À la recherche d'une solution "stable" : Deux problèmes mélant RO et Théorie des jeux

Eric Angel, Evripidis Bampis, Lélia Blin, Laurent Gourvès, Fanny Pascual

LaMI, Université d'Évry

Stabilité

- Jeux coopératifs

  un ensemble V d'agents

  une fonction caractéristique f qui à tout $S \subseteq V$ associe une valeur $f(S)$

  que les agents se partagent s'ils coopèrent

  Coeur de f : $x \in \mathbb{R}^V$ t.q. $\sum_{i \in V} x_i = f(V)$ et $\forall S \subset V$: $\sum_{i \in S} x_i \geq f(S)$

  Stabilité=Coeur

- Jeux non-coopératifs

  un ensemble V d'agents

  un ensemble de stratégies pour chaque agent

  une fonction f qui selon la stratégie choisie par chaque agent associe

  un vecteur $x \in \mathbb{R}^V$

  Équilibre de Nash : Situation dans laquelle aucun agent i ne peut

  améliorer x_i en modifiant unilatéralement sa stratégie

  Stabilité=équilibre de Nash

Plan

1. Allocation de coût équitable pour le jeu de l'arbre couvrant de poids minimal

   Eric Angel, Evripidis Bampis, Lélia Blin, Laurent Gourvès

2. Ordonnancement de tâches sur deux machines et stabilité approchée

   Eric Angel, Evripidis Bampis, Fanny Pascual

Allocation de coût équitable pour le jeu de l'arbre couvrant de poids minimal.

Jeu de l'ACPM

- Données :
  - Un graphe $G = (V, E)$ connexe dont les arêtes sont valuées (fonction coût c)
  - Un sommet racine $r \in V$ qui doit délivrer une information à travers G aux agents (sommets de $V \backslash r$)

Jeu de l'ACPM

- Données :
  - Un graphe $G = (V, E)$ connexe dont les arêtes sont valuées (fonction coût c)
  - Un sommet racine $r \in V$ qui doit délivrer une information à travers G aux agents (sommets de $V \backslash r$)
- Problème :

1. Déterminer le sous-graphe de diffusion de l'information
2. Répercuter le coût du sous-graphe aux agents

Jeu de l'ACPM

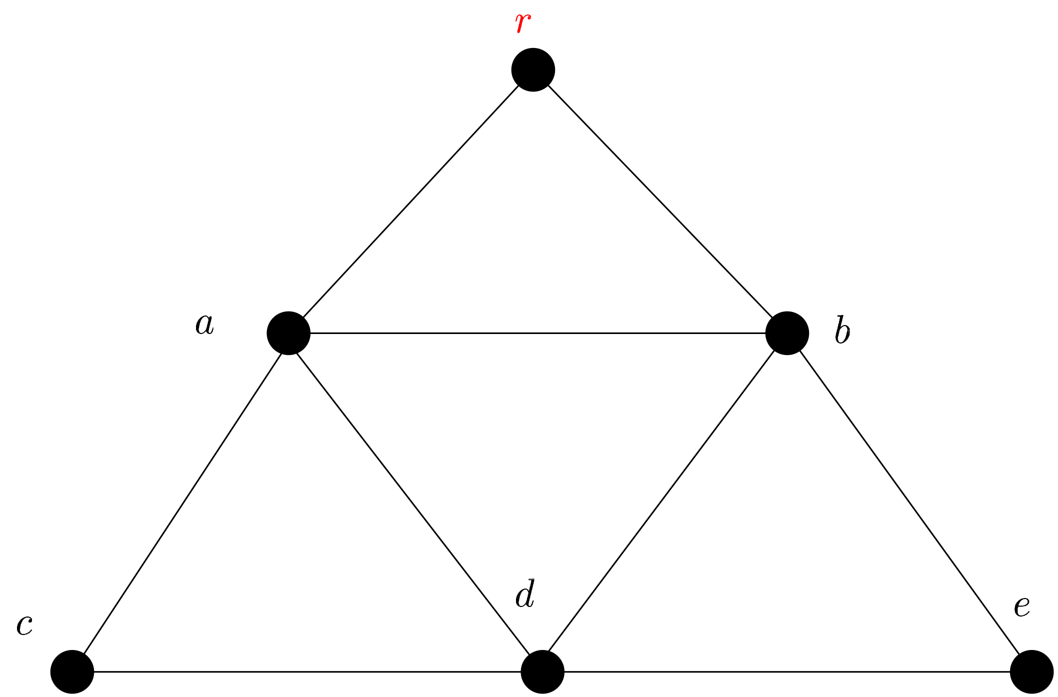
- Données :
  - Un graphe $G = (V, E)$ connexe dont les arêtes sont valuées (fonction coût c)
  - Un sommet racine $r \in V$ qui doit délivrer une information à travers G aux agents (sommets de $V \backslash r$)
- Problème :

  1. Déterminer le sous-graphe de diffusion de l'information $\Rightarrow$ ACPM
  2. Répercuter le coût du sous-graphe aux agents $\Rightarrow$ Allocation équitable

Stabilité : Allocation dans le coeur du jeu coopératif

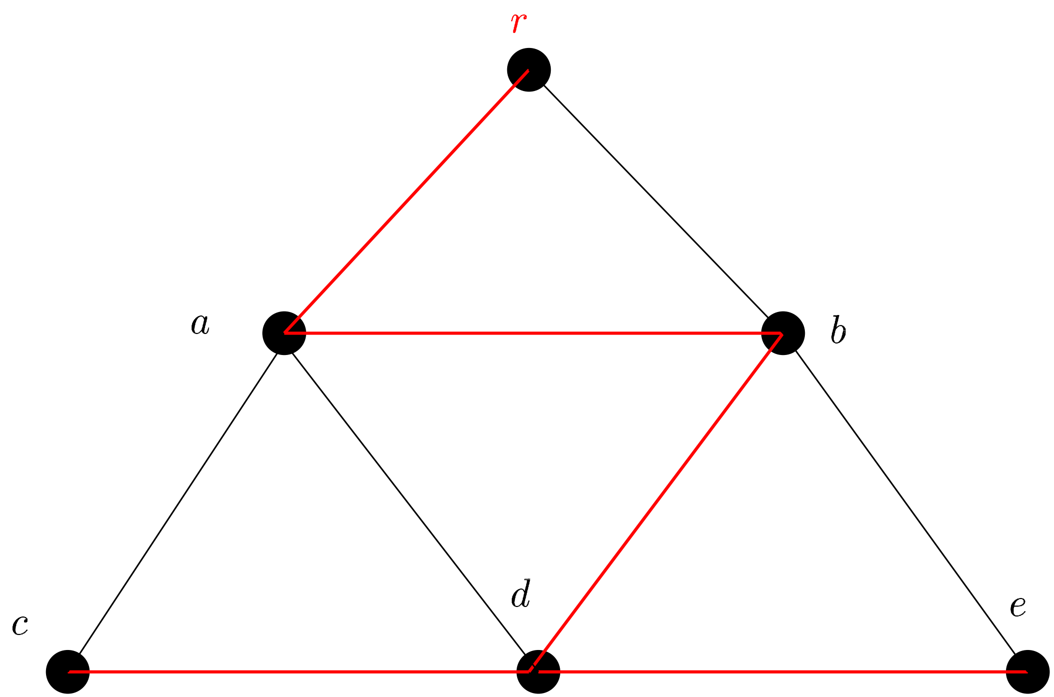
Allocation de Bird

Le prix demandé à un agent est égal au coût de la première arête dans l'unique chemin qui le sépare de la racine



