Un cadre axiomatique commun pour la théorie de l'utilité espérée et la théorie de la décision qualitative

A common axiomatic framework for Subjective Expected Utility and Qualitative Decision Theory

Denis Bouyssou[1] Marc Pirlot[2]

[1] CNRS

[2] Faculté Polytechnique de Mons

LAMSADE, Université Paris Dauphine, F-75775 Paris Cedex 16, France, bouyssou@lamsade.dauphine.fr

FPMs, 9, rue de Houdain, B-7000 Mons, Belgique, marc.pirlot@fpms.ac.be

Résumé :

Le développement de l'intelligence artificielle a amené les chercheurs du domaine à proposer des modèles de décision dans l'incertain qui s'écartent de ceux habituellement utilisés en théorie de la décision, c'est-à-dire le modèle de l'utilité espérée subjective et ses multiples variantes. Ces modèles, habituellement regroupés sous l'appellation « théorie de la décision qualitative », visent à obtenir des règles de décision simples, facilement implémentables et fondés sur des intrants moins riches que ceux utilisés dans les modèles classiques. L'objet de cet article est de proposer un cadre axiomatique pour la décision dans l'incertain permettant de retrouver ces deux types de modèles comme cas particuliers et, ainsi, d'en faire ressortir les similarités et les différences. Ce cadre axiomatique est fondé sur un modèle de mesurage conjoint tolérant les préférences incomplètes et/ou intransitives.

Mots-clés :

Décision dans l'incertain, mesurage conjoint, préférences non transitives, théorie de la décision qualitative.

Abstract:

In the field of Artificial Intelligence many models for decision making under uncertainty have been proposed that deviate from the traditional models used in Decision Theory, i.e. the Subjective Expected Utility (SEU) model and its many variants. These models, forming what is usually called "Qualitative Decision Theory", aim at obtaining simple decision rules that can be implemented by efficient algorithms while based on inputs that are less rich than what is required in traditional models. The purpose of this paper is to present an axiomatic framework for decision under uncertainty that contains as particular cases both types of models. It is based on a model for conjoint measurement tolerating intransitive and/or incomplete preferences. The use of this axiomatic framework allows us to pinpoint the similarities and the differences between these two types of models.

Keywords:

Decision under uncertainty, conjoint measurement, nontransitive preferences, qualitative decision theory.

1 Introduction

Le développement de l'intelligence artificielle a amené les chercheurs du domaine à proposer des modèles de décision dans l'incertain qui s'écartent de ceux habituellement utilisés en théorie de la décision : le modèle de l'utilité espérée subjective (SEU) et ses multiples variantes [19, 29]. Ces modèles sont habituellement regroupés sous l'appellation « théorie de la décision qualitative » [2, 9–15, 28]. Le but de ces modèles est d'obtenir des règles de décision dans l'incertain simples, facilement implémentables et fondées sur des sur des intrants moins riches que ceux utilisés dans les modèles classiques. On a ainsi proposé de comparer des « actes » en se fondant sur leurs conséquences dans l'état le plus plausible [2, 28] ou encore en raffinant des critères classiques [23, 24] de décision dans l'incertain total [10, 15].

Plus récemment, Dubois et al. [13] ont proposé un modèle « purement ordinal » de décision dans l'incertain qui est fondé sur une comparaison par paire des actes. Celle-ci résulte d'une comparaison en terme de « vraisemblance » de l'ensemble des états de la nature favorables à chaque élément de la paire. Ce modèle présente l'avantage de pouvoir être mis en œuvre dès lors que l'on dispose d'une relation binaire comparant les conséquences en terme de préférence et d'une relation binaire comparant les événements en terme de vraisemblance. Ce modèle de la « dominance vraisemblable » (*likely dominance*, modèle LD) a été analysé et axiomatisé dans une série d'articles récents [12, 14, 17]. Cette analyse axiomatique est fondée sur l'utilisation d'un axiome de « non-compensation », introduit dans [18] qui est tout à fait spécifique à ces relations. Cette analyse se prête donc difficilement à une comparaison des relations de préférence pouvant être obtenues dans le modèle SEU et dans le modèle LD.

