Décision dans l'incertain

Cours 2: Probabilités subjectives

Stéphane Airiau

Université Paris-Dauphine

Deux compréhensions des probabilités

- Fréquentistes : les probabilités existent dans la nature
  - pour l'approche statistique, c'est quelque chose de naturel
  - mais approche souvent difficile à justifier jusqu'au bout
- Subjective : les probabilités sont dans l'esprit humain
  - elles peuvent donc différer d'une personne à l'autre
  - comment les justifier ?

Vue Subjective

(de Finetti, Savage)

Les probabilités ne sont pas des propriétés du monde physique, mais des constructions intellectuelles.

Quelle est la probabilité qu'il pleuve demain ? Comment peut-on décider demain qui avait raison ? Est-ce que quelqu'un peut avoir tord ?

Pour qu'un degré de croyance devienne une probabilité, il faudra satisfaire quelques propriétés.

L'idée est que ces probabilités subjectives vont avoir des conséquences sur le comportement du sujet, et donc on va pouvoir mesurer leurs effets.

poser des questions pour "elliciter" ses probabilités.

ex : combien êtes vous prêt à assurer votre vélo contre le vol cette année ?

experience de Tversky et Kahneman

description : Linda a 31 ans, célibataire, franche, intelligente. Elle a obtenu une licence en philosophie. Pendant ses études, elle s'est intéressée aux problèmes de discrimination et de justice sociale, et elle a participé à des manifestations anti nucléaire.

Ordonnez les 8 descriptions suivantes en terme de probabilité qu'elle décrivent Linda.

a- Linda est enseignante en primaire

b- Linda est libraire et fait du yoga

c- Linda est active dans une organisation féministe

d- Linda est un travailleur social

e- Linda est membre de la Ligue des Electeurs Femmes

f- Linda travaille dans une banque

g- Linda vend des contrats d'assurance

h- Linda travaille dans une banque qui est active dans une organisation féministe

Deux résultats pour justifier l'approche subjective

Dans ce cours, on va énoncer deux résultats qui justifient l'approche subjective.

1- Théorème du "Dutch book"
➾ si on raisonne correctement sur des probabilités subjectives, on ne peut pas faire des paris à perte !
➾ il est nécessaire de suivre les lois des probabilités

2- Théorème de représentation de Savage
méthode axiomatique : énoncer un nombre de principes / axiomes qui nous paraissent bons à respecter
Le théorème montre que si on accepte tous ces axiomes, alors on doit construire un outil mathématique qui suit les lois des probabilités

➾ si accepte le concept des probabilités subjectives, alors il faut respecter les lois de probabilités !

Deux résultats pour justifier l'approche subjective

On ne cherchera pas à donner toutes les démonstrations ou énoncer dans les détails les résultats.

- montrer l'existence de fondation des probabilités
- un exemple de l'approche axiomatique utilisée en théorie de la décision et de la décision collective (ex comment justifie-t-on une méthode de vote)
- discuter les axiomes du théorème de Savage

Faire des paris

Supposons que vous pensez que les travaux de rénovation de Dauphine seront finis dans les temps avec un degré de 0.55.

Supposons que votre degré de croyance que les travaux prendront du retard est de 0.52.

Supposons qu'un bookmaker vous propose de faire un pari et qu'il est prêt à payer 10 € pour chaque évènement qui aura vraiment lieu.

- Vous êtes donc prêt à payer $0.55 \cdot 10 = 5.50$€pour faire le pari que les travaux seront finis dans les temps
- Similairement pour $0.52 \cdot 10 = 5.20$€vous être prêt à parier que les travaux finiront en retard.
- ➩ vous seriez prêt à depenser 10.70€pour obtenir 10€, quel que soit la date de fin des travaux !

Il y a quelque chose d'irrationel ! Evidemment, il faudrait que $0.55 + 0.52 = 1$!

Faire des paris

mettre en lumière une relation entre

- des préférences (personnelles) entre des options incertaines
- des degrés de croyances qui doivent respecter certaines règles.

Prix "juste"

payer 30€ pour assurer son vélo qui vaut 600 € est un montant qu'est prêt à payer à la fois le propriétaire du vélo ou l'assureur.

⇒ il n'est pas important de savoir si

- on est la personne qui paye 30€ et qui reçoit 600€ si son vélo est volé ou rien
- on est l'assureur qui reçoit 30 €et qui doit payer 600€ si le vélo est volé ou rien.

On pourra donc choisir d'"acheter" ou de "vendre" le pari au bookmaker.

On fait aussi l'hypothèse que ce prix est unique. On fait aussi l'hypothèse que ce prix est suffisemment haut pour prendre les choses sérieusement, mais pas trop haut pour ne pas avoir peur de perdre trop.

Le rapport entre le prix "juste" et le montant en jeu est appelé <u>le quotient du pari</u>.

dans l'exemple $p = \frac{30}{600} = 0.05$

Mise en place

Le décideur commence par annoncer ses quotients pour un certain nombre d'évènement qui peuvent ou non se réaliser. Soit $E = \{x_1, x_2, ..., x_k\}$ cet ensemble.

Ensuite, le décideur doit annoncer ses quotient pour tout élément composé par plusieurs éléments de E : $E^* = \{\neg x_1, x_1 \wedge x_2, x_1 \vee x_2, \ldots\}$.

Ensuite le joueur doit énoncer ses quotients pour les évènement de E^*.

Le bookmaker peut alors choisir le montant de chaque pari.

Si le quotient du joueur est p et le montant du bookmaker est S :

- le joueur doit payer $p \cdot S$ pour faire le pari.
- si l'évènement a lieu, il reçoit S
- si l'évènement n'a pas lieu, il ne reçoit rien (mais a payé $p \cdot S$)

Théorème informel

Si le quotient du joueur viole les axiomes de probabilité, alors il peut être exploité par un "Dutch book" : le bookmaker pourra toujours choisir des montants qui lui permettront **pour sûr** de gagner de l'argent !

Si les quotients satisfont les axiomes de probabilités, alors il est **impossible** de mettre en place un "Dutch book".

De Finetti a démontré la première partie dans les année 1930.

(démonstration simple)

L'autre sens a été prouvé dans les années 1950.
(démonstration plus compliquée, pas dans ce cours)

Exemple hippique!

les chances en faveur sont le quotient : nombre de fois où un évènement arrive par le nombre de fois où il n'arrive pas.
ex : 1 : 2 il y a une chance que ça arrive et deux chances du contraire

- ➯ le quotient est $\frac{1}{3}$
- le montant est de 3
- le prix à payer est $\frac{1}{3} \cdot 3 = 1$
- parier : le joueur paye 1,
- si l'évènement a lieu :
  - le joueur gagne
  - ➯ il reçoit le montant, donc un gain net de $3 - 1 = S - p \cdot S = 2$
- si l'évènement n'a pas lieu
  - le joueur perd
  - ➯ il ne reçoit rien et a un gain net de $-p \cdot S = -1$

On peut donc refaire un exemple avec les chances 1 : 4 qu'un évènement arrive, et les chances 7 : 3 que son contraire n'arrive pas. On arrive à un même problème !

Quelques limitations

- les paris utilisent une monnaie
  cependant, les préférences ne sont pas forcemment représentable par une fonction linéaire d'une monnaie
  - une augmentation de 100€pour un salarié au smic
  - une augmentation de 100€du PDG de Renault Nissan

Une autre justification : axiomatisation de Savage