imath}}$

$\gamma_{ik} = \beta_i - \beta_{\hat{\imath}}$ si $\beta_i \geq \beta_{\hat{\imath}}$

$\gamma_{ik} = 0$ sinon

Expression du sous-problème

- Existe-t-il une route $r_k \in \Omega \backslash \Omega_i$ telle que

$$\underbrace{Q_k\omega_k}_{} + \sum_{v_i \in V^\star} a_{ik}\alpha_i - \sum_{v_i, v_j \in V^\star} b_{ijk}\mu_{ij} + \underbrace{\sum_{v_i \in V^\star} a_{ik} \min(Q, d_i)\gamma_{ik}}_{} > c_k$$

$$\sum_{v_i \in V^\star} a_{ik} d_i^k \beta_i$$

bénéfice de l'allocation optimale de la capacité
du véhicule aux clients de la route

Cas d'étude 2 : Problème de tournées avec livraisons multiples et fenêtres de temps

- Satisfaire la demande de clients avec une flotte de véhicules de manière à minimiser la somme des coûts de parcours sous les contraintes suivantes :
  - chaque véhicule fait une ou plusieurs tournée ayant pour origine et destination finale le dépôt
  - la somme des demandes des clients servis par un véhicule est inférieure ou égale à la capacité du véhicule
  - chaque client est servi par exactement un véhicule en respectant la fenêtre de temps du client

Co-auteurs : R. Giroudeau, F. Hernandez, J.C. König, O. Naud

Problème maître

Ajout d'une route r_k :
- ajout de θ_k
- ajout de (3)

$$minimize \sum_{r_k \in \Omega} c_k \theta_k \qquad (1)$$

$$\sum_{r_k \in \Omega} a_{ik} \theta_k \geq 1 \qquad (v_i \in V \setminus \{v_0\}) \qquad (2)$$

$$\sum_{r_k \in \Omega} -h_{lk} \theta_k \geq -\beta_l \qquad (r_l \in \Omega) \qquad (3)$$

$$\theta_k \geq 0 \qquad (r_k \in \Omega) \qquad (4)$$

$h_{ll}\ \theta_l + \Sigma_{h \neq k}\ h_{lk}\ \theta_k \leq h_{ll}$

sélection de la route r_k

Construction de X

Conserver les valeurs de X_R^*, $\theta_k=0$ pour $r_k \in \Omega \backslash \Omega_i$

$$\textit{minimize} \sum_{r_k \in \Omega} c_k \theta_k \tag{1}$$

subject to

$$\sum_{r_k \in \Omega} a_{ik} \theta_k \geq 1 \qquad (v_i \in V \setminus \{v_0\}) \tag{2}$$

$$\sum_{r_k \in \Omega} -h_{lk} \theta_k \geq -\beta_l \qquad (r_l \in \Omega) \tag{3}$$

$$\theta_k \geq 0 \qquad (r_k \in \Omega) \tag{4}$$

Problème dual

$$maximize \sum_{v_i \in V \setminus \{v_0\}} \lambda_i + \sum_{r_k \in \Omega} -\beta_k \alpha_k \qquad (5)$$

subject to

$$\sum_{v_i \in V \setminus \{v_0\}} a_{ik}\lambda_i + \sum_{r_l \in \Omega} -h_{lk}\alpha_l \leq c_k \qquad (r_k \in \Omega) \qquad (6)$$

$$\lambda_i \geq 0 \qquad (7)$$

$$\alpha_k \geq 0 \qquad (8)$$

Construction de Π

$$\text{maximize} \sum_{v_i \in V \setminus \{v_0\}} \lambda_i + \sum_{r_k \in \Omega} -\beta_k \alpha_k \tag{5}$$

subject to

Conserver les valeurs de $\Pi_R{}^*$ uniquement pour les variables λ_i

$$\sum_{v_i \in V \setminus \{v_0\}} a_{ik} \lambda_i + \sum_{r_l \in \Omega} -h_{lk} \alpha_l \leq c_k \quad (r_k \in \Omega) \tag{6}$$

$$\lambda_i \geq 0 \tag{7}$$

$$\alpha_k \geq 0 \tag{8}$$

Valeurs de α_k pour $r_k \in \Omega_i$?
Valeurs de α_k pour $r_k \in \Omega \setminus \Omega_i$?