L'objet de cet article est de proposer un cadre axiomatique pour la décision dans l'incertain qui soit suffisamment souple pour contenir comme cas particulier *à la fois* le modèle SEU et le modèle LD. Cette analyse se fonde sur un modèle de mesurage conjoint proposé dans [3, 4]. Dans ce cadre axiomatique, on propose une nouvelle axiomatisation du modèle LD qui en fera ressortir la caractéristique essentielle : la pauvreté des comparaisons d'écarts de préférence qu'il induit sur l'ensemble des conséquences.

Après avoir introduit notre cadre de travail en section 2, nous présentons le modèle LD en section 3. Notre cadre axiomatique pour la décision dans l'incertain est décrit en section 4. La section 5 propose une caractérisation du modèle LD au sein de ce cadre. Nos résultats sont discutés en section 6. Pour des raisons de place, toutes les démonstrations ont été omises et le lecteur est renvoyé à [8] pour une analyse plus approfondie.

2 Définitions et notations

Notre cadre de travail est celui de la décision dans l'incertain avec un nombre fini d'états de la nature. Soit $\Gamma = \{\alpha, \beta, \gamma, \ldots\}$ un ensemble de *conséquences* et $N = \{1, 2, \ldots, n\}$ un ensemble d'états de la nature. On suppose classiquement que les éléments de N sont exhaustifs et mutuellement exclusifs : un et un seul des états de N se produira. Un *acte* est une application de N dans Γ. L'ensemble de tous les actes est noté $\mathcal{A} = \Gamma^N$ (on notera toujours les actes par des lettres minuscules : $a, b, c, d, \ldots$). Un acte $a \in \mathcal{A}$ associe donc à chaque état $i \in N$ une conséquence $a(i) \in \Gamma$; on écrira souvent a_i au lieu de $a(i)$. On notera $\overline{\alpha}$ l'acte constant donnant la conséquence $\alpha \in \Gamma$ dans tous les états $i \in N$. Soit $E \subseteq N$ et $a, b \in \mathcal{A}$. On notera $a_E b$ l'élément $c \in \mathcal{A}$ tel que $c_i = a_i$, $\forall i \in E$ et $c_i = b_i$, $\forall i \in N \setminus E$. De même, on notera $\alpha_E b$ l'acte $d \in \mathcal{A}$ tel que $d_i = \alpha$, $\forall i \in E$ et $d_i = b_i$, $\forall i \in N \setminus E$. Lorsque $E = \{i\}$, on écrira simplement $a_i b$ et $\alpha_i b$.

Dans ce texte, on notera $\mathcal{P}$ une relation binaire sur $\mathcal{A}$ interprétée comme une relation de préférence stricte entre actes. On déduit de $\mathcal{P}$ la relation $\mathcal{I}$, interprétée comme une relation traduisant l'absence de préférence, en posant $a \; \mathcal{I} \; b \Leftrightarrow Non[a \; \mathcal{P} \; b]$ et $Non[b \; \mathcal{P} \; a]$.