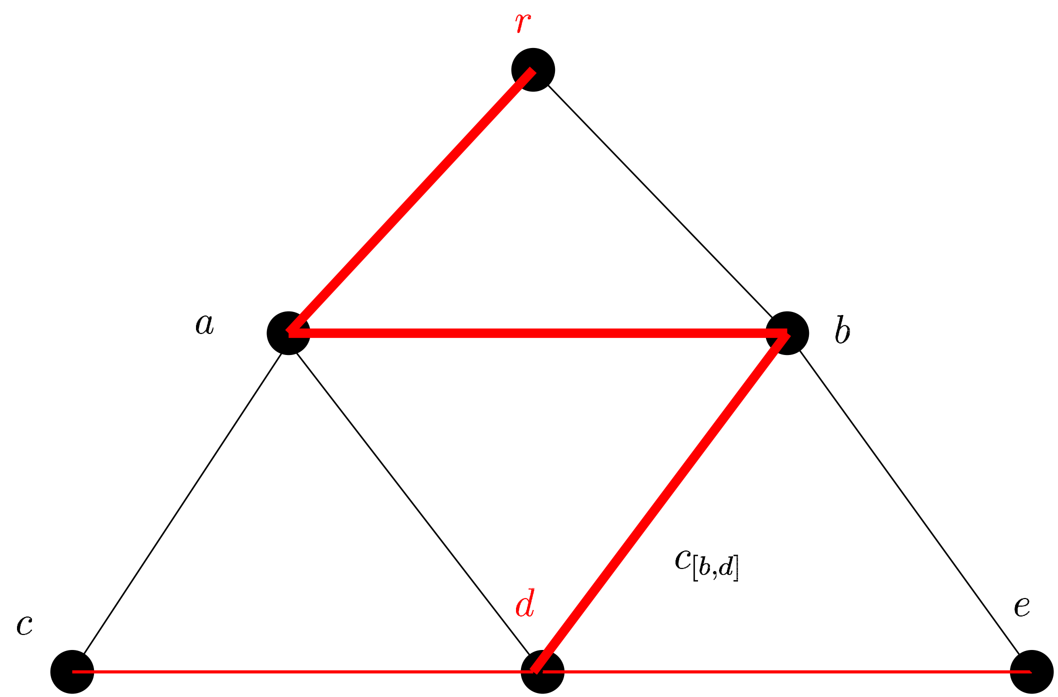
Allocation de Bird

Le prix demandé à un agent est égal au coût de la première arête dans l'unique chemin qui le sépare de la racine



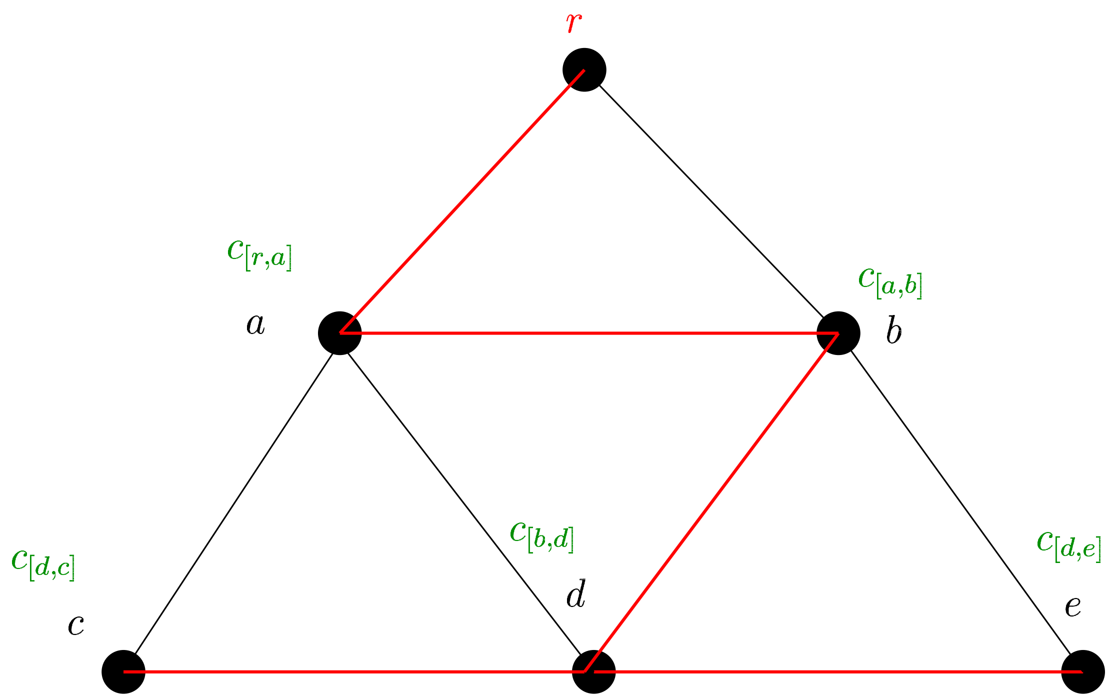
Allocation de Bird

Le prix demandé à un agent est égal au coût de la première arête dans l'unique chemin qui le sépare de la racine