Cas d’étude 3 : Problème de conception de service pour le transport urbain rapide

Co-auteurs : A.L. Medaglia , N. Velasco, JL. Walteros

Cas d’étude 3 : Problème de conception de service pour le transport urbain rapide

- A partir d’un réseau physique existant et connaissant des demandes prévisionnelles de transport
  - concevoir les routes
    - une route est définie par un ensemble d’arrêts planifiés le long d’un corridor
  - en respectant les contraintes de capacité

Problème maître

Ajout d'une route r_k :
- ajout de x_{st}^{ij} et de y_k
- ajout de (3)

$$\min \sum_{(i,j)\in\mathcal{A}} t_{ij} \sum_{s\in\mathcal{S}} \sum_{t\in\mathcal{S}} x_{ij}^{st} \tag{1}$$

s.t.

$$\sum_{\{j:(i,j)\in\mathcal{A}\}} x_{ij}^{st} - \sum_{\{j:(j,i)\in\mathcal{A}\}} x_{ji}^{st} = b_i^{st}; \quad i\in\mathcal{N},(s,t)\in\mathcal{S}\times\mathcal{S} \tag{2}$$

$$\sum_{s\in\mathcal{S}} \sum_{t\in\mathcal{S}} x_{ij}^{st} \le u y_r; \quad r\in\mathcal{R},(i,j)\in\mathcal{A}(r) \tag{3}$$

$$\sum_{r\in\mathcal{R}} y_r \le m \tag{4}$$

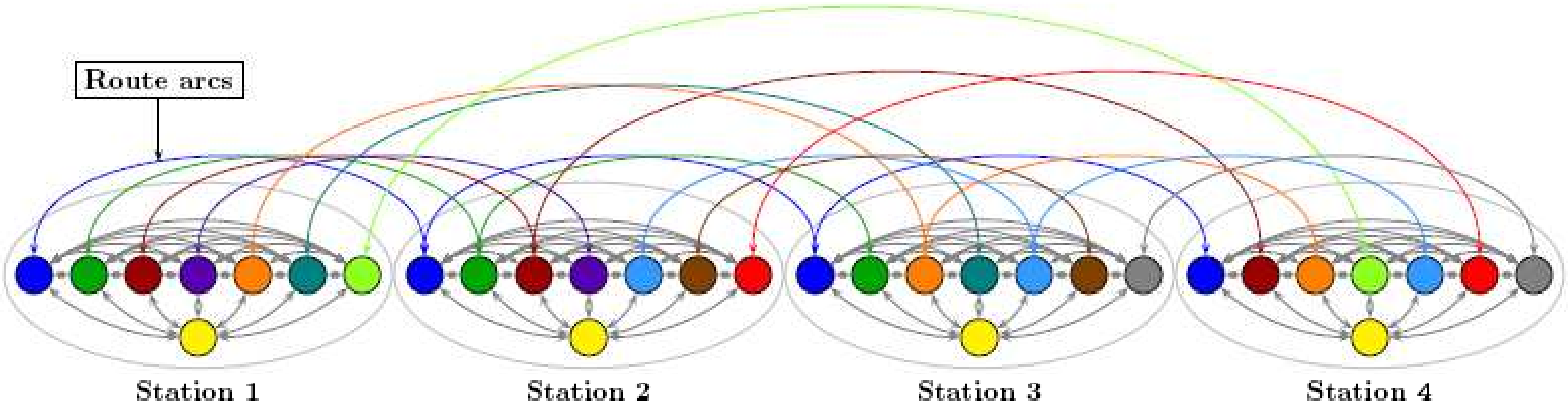
$$y_r \ge 0 \quad r\in\mathcal{R} \tag{5}$$

$$x_{ij}^{st} \ge 0; \ (s,t)\in\mathcal{S}\times\mathcal{S},(i,j)\in\mathcal{A} \tag{6}$$

sélection de la route r_k

flux de passagers utilisant l'arc (i,j) pour aller de s à t

Branch and Cut and Price TransMilenio



Construction de X

Conserver les valeurs de X_R*, y_r=0 et x_{ij}^{st}=0 pour $r_k \in \mathcal{R} \setminus \mathcal{R}_i$

$$\min \sum_{(i,j)\in\mathcal{A}} t_{ij} \sum_{s\in\mathcal{S}} \sum_{t\in\mathcal{S}} x_{ij}^{st} \tag{1}$$

s.t.