La relation $\mathcal{P}$ induit une relation $\mathcal{P}_\Gamma$ sur l'ensemble des conséquences Γ par le biais de la comparaison des actes constants : $\alpha \; \mathcal{P}_\Gamma \; \beta \Leftrightarrow \overline{\alpha} \; \mathcal{P} \; \overline{\beta}$. Soit E un sous-ensemble non vide de N (un « événement »). La relation $\mathcal{P}$ induit une relation de préférence $\mathcal{P}_E$ (« conditionnelle à E ») en posant $a \; \mathcal{P}_E \; b$ si $a_E c \; \mathcal{P} \; b_E c$ pour tout $c \in \mathcal{A}$. Lorsque $E = \{i\}$, on écrira $\mathcal{P}_i$ au lieu de $\mathcal{P}_{\{i\}}$. Si, dès lors qu'il existe un acte $c \in \mathcal{A}$ tel que $a_E c \; \mathcal{P} \; b_E c$, on a $a \; \mathcal{P}_E \; b$, on dira que $\mathcal{P}$ est indépendante pour E, c'est-à-dire que la comparaison d'actes ne différant que sur les états de E ne dépend pas de leurs conséquences communes sur les états de $N \setminus E$. Lorsque $\mathcal{P}$ est indépendante pour tout sous-ensemble non vide d'états, on dira que $\mathcal{P}$ est indépendante. Il est aisé de montrer que $\mathcal{P}$ est indépendante dès lors qu'elle est indépendante pour $N \setminus \{i\}$, $\forall i \in N$ [29]. La propriété d'indépendance définie ici n'est rien d'autre que le « principe de la chose sûre » (postulat $P2$ dans [26]).

On dira qu'un état $i \in N$ est *influent* (pour $\mathcal{P}$) s'il existe $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \Gamma$ et $a, b \in \mathcal{A}$ tels que $\alpha_i a \; \mathcal{P} \; \beta_i b$ et $Non[\gamma_i a \; \mathcal{P} \; \delta_i b]$. Un état non influent sera dit dégénéré. Il est clair qu'un état dégénéré n'a aucun impact sur $\mathcal{P}$. On supposera dans la suite, sans perte sérieuse de généralité, que tous les états de N sont influents.

Notons que cette hypothèse n'exclut pas la présence d'états nuls c'est-à-dire tels que $a_i c \, \mathcal{I} \, b_i c$, $\forall a, b, c, \in \mathcal{A}$ (mais impose que $\mathcal{P}$ soit non vide).

3 Le modèle LD

La définition suivante, directement inspirée de [13, 14, 17] (une version du modèle LD dans laquelle $\rhd$ peut ne pas être monotone par rapport à l'inclusion est aussi présentée dans [13, 14, 17] ; nous ne traitons pas ici de cette variante), formalise le mode de comparaison des actes à l'œuvre dans le modèle LD.

Définition 1 (modèle LD) *Soit $\mathcal{P}$ une relation binaire* asymétrique *sur $\mathcal{A}$. On dira que $\mathcal{P}$ a une représentation dans le modèle LD s'il existe :*

- *une relation binaire* asymétrique *P sur Γ,*
- *une relation binaire $\rhd$ entre sous-ensembles disjoints de N telle que $\rhd$ soit monotone par rapport à l'inclusion (c'est-à-dire telle que, $\forall A, B, C, D \subseteq N$, $[A \rhd B, C \supseteq A, B \supseteq D, C \cap D = \varnothing] \Rightarrow C \rhd D$),*

telles que :

$$a \, \mathcal{P} \, b \Leftrightarrow P(a, b) \rhd P(b, a),$$

$\forall a, b \in \mathcal{A}$, où $P(a, b) = \{i \in N : a_i \; P \; b_i\}$. On dit alors que $\langle \rhd, P \rangle$ est une représentation de $\mathcal{P}$ dans le modèle LD.

Ainsi, lorsque $\mathcal{P}$ a une représentation dans le modèle LD, la relation de préférence liant les actes a et b dépend seulement de la comparaison des sous-ensembles d'états $P(a, b)$ et $P(b, a)$ en terme de « vraisemblance ». Elle ne dépend pas de la prise en compte d'« écarts de préférence » entre les conséquences allant au-delà de la distinction entre les conséquences induite par la relation P.

Soit $\mathcal{P}$ une relation ayant une représentation $\langle \rhd, P \rangle$ dans le modèle LD. Soit $A, B \subseteq N$ tels que $A \cap B = \varnothing$. On définit les relations $\triangleq$ (relation d'« égale vraisemblance ») et $\unrhd$ (relation « au moins aussi vraisemblable que ») en posant $A \triangleq B \Leftrightarrow [Non[A \rhd B]$ et $Non[B \rhd A]]$ et $A \unrhd B \Leftrightarrow [A \rhd B$ ou $A \triangleq B]$.