Le prix demandé à d, noté $\beta(T,d)$, est $c_{[b,d]}$

Allocation de Bird

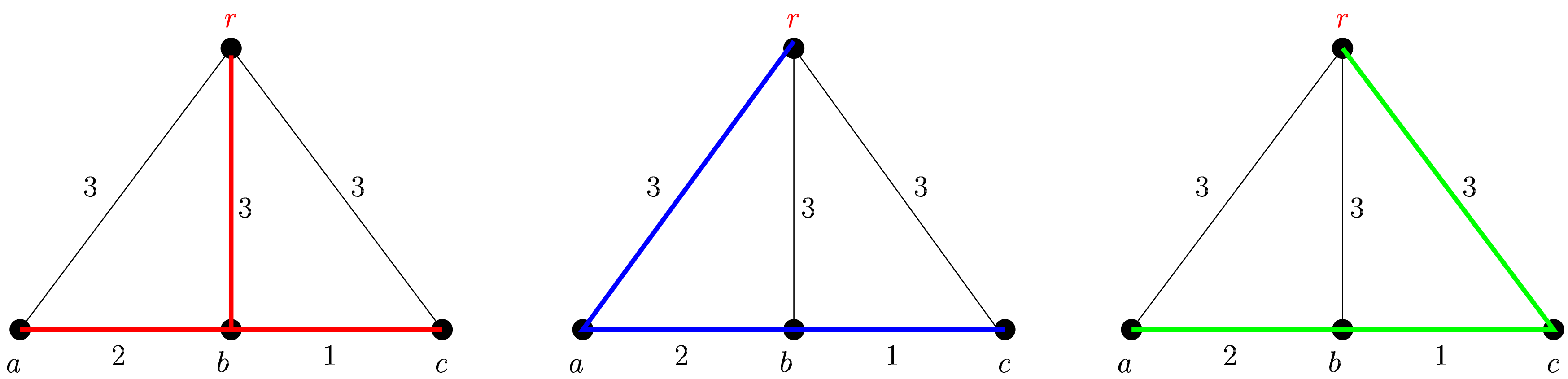


Allocation $\left(c_{[r,a]}, c_{[a,b]}, c_{[d,c]}, c_{[b,d]}, c_{[d,e]}\right)$

Toute allocation de Bird appartient au coeur

Mécontentement

Plusieurs ACPM $\Rightarrow$ plusieurs allocations de Bird



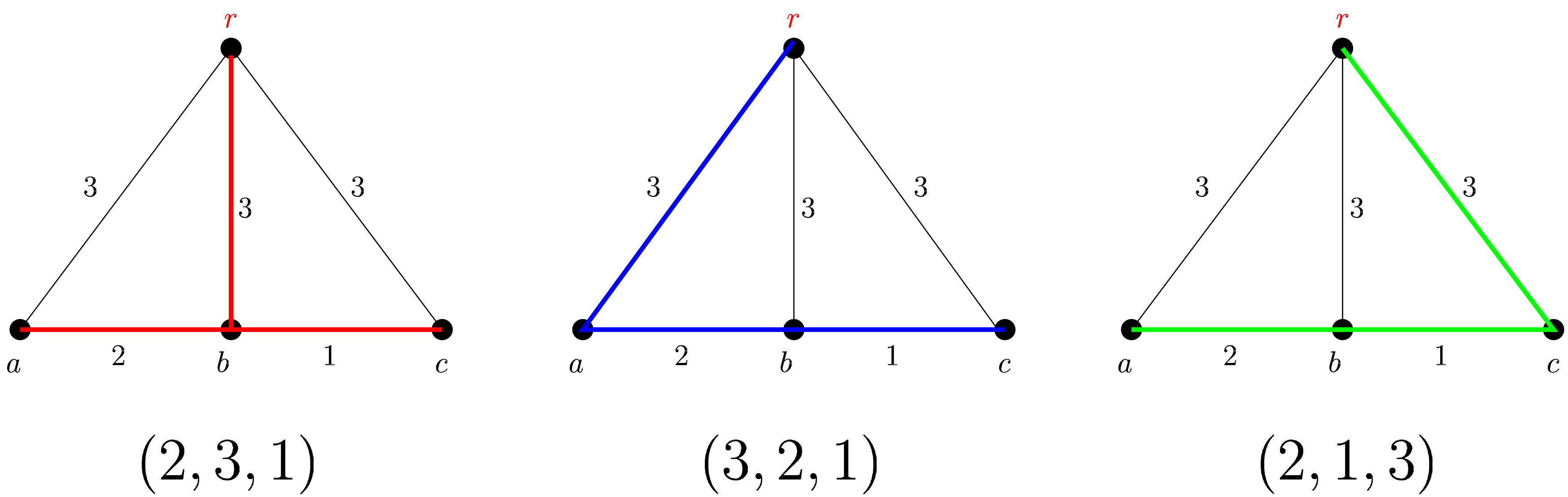
$(2, 3, 1)$ $(3, 2, 1)$ $(2, 1, 3)$

Du point de vue d'un agent, le prix demandé dépend grandement de l'ACPM

$F(v)$ = ensemble des prix pouvant être demandés à v
$F_{min}(v) = \min F(v)$

Mécontentement

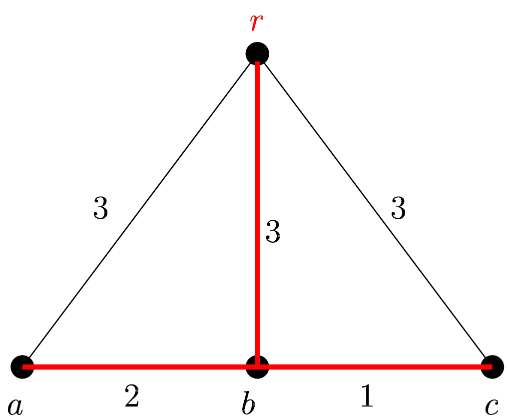
Plusieurs ACPM $\Rightarrow$ plusieurs allocations de Bird

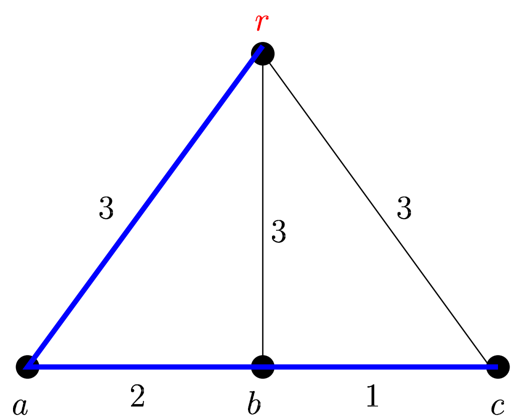


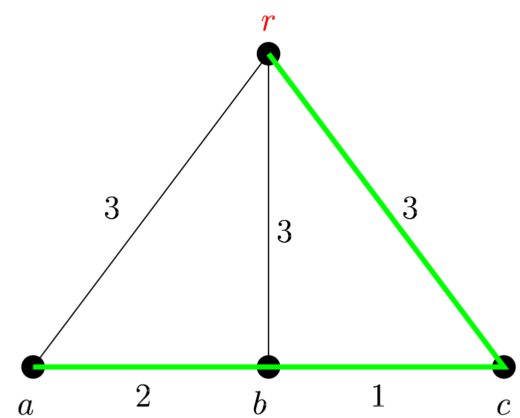
Mécontentement d'un agent = prix actuel / prix minimal

Mécontentement de l'agent v : $\Delta(T, v) = \frac{\beta(T,v)}{F_{min}(v)}$

Exemple







$(2, \mathbf{3}, 1)$ $(3, \mathbf{2}, 1)$ $(2, \mathbf{1}, 3)$

$\Delta(T, b) = 3$ $\Delta(T, b) = 2$ $\Delta(T, b) = 1$

Deux problèmes d'optimisation

1. SPANNING TREE-MWD : Déterminer un ACPM qui minimise le pire mécontentement

$$\min_{T} \max_{v \in V} \Delta(T, v) \text{ sous contrainte que } T \text{ est un ACPM}$$

Deux problèmes d'optimisation

1. SPANNING TREE-MWD : Déterminer un ACPM qui minimise le pire mécontentement

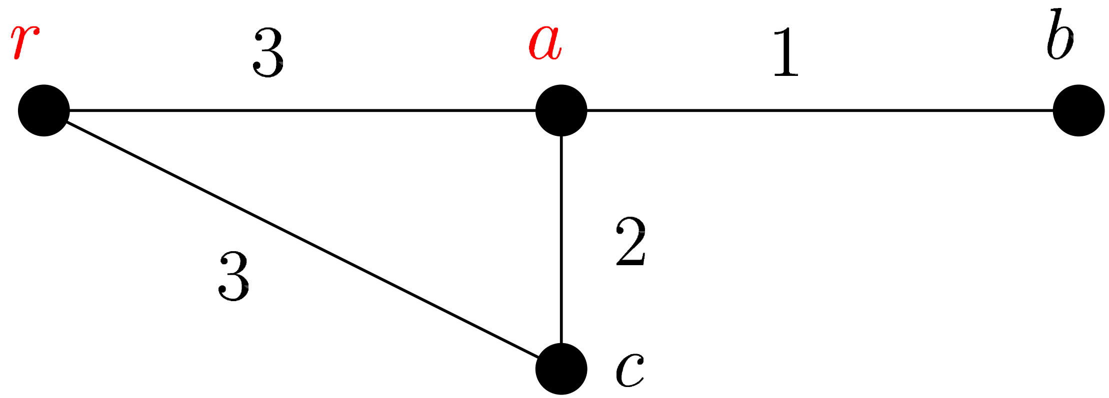
$$\min_{T} \max_{v \in V} \Delta(T, v) \text{ sous contrainte que } T \text{ est un ACPM}$$

2. SPANNING TREE-MAD : Déterminer un ACPM qui minimise le mécontentement moyen

$$\min_{T} \sum_{v \in V} \Delta(T, v) \text{ sous contrainte que } T \text{ est un ACPM}$$

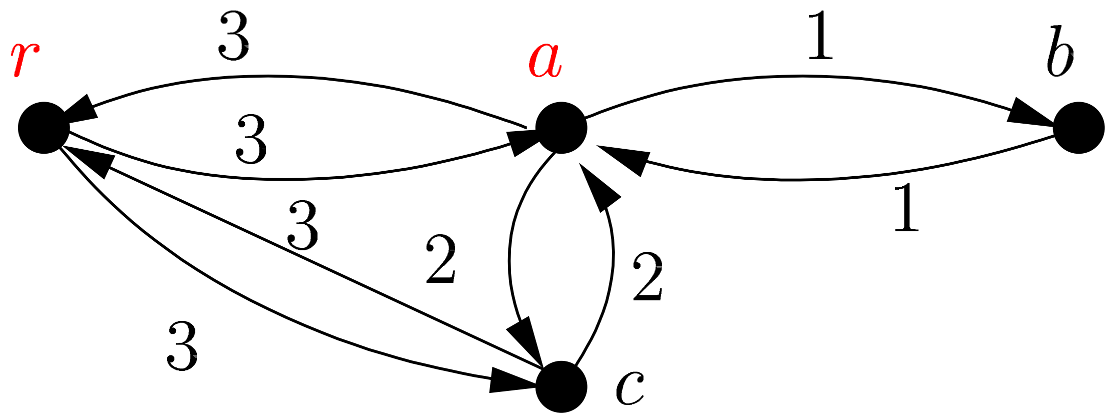
Connaître $F_{min}(v)$

Le prix demandé à un agent fait partie des poids des arêtes qui lui sont incidentes