$$\sum_{\{j:(i,j)\in\mathcal{A}\}} x_{ij}^{st} - \sum_{\{j:(j,i)\in\mathcal{A}\}} x_{ji}^{st} = b_i^{st}; \quad i \in \mathcal{N}, (s,t) \in \mathcal{S}\times\mathcal{S} \tag{2}$$

$$\sum_{s\in\mathcal{S}} \sum_{t\in\mathcal{S}} x_{ij}^{st} \leq u y_r; \qquad r \in \mathcal{R}, (i,j) \in \mathcal{A}(r) \tag{3}$$

$$\sum_{r\in\mathcal{R}} y_r \leq m \tag{4}$$

$$y_r \geq 0 \qquad r \in \mathcal{R} \tag{5}$$

$$x_{ij}^{st} \geq 0; \; (s,t) \in \mathcal{S}\times\mathcal{S}, (i,j) \in \mathcal{A} \tag{6}$$

Problème dual

$$\min \sum_{i \in \mathcal{N}} \sum_{(s,t) \in \mathcal{S} \times \mathcal{S}} b_i^{st} \alpha_i^{st} - m\Gamma \tag{1}$$

s.t.

$$\alpha_i^{st} - \alpha_j^{st} - \beta_r^{ij} \leq t_{ij} \qquad r \in \mathcal{R}, (i,j) \in \mathcal{A}(r), (s,t) \in \mathcal{S} \times \mathcal{S} \tag{2}$$

$$\sum_{(i,j) \in \mathcal{A}(r)} u\beta_r^{ij} - \Gamma \leq 0 \qquad r \in \mathcal{R} \tag{3}$$

$$\alpha_i^{st} \text{ free} \qquad i \in \mathcal{N}, (s,t) \in \mathcal{S} \times \mathcal{S} \tag{4}$$

$$\beta_r^{ij} \leq 0 \qquad r \in \mathcal{R}, (i,j) \in \mathcal{A}(r) \tag{5}$$

$$\Gamma \leq 0 \tag{6}$$

Construction de Π

$$\min \sum_{i \in \mathcal{N}} \sum_{(s,t) \in \mathcal{S} \times \mathcal{S}} b_i^{st} \alpha_i^{st} - m\Gamma \qquad (1)$$

Conserver les valeurs de $\Pi_R{}^*$

s.t.

$$\alpha_i^{st} - \alpha_j^{st} - \beta_r^{ij} \leq t_{ij} \qquad r \in \mathcal{R}, (i,j) \in \mathcal{A}(r), (s,t) \in \mathcal{S} \times \mathcal{S} \qquad (2)$$

$$\sum_{(i,j) \in \mathcal{A}(r)} u\beta_r^{ij} - \Gamma \leq 0 \qquad r \in \mathcal{R} \qquad (3)$$

$$\alpha_i^{st} \text{ free} \qquad i \in \mathcal{N}, (s,t) \in \mathcal{S} \times \mathcal{S} \qquad (4)$$

$$\beta_r^{ij} \leq 0 \qquad r \in \mathcal{R}, (i,j) \in \mathcal{A}(r) \qquad (5)$$

$$\Gamma \leq 0 \qquad (6)$$

Valeurs de β_r^{ij} pour $r \in \mathcal{R} \setminus \mathcal{R}_i$?

Construction de Π

$$\min \sum_{i\in\mathcal{N}} \sum_{(s,t)\in\mathcal{S}\times\mathcal{S}} b_i^{st}\alpha_i^{st} - m\Gamma \tag{1}$$

s.t.

$$\alpha_i^{st} - \alpha_j^{st} - \beta_r^{ij} \leq t_{ij} \qquad r\in\mathcal{R}, (i,j)\in\mathcal{A}(r), (s,t)\in\mathcal{S}\times\mathcal{S} \tag{2}$$

$$\sum_{(i,j)\in\mathcal{A}(r)} u\beta_r^{ij} - \Gamma \leq 0 \qquad r\in\mathcal{R} \tag{3}$$

$$\alpha_i^{st} \text{ free} \qquad i\in\mathcal{N}, (s,t)\in\mathcal{S}\times\mathcal{S} \tag{4}$$

$$\mathcal{R}, (i,j)\in\mathcal{A}(r) \tag{5}$$

$$\tag{6}$$

Valeurs de β_r^{ij} pour $r\in \mathcal{R}\setminus\mathcal{R}_i$?

$\beta_r^{ij} = \max(0, \max_{(s,t)\in S\times S}(\alpha_i^{st} - \alpha_j^{st}) - t_{ij})$

Expression du sous-problème

- Existe-t-il une route r∈ $\mathcal{R} \backslash \mathcal{R}_i$ telle que

$$\sum_{(i,j)\in\mathcal{A}(r)} \underbrace{u \max(0, t_{ij} - \max_{(s,t)\in\mathcal{S}\times\mathcal{S}} (\alpha_i^{st} - \alpha_j^{st}))}_{c_{ij}} - \Gamma > 0$$