On présente ci-après quelques propriétés élémentaires du modèle LD (on utilise ici l'hypothèse de l'influence de tous les états).

Proposition 1 *Soit $\mathcal{P}$ une relation binaire ayant une représentation $\langle \rhd, P \rangle$ dans le modèle LD. Alors :*

1. *$\mathcal{P}$ est non vide et indépendante,*
2. *P est non vide et $P = \mathcal{P}_\Gamma$,*
3. *$\forall A, B \subseteq N$ tels que $A \cap B = \varnothing$, on a une et une seule des relations $A \rhd B$, $B \rhd A$, $A \triangleq B$; de plus, $\varnothing \triangleq \varnothing$,*
4. *$\forall A \subseteq N$, $A \unrhd \varnothing$; de plus $N \rhd \varnothing$,*
5. *$\forall i \in N$, soit $\mathcal{P}_i = P$ soit $\mathcal{P}_i = \varnothing$,*
6. *la représentation $\langle \rhd, P \rangle$ de $\mathcal{P}$ dans le modèle LD est* unique.

4 Un cadre axiomatique général pour la décision dans l'incertain

On envisage ici des relations binaires $\mathcal{P}$ sur $\mathcal{A}$ qui peuvent être représentées dans un modèle du type :

$$a \, \mathcal{P} \, b \Leftrightarrow F(p(a_1, b_1), p(a_2, b_2), \ldots, p(a_n, b_n)) > 0 \quad (1)$$

où p est une application de Γ^2 dans $\mathbb{R}$ antisymétrique ($p(\alpha, \beta) = -p(\beta, \alpha)$) et F est une application de $\prod_{i=1}^{n} p(\Gamma^2)$ dans $\mathbb{R}$, non décroissante dans chacun de ses arguments et impaire ($F(\mathbf{x}) = -F(-\mathbf{x})$).

Il est utile d'interpréter p comme une fonction mesurant les écarts de préférence (positifs ou négatifs) entre conséquences. L'hypothèse d'antisymétrie de p traduit alors l'hypothèse que l'écart entre α et β est l'opposé de l'écart entre β et α. Avec cette interprétation, la comparaison de deux actes a et b s'opère comme suit. Dans un premier temps on mesure, dans chaque état, l'écart de préférence entre a_i et b_i. On réalise ensuite la synthèse de ces écarts en utilisant la fonction F. Si la synthèse est positive, on conclut que a est préféré à b. Il est donc naturel de supposer que F est non décroissante en chacun de ses arguments. L'hypothèse selon laquelle F est impaire traduit le fait que si un bilan d'écarts est positif, le bilan des écarts opposés doit être négatif, ce qui semble naturel (notons que cette hypothèse permet de s'assurer de l'asymétrie de $\mathcal{P}$). Il est possible d'envisager de multiples variantes du modèle (1), par exemple en supposant que F est strictement croissante en chacun de ses arguments. Ces variantes sont simples à analyser en s'inspirant de ce qui est fait ci-après et de [3, 4].

Il est aisé de vérifier que le modèle (1) permet de prendre en compte des relations $\mathcal{P}$ sur $\mathcal{A}$ potentiellement non transitives. Il est suffisamment flexible pour contenir comme cas particuliers :

- le modèle SEU [29] dans lequel :

$$a \; \mathcal{P} \; b \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} w_i u(a_i) > \sum_{i=1}^{n} w_i u(b_i) \qquad (2)$$

  où les w_i sont des nombres non négatifs sommant à 1 et u est une application de Γ dans $\mathbb{R}$,
- le modèle SSA introduit dans [19, 20] dans lequel :

$$a \; \mathcal{P} \; b \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} w_i \Phi(a_i, b_i) > 0 \qquad (3)$$

  où les w_i sont des nombres non négatifs sommant à 1 et Φ est une application antisymétrique de Γ^2 dans $\mathbb{R}$.