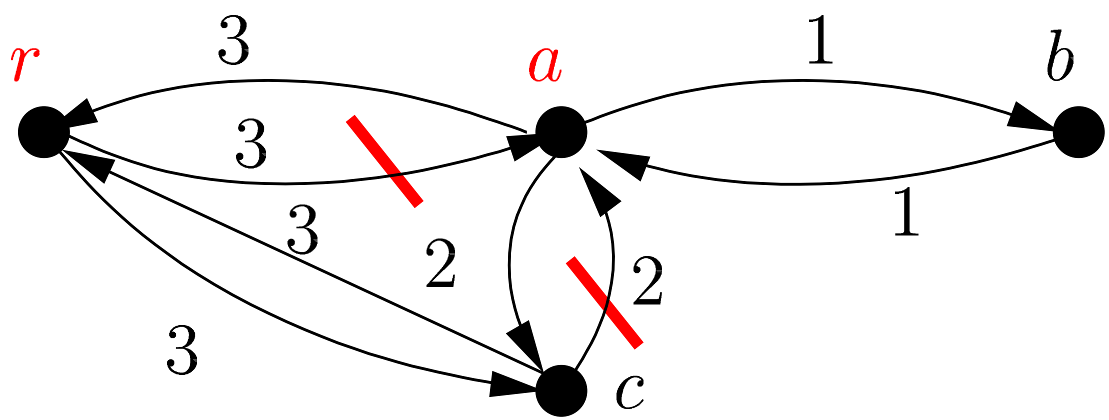
Mais le plus petit prix demandé n'est pas nécessairement la plus petite de ces valeurs

Connaître $F_{min}(v)$



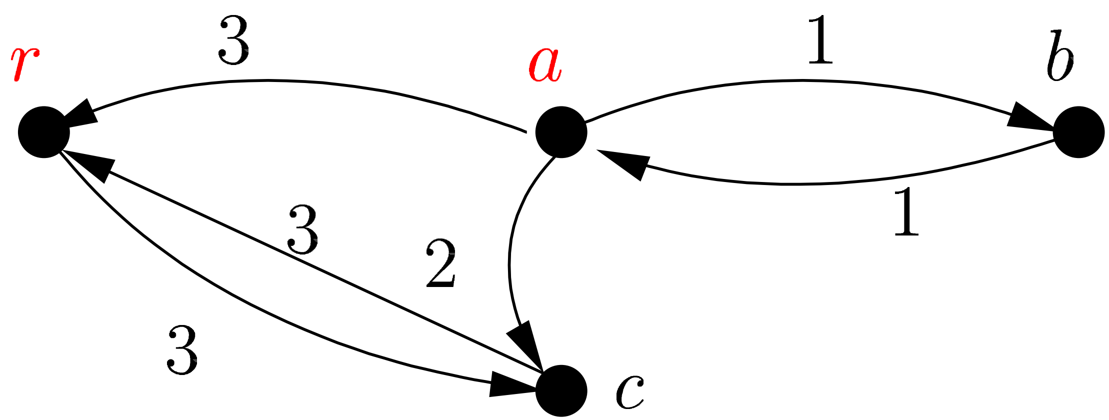
Besoin d'une orientation du graphe

Connaître $F_{min}(v)$



On force a à recevoir le prix 1

Connaître $F_{min}(v)$



Pas d'arborescence enracinée en r

Minimiser le pire mécontentement

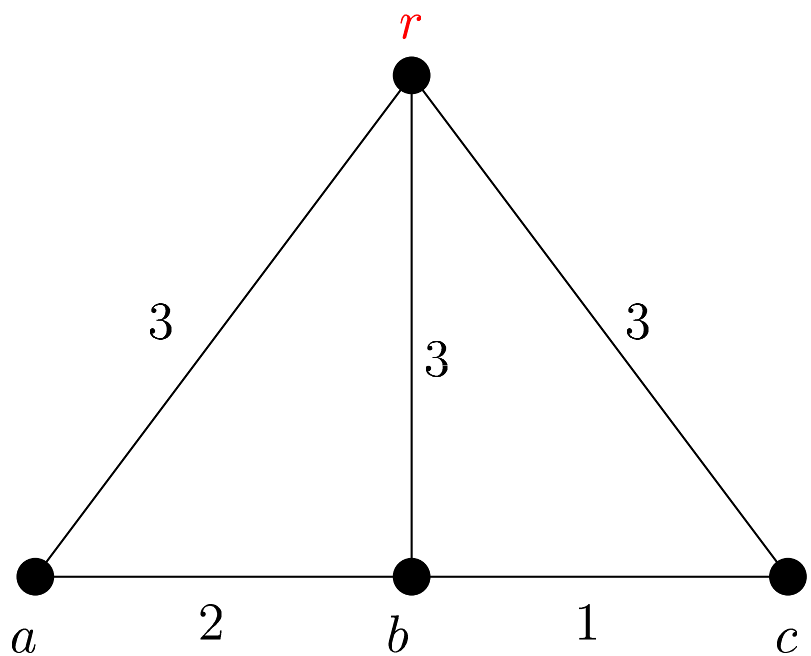
Idée de l'algorithme :

Déterminer un sous-graphe G' du graphe original G tel que tout ACPM de G' minimise le pire mécontentement

G' est obtenu en retirant successivement des arêtes de G

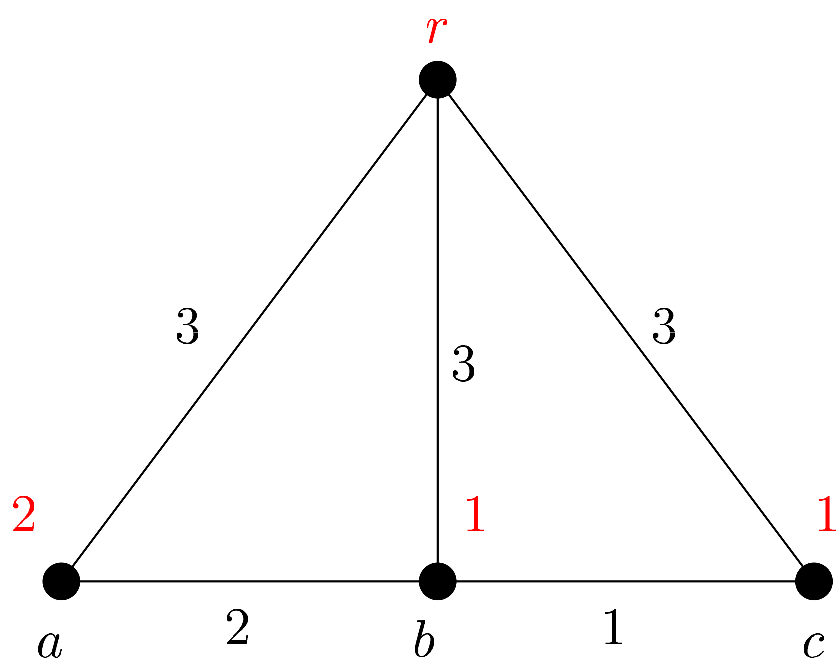
condition d'arrêt : G' ne contient plus d'ACPM

Exemple



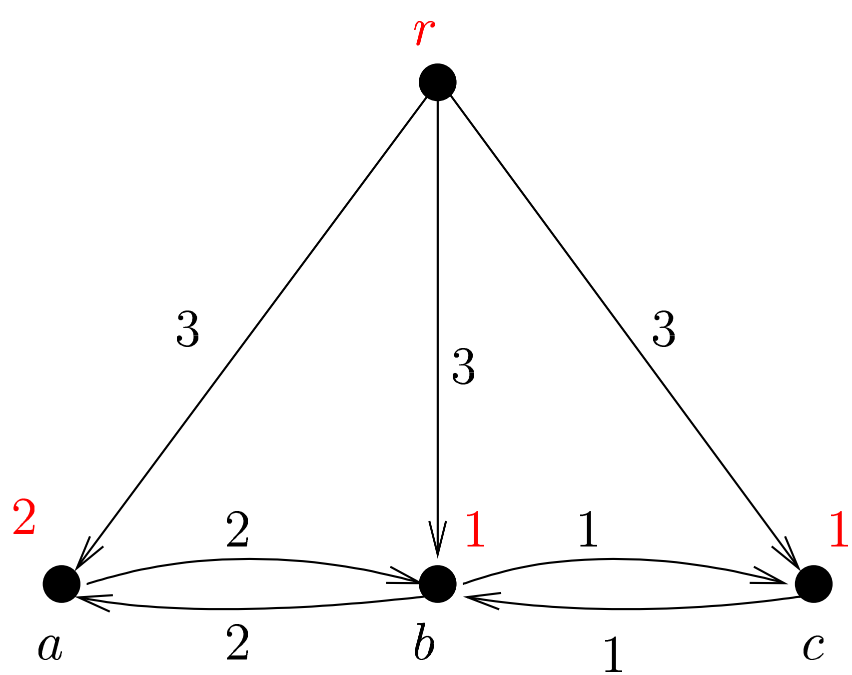
Tout ACPM a un poids $C_{opt} = 6$

Exemple



- Le plus petit prix reçu par a est 2 $\rightarrow F_{min}(a) = 2$
- Le plus petit prix reçu par b est 1 $\rightarrow F_{min}(b) = 1$
- Le plus petit prix reçu par c est 1 $\rightarrow F_{min}(c) = 1$

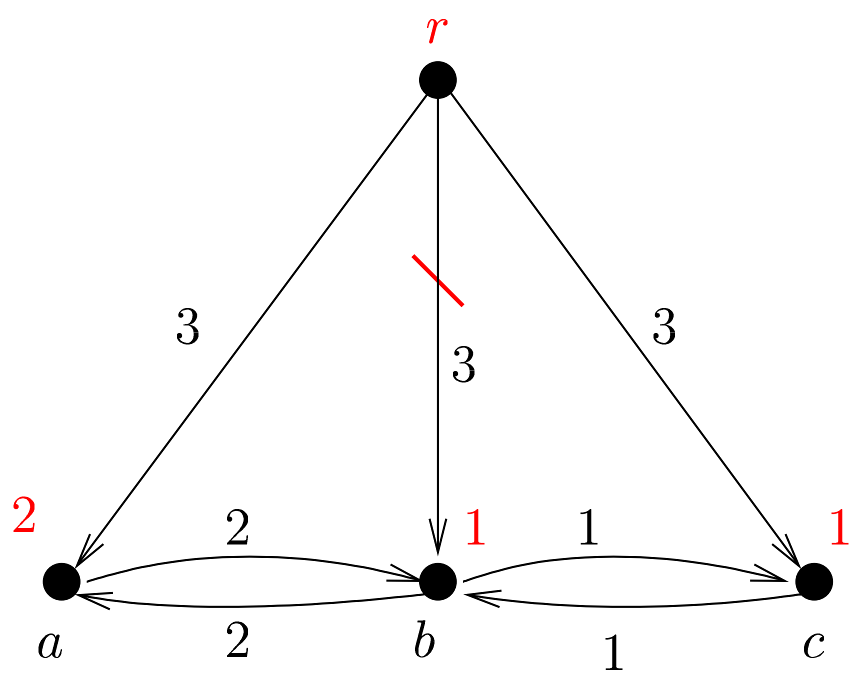
Exemple



Orientation du graphe

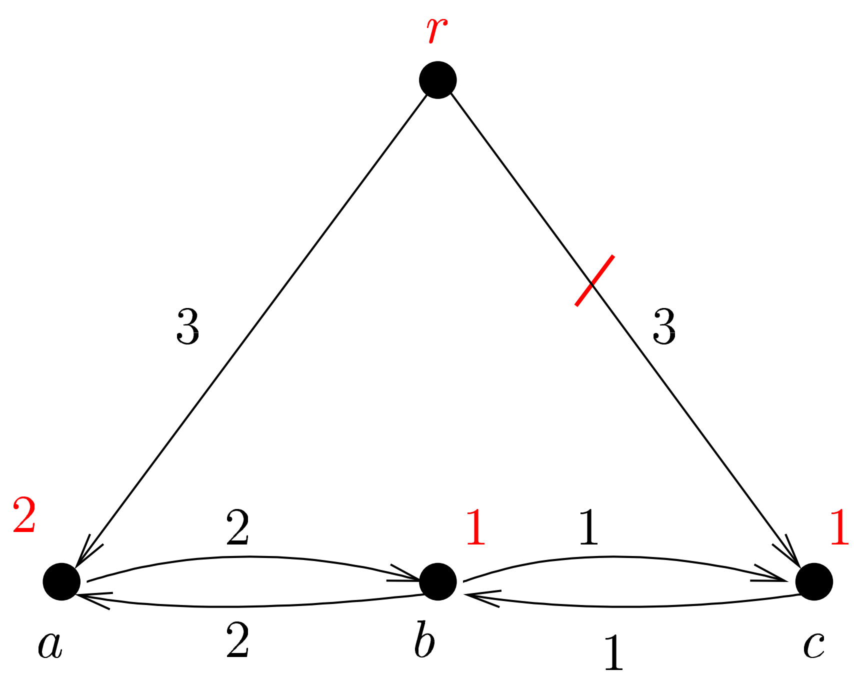
On retire successivement les arcs (x, y) tels que $c_{(x,y)}/F_{min}(y)$ est maximal

Exemple



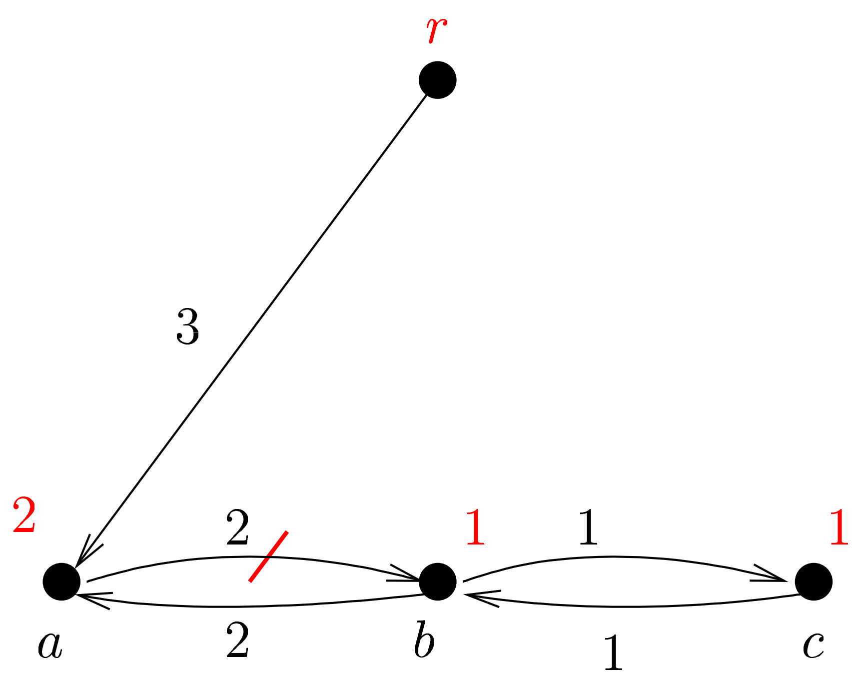
On effectue ce traitement tant qu'il existe une arborescence enracinée en r de poids C_{opt} qui couvre tous les sommets

Exemple



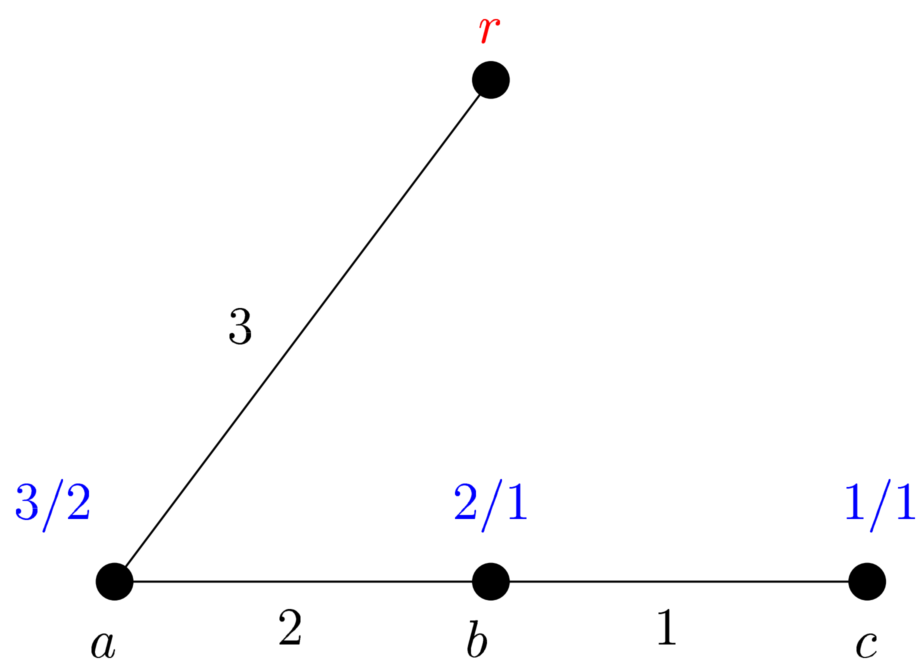
On effectue ce traitement tant qu'il existe une arborescence enracinée en r de poids C_{opt} qui couvre tous les sommets