On verra à la section suivante que le modèle (1) contient également le modèle LD comme cas particulier.

Notons que le modèle (1) implique que $\mathcal{P}$ est indépendante. Il n'est donc pas adapté pour traiter de violations du principe de la chose sûre telles que présentées dans [1, 16, 21] (la prise en compte de tels effets impliquerait l'utilisation de modèles s'écartant sensiblement de ceux étudiés ici).

L'analyse axiomatique du modèle (1) est fondée sur la définition de relations comparant les différences de préférence entre les éléments de Γ (l'intérêt de telles relations a déjà été souligné dans [29] ; notons que nos définitions diffèrent de celles utilisées dans [29], même si nous utilisons des notations identiques).

Définition 2 *Soit $\mathcal{P}$ une relation binaire sur $\mathcal{A}$. On définit les relations binaires $\succsim^*$ et $\succsim^{**}$ sur Γ^2 en posant,* $\forall \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \Gamma$,

$$(\alpha, \beta) \succsim^* (\gamma, \delta) \Leftrightarrow$$
$$[\forall a, b \in \mathcal{A}, \forall i \in N, \gamma_i a \; \mathcal{P} \; \delta_i b \Rightarrow \alpha_i a \; \mathcal{P} \; \beta_i b],$$

$$(\alpha, \beta) \succsim^{**} (\gamma, \delta) \Leftrightarrow$$
$$[(\alpha, \beta) \succsim^* (\gamma, \delta) \textit{ et } (\delta, \gamma) \succsim^* (\beta, \alpha)].$$

La relation $\succsim^*$ est une relation comparant les écarts de préférence entre conséquences induite par la relation $\mathcal{P}$ sur l'ensemble des actes. Contrairement à l'intuition, cette relation comparant les écarts de préférence n'implique rien quant à la comparaison entre un écart (α, β) et l'écart « opposé » (β, α). C'est le rôle de la relation $\succsim^{**}$ qui, par construction, est *réversible*, c'est-à-dire telle que $(\alpha, \beta) \succsim^{**} (\gamma, \delta) \Leftrightarrow (\delta, \gamma) \succsim^{**} (\beta, \alpha)$.

Du fait de leur définition, les relations $\succsim^*$ et $\succsim^{**}$ sont réflexives et transitives (les parties symétriques de ces relations, notées $\sim^*$ et $\sim^{**}$, sont donc des relations d'équivalence).

L'analyse axiomatique du modèle (1) repose sur deux conditions adaptées de [3]. Leur fonction est d'imposer à la relation $\succsim^{**}$ d'être complète, ce qui est clairement impliqué par le modèle (1). Au sein du modèle (1), la fonction p sera alors bâtie comme une représentation numérique du préordre complet $\succsim^{**}$.

Définition 3 *Soit $\mathcal{P}$ une relation binaire sur $\mathcal{A}$. Cette relation satisfait à :*

$$\textit{UARC1 si} \quad \left.\begin{array}{c} \alpha_i a \; \mathcal{P} \; \beta_i b \\ \textit{et} \\ \gamma_j c \; \mathcal{P} \; \delta_j d \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} \gamma_i a \; \mathcal{P} \; \delta_i b \\ \textit{ou} \\ \alpha_j c \; \mathcal{P} \; \beta_j d, \end{array}\right.$$

$$\textit{UARC2 si} \quad \left.\begin{array}{c} \alpha_i a \;\mathcal{P}\; \beta_i b \\ \textit{et} \\ \beta_j c \;\mathcal{P}\; \alpha_j d \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} \gamma_i a \;\mathcal{P}\; \delta_i b \\ \textit{ou} \\ \delta_j c \;\mathcal{P}\; \gamma_j d, \end{array}\right.$$

$\forall i, j \in N$, $\forall a, b, c, d \in \mathcal{A}$ *et* $\forall \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \Gamma$.

La condition UARC1 a une interprétation simple. Supposons que $\alpha_i a \;\mathcal{P}\; \beta_i b$ et $Non[\gamma_i a \;\mathcal{P}\; \delta_i b]$. C'est le signe que l'écart de préférence entre α et β est plus grand que l'écart de préférence entre γ et δ. Dès lors, si $\gamma_j c \;\mathcal{P}\; \delta_j d$, il est naturel de supposer que $\alpha_j c \;\mathcal{P}\; \beta_j d$. La condition UARC1 revient donc à imposer que la relation $\succsim^*$ est complète. La condition UARC2 impose une cohérence dans la comparaison entre deux écarts opposés : soit l'écart de préférence entre α et β est plus grand, au sens de $\succsim^*$, que l'écart entre γ et δ, soit l'écart de préférence entre δ et γ est plus grand que l'écart entre β et α. Lorsque $\succsim^*$ est complète, cette condition permet de s'assurer que $\succsim^{**}$ est complète.

Notons enfin que ces conditions imposent que la comparaison d'écarts de préférence induite dans des états différents ne doit pas révéler d'informations contradictoires (ce serait le cas avec des préférences dépendant des états telles qu'étudiées dans [22]). Les conséquences de ces deux conditions sont résumées dans le lemme suivant.

Lemme 1 *On a :*

1. *UARC1* $\Leftrightarrow$ [$\succsim^*$ *est complète*],
2. *UARC2* $\Leftrightarrow$ $[\forall \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \Gamma,\ Non[(\alpha, \beta) \succsim^* (\gamma, \delta)] \Rightarrow (\beta, \alpha) \succsim^* (\delta, \gamma)]$,
3. [*UARC1 et UARC2*] $\Leftrightarrow$ [$\succsim^{**}$ *est complète*].
4. *Les conditions UARC1 et UARC2 sont indépendantes dans la classe des relations binaires asymétriques.*
5. *UARC2* $\Rightarrow$ [$\mathcal{P}$ *est indépendante*].

Il n'est pas difficile de montrer qu'une relation binaire représentable dans le modèle (1) satisfait nécessairement à UARC1 et UARC2. Intuitivement, ceci est dû au fait que la fonction p antisymétrique qui mesure les écarts de préférence entre conséquences induit un préordre complet réversible sur Γ^2. Ces deux conditions caractérisent le modèle (1) dans le cas où $\Gamma/\sim^{**}$ est fini ou infini dénombrable.

Théorème 1 *Soit* $\mathcal{P}$ *une relation binaire sur* $\mathcal{A}$. *Si* $\Gamma/\sim^{**}$ *est fini ou infini dénombrable, alors* $\mathcal{P}$ *a une représentation dans le modèle* (1) *si et seulement si elle est asymétrique et satisfait à UARC1 et UARC2.*

Nous renvoyons à [8] pour l'étude de l'extension de ce résultat à des ensembles de cardinalité quelconque (il est alors nécessaire d'ajouter une condition assurant que le préordre complet $\succsim^{**}$ peut être représenté numériquement). Remarquons ici que la représentation d'une relation binaire dans le modèle (1) est très loin d'être unique. Il est toutefois facile de montrer que $(\alpha, \beta) \succ^{**} (\gamma, \delta)$ implique que $p(\alpha, \beta) > p(\gamma, \delta)$ dans toute représentation $\langle F, p \rangle$ de $\mathcal{P}$ dans le modèle (1). Le nombre de valeurs distinctes prises par p est donc une borne supérieure du nombre de classes d'équivalence distinctes de $\succsim^{**}$.

5 Une nouvelle caractérisation du modèle LD

Considérons une relation binaire $\mathcal{P}$ ayant une représentation binaire dans le modèle (1), représentation dans laquelle la fonction p ne prend que trois valeurs distinctes. L'intuition suggère qu'une telle relation est très proche d'une relation ayant une représentation dans le modèle LD. En effet on pourra alors poser $\alpha \; P \; \beta$ si $p(\alpha, \beta) > 0$, en étant assuré que P résume bien toute l'information contenue dans p. Cette section formalise cette intuition.