Exemple



Stop : il n'existe plus d'arborescence enracinée en r qui couvre tous les sommets

Exemple



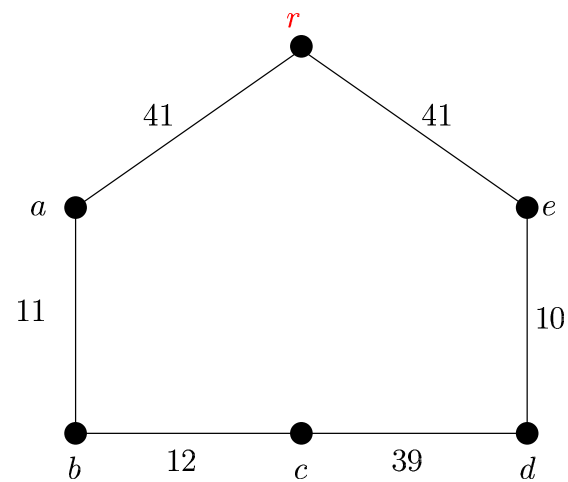
ACPM qui minimise le pire mécontentement

Mécontentement : Pire vs Moyen

On s’intéresse à la détermination d’un ACPM qui minimise le mécontentement moyen

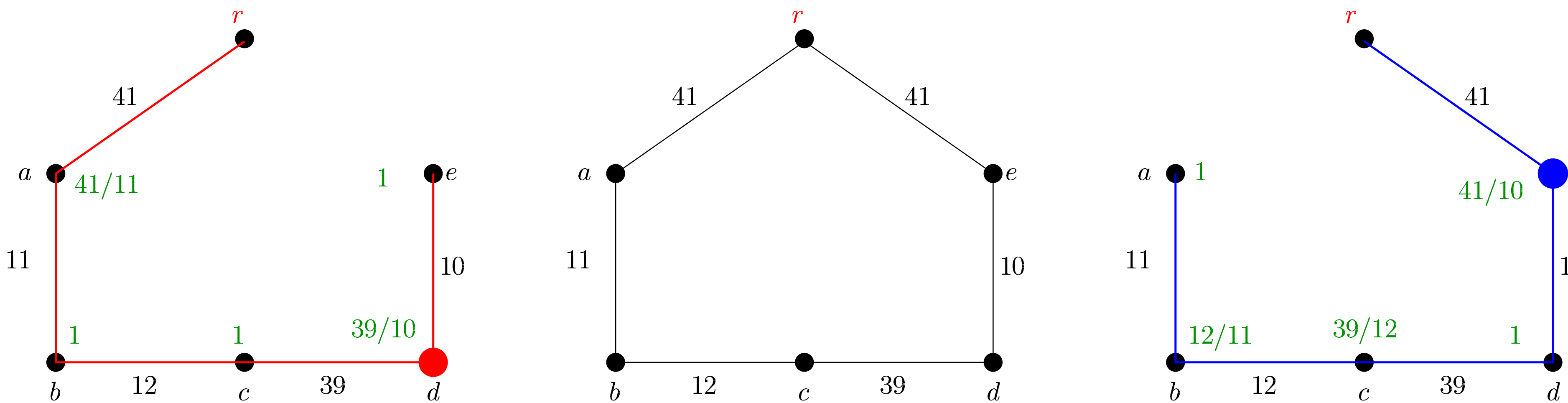
Remarque : Pas toujours concordance entre ACPM qui minimise le pire mécontentement et ACPM qui minimise le mécontentement moyen

Mécontentement : Pire vs Moyen



Instance

Mécontentement : Pire vs Moyen



Pire=3,9
Moyen= 2,12

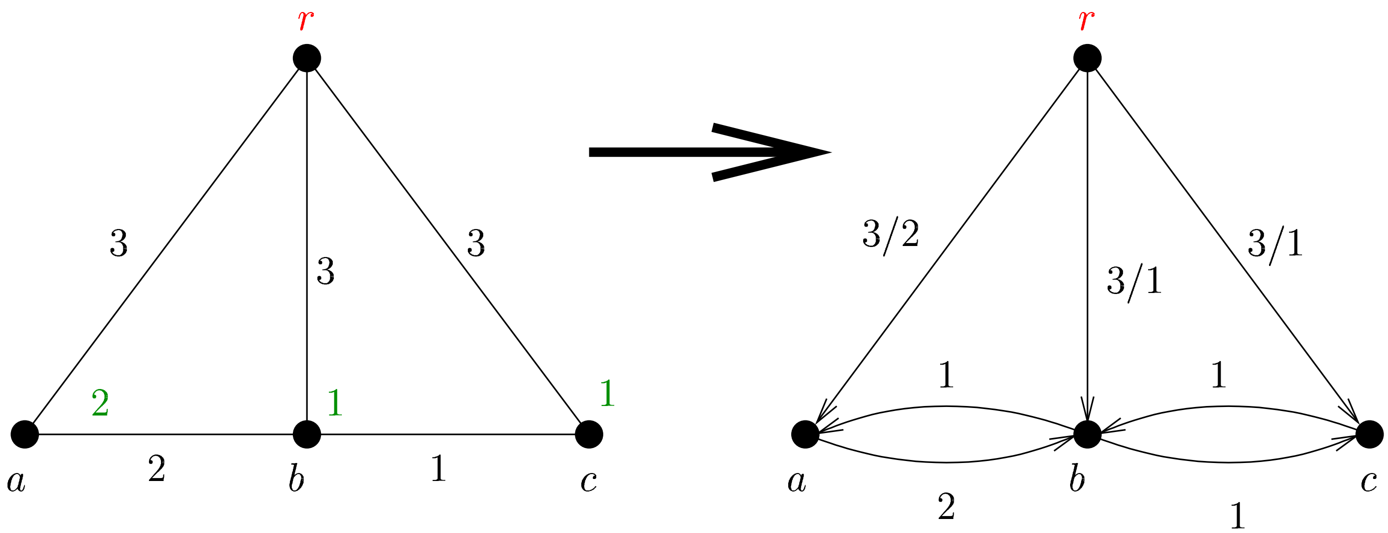
Instance

Pire=4,1
Moyen=2,08

Différence entre l'arbre qui minimise le pire mécontentement et celui qui minimise le mécontentement moyen

Minimiser le mécontentement moye

Idée : Remplacer le poids des arcs (u, v) par $\frac{c_{(u,v)}}{F_{min}(v)}$ puis déterminer une arborescence de poids minimal



Pb : On ne récupère pas toujours un ACPM

Minimiser le mécontentement moye

Deux critères à traiter de manière hiérarchique :

1. Le poids de l'arbre
2. Le mécontentement moyen

Minimiser le mécontentement moye

Deux critères à traiter de manière hiérarchique :

1. Le poids de l'arbre
2. Le mécontentement moyen

Du point de vue d'un arc (u, v) :

1. $c_{(u,v)}$
2. $c_{(u,v)}/F_{min}(v)$

Minimiser le mécontentement moye

Utilisation d'un coût composite $\tilde{c}$, combinaison des deux critères :

$$\tilde{c}_{(u,v)} = \lambda c_{(u,v)} + (1 - \lambda)\frac{c_{(u,v)}}{F_{min}(v)}$$