Notons tout d'abord que le modèle LD est un cas particulier du modèle (1).

Lemme 2 *Soit* $\mathcal{P}$ *une relation binaire sur* $\mathcal{A}$ *ayant une représentation dans le modèle LD. Alors :*

1. $\mathcal{P}$ *satisfait à UARC1 et UARC2,*

2. *La relation $\succsim^{**}$ a au plus trois classes d'équivalence distinctes.*

Réciproquement, une relation binaire $\mathcal{P}$ ayant une représentation dans le modèle (1) dans laquelle la fonction p prend au plus trois valeurs distinctes a une représentation dans le modèle LD.

Lemme 3 *Soit $\mathcal{P}$ une relation binaire sur $\mathcal{A}$ ayant une représentation dans le modèle* (1) *dans laquelle la fonction p prend au plus trois valeurs distinctes. Alors $\mathcal{P}$ a une représentation $\langle \rhd, P \rangle$ dans le modèle LD.*

La caractérisation du modèle LD au sein du modèle (1) passe alors par l'introduction de conditions limitant le nombre de classes d'équivalence de $\succsim^{**}$. C'est le rôle des deux conditions introduites ci-après.

Définition 4 *Soit $\mathcal{P}$ une relation binaire sur $\mathcal{A}$. Cette relation satisfait à :*

$$\textit{UAM1 si} \quad \left.\begin{array}{c} \alpha_i a \;\mathcal{P}\; \beta_i b \\ \textit{et} \\ \gamma_i a \;\mathcal{P}\; \delta_i b \\ \textit{et} \\ \gamma_j c \;\mathcal{P}\; \delta_j d \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} \beta_i a \;\mathcal{P}\; \alpha_i b \\ \textit{ou} \\ \alpha_j c \;\mathcal{P}\; \beta_j d, \end{array}\right.$$

$$\textit{UAM2 si} \quad \left.\begin{array}{c} \alpha_i a \;\mathcal{P}\; \beta_i b \\ \textit{et} \\ \delta_i a \;\mathcal{P}\; \gamma_i b \\ \textit{et} \\ \beta_j c \;\mathcal{P}\; \alpha_j d \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} \beta_i a \;\mathcal{P}\; \alpha_i b \\ \textit{ou} \\ \gamma_j c \;\mathcal{P}\; \delta_j d, \end{array}\right.$$

$\forall i, j \in N$, $\forall a, b, c, d \in \mathcal{A}$ *et* $\forall \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \Gamma$.

La condition UAM1 a une interprétation simple. Supposons en effet que $\alpha_i a \;\mathcal{P}\; \beta_i b$ et $Non[\beta_i a \;\mathcal{P}\; \alpha_i b]$. Ceci indique que l'écart entre α et β est strictement plus grand que l'écart opposé. Il en découle que l'écart entre α et β doit être strictement positif. Puisque dans le modèle LD il n'existe que trois types d'écarts (les écarts positifs, les écarts nuls et les écarts négatifs), le fait que l'écart entre α et β soit strictement positif implique qu'il est au moins aussi grand que tout autre écart. En particulier si $\gamma_j c \;\mathcal{P}\; \delta_j d$, on doit nécessairement avoir $\alpha_j c \;\mathcal{P}\; \beta_j d$, ce qu'impose UAM1 (la prémisse $\gamma_i a \;\mathcal{P}\; \delta_i b$ vise à s'assurer que UAM1 est indépendante de UARC1 et de UARC2). La condition UAM2 a une interprétation duale : un écart strictement négatif doit être plus petit que tout autre écart. Ces observations sont résumées ci-après.