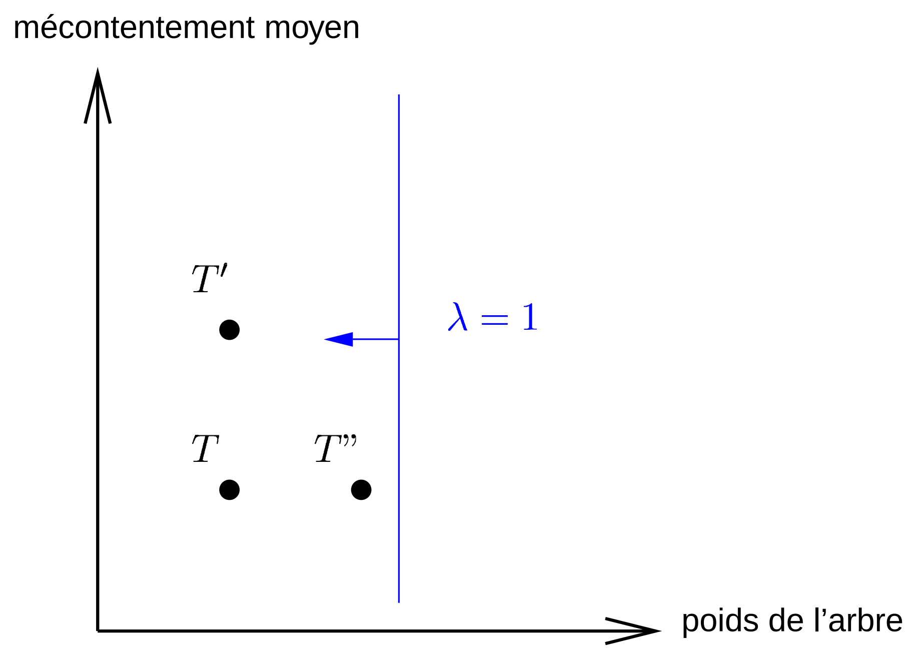
Déterminer un λ tel que tout ACPM vis à vis de $\tilde{c}$ soit l'optimum recherché

Minimiser le mécontentement moye

Utilisation d'un coût composite $\tilde{c}$, combinaison des deux critères :

$$\tilde{c}_{(u,v)} = \lambda c_{(u,v)} + (1 - \lambda) \frac{c_{(u,v)}}{F_{min}(v)}$$

Déterminer un λ tel que tout ACPM vis à vis de $\tilde{c}$ soit l'optimum recherché

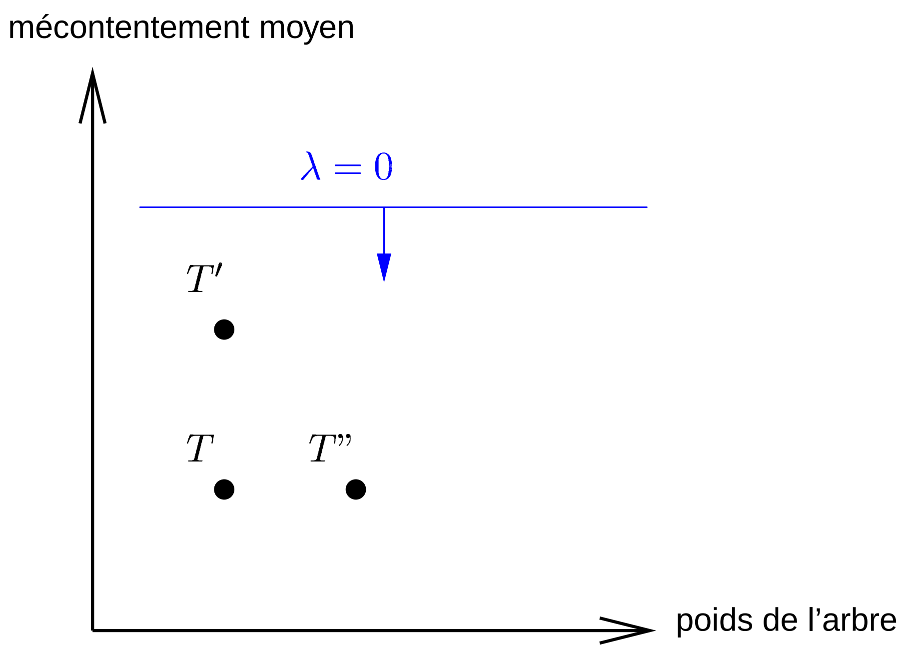


Minimiser le mécontentement moye

Utilisation d'un coût composite $\tilde{c}$, combinaison des deux critères :

$$\tilde{c}_{(u,v)} = \lambda c_{(u,v)} + (1-\lambda)\frac{c_{(u,v)}}{F_{min}(v)}$$

Déterminer un λ tel que tout ACPM vis à vis de $\tilde{c}$ soit l'optimum recherché

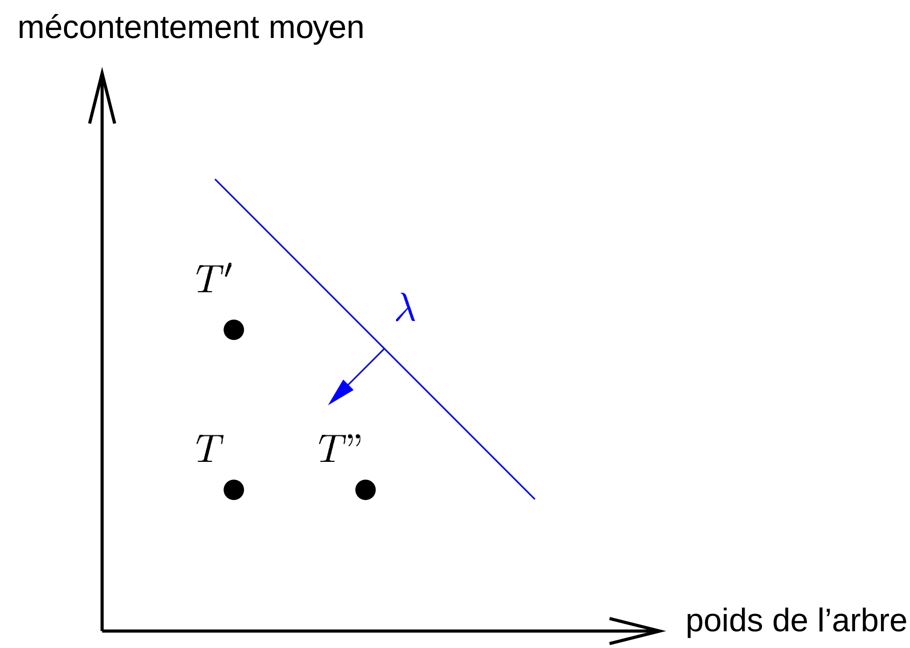


Minimiser le mécontentement moye

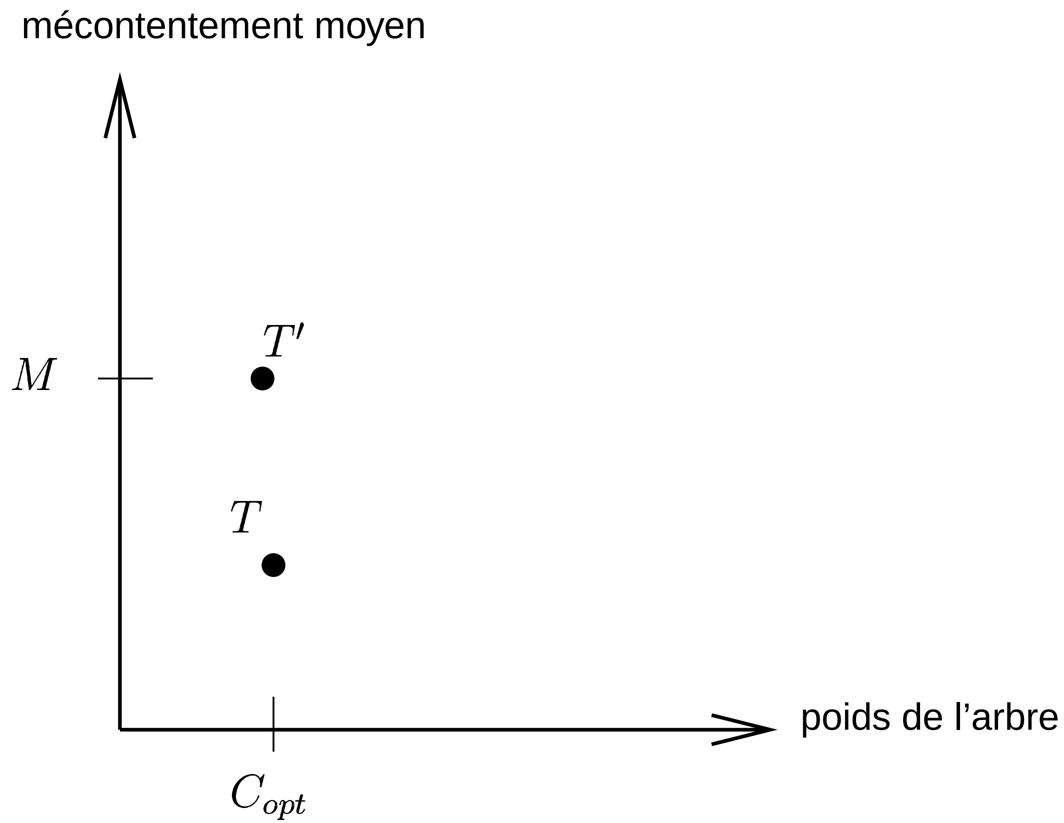
Utilisation d'un coût composite $\tilde{c}$, combinaison des deux critères :

$$\tilde{c}_{(u,v)} = \lambda c_{(u,v)} + (1-\lambda)\frac{c_{(u,v)}}{F_{min}(v)}$$

Déterminer un λ tel que tout ACPM vis à vis de $\tilde{c}$ soit l'optimum recherché

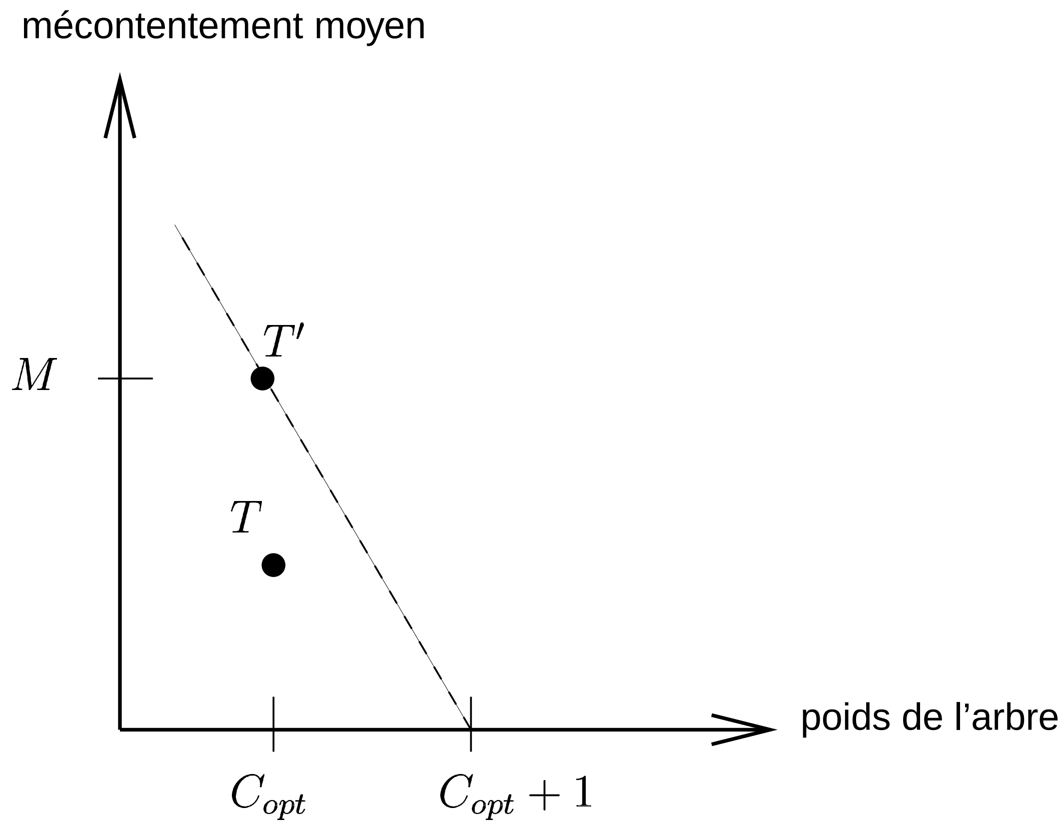


Minimiser le mécontentement moye



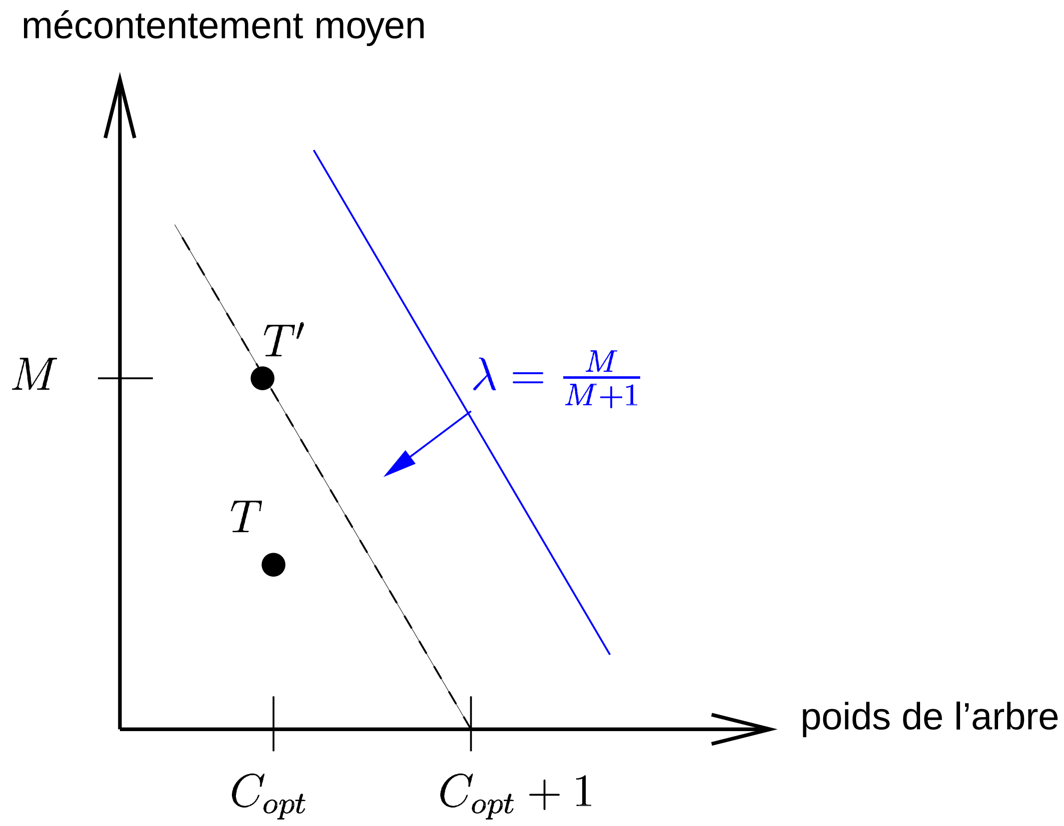
Déterminer un ACPM T'
Soit C_{opt} son poids et M son mécontentement moyen

Minimiser le mécontentement moyen



L'optimum recherché est nécessairement sous la ligne discontinue

Minimiser le mécontentement moye



Poser $\lambda = \frac{M}{M+1}$

Conclusion

- Mécontentement : notion d'équité pour une allocation de coût
- Application au jeu de l'ACPM : 2 algorithmes
  - Minimiser le pire mécontentement
  - Minimiser le mécontentement moyen

Perspectives

- Algorithme distribué pour déterminer les optima
- Jeu de l'ACPM : ne plus se restreindre aux allocations de Bird
- Notion de mécontentement pour d'autres problèmes