Lemme 4 *On a :*

1. *Soit $\mathcal{P}$ une relation binaire sur $\mathcal{A}$ ayant une représentation dans le modèle LD. Alors $\mathcal{P}$ satisfait à UAM1 et UAM2.*
2. *UARC1, UARC2, UAM1 et UAM2 $\Rightarrow \succsim^{**}$ est un préordre complet ayant au plus trois classes d'équivalence distinctes.*
3. *Dans la classe des relations binaires asymétriques sur $\mathcal{A}$, les conditions UARC1, UARC2, UAM1 et UAM2 sont indépendantes.*

On obtient alors une caractérisation complète du modèle LD :

Théorème 2 *Soit $\mathcal{P}$ une relation binaire sur $\mathcal{A}$. La relation $\mathcal{P}$ a une représentation dans le modèle LD si et seulement si elle est asymétrique et satisfait à UARC1, UARC2, UAM1 et UAM2.*

Comme annoncé, ce résultat caractérise donc le modèle LD *dans le cadre* du modèle (1). Au sein de ce modèle, la caractéristique essentielle du modèle LD est de générer une relation $\succsim^{**}$ pauvre, au sens où elle a au plus trois classes d'équivalence. On discute dans la section suivante de diverses extensions de ce résultat et de son apport relativement à d'autres caractérisations du modèle LD.

Nous revoyons le lecteur à [5, 7] pour une analyse semblable des modèles ordinaux dans le cadre de la décision multicritère. Ce cadre, plus complexe, suppose d'analyser des relations comparant les écarts de préférence sur chacun des critères.

6 Discussion

6.1 Comparaison avec [12, 14, 17]

Dans [14], il est proposé une caractérisation du modèle LD utilisant une condition appelée « invariance ordinale » (on trouvera des résultats voisins dans [12, 17]) qui est une adaptation de la condition de « non-compensation » introduite dans [18]. Nous présentons brièvement ce résultat (en l'adaptant pour traiter du cas dans lequel $\triangleright$ est monotone par rapport à l'inclusion) et nous le comparons au notre. Étant donnés $a, b \in \mathcal{A}$, on notera $R(a, b) = \{i \in N : a_i \mathcal{P}_\Gamma b_i\}$.

Définition 5 *Soit $\mathcal{P}$ une relation binaire sur $\mathcal{A}$. Cette relation satisfait la condition d'« indépendance qualitative monotone » (MQI) si*

$$\left.\begin{array}{rcl} R(a,b) & \supseteq & R(c,d) \\ & \textit{et} & \\ R(b,a) & \subseteq & R(d,c) \end{array}\right\} \Rightarrow [c \,\mathcal{P}\, d \Rightarrow a \,\mathcal{P}\, b],$$

$\forall a, b, c, d \in \mathcal{A}$.

Cette condition est un renforcement de la condition d'indépendance qualitative utilisée dans [14] (renforcement justifié par le fait que dans notre définition du modèle LD la relation $\triangleright$ est monotone par rapport à l'inclusion ; comme indiqué dans [12, 17], on pourrait également garder la condition originale utilisée dans [14] en lui adjoignant une condition de monotonie de $\mathcal{P}$ par rapport à $\mathcal{P}_\Gamma$).

Proposition 2 ([14]) *Soit $\mathcal{P}$ une relation binaire sur $\mathcal{A}$. La relation $\mathcal{P}$ a une représentation dans le modèle LD si et seulement si $\mathcal{P}$ est asymétrique et satisfait à MQI.*

Nous renvoyons le lecteur à [12, 14, 17] pour une analyse détaillée de ce résultat. Comparée à la caractérisation proposée plus haut, celle-ci utilise une condition (MQI) qui est à la fois très forte (on s'en rendra mieux compte en tentant de reformuler cette condition en utilisant la seule relation $\mathcal{P}$) et clairement très spécifique au modèle LD.

Au contraire, notre caractérisation utilise le cadre général du modèle (1) qui n'est pas spécifique, loin s'en faut, au modèle LD. Les deux conditions qu'il faut ajouter à UARC1 et UARC2 pour obtenir le modèle LD (UAM1 et UAM2) peuvent alors être vues les caractéristiques distinctives essentielles du modèle LD.

On peut envisager de caractériser de même le modèle SEU au sein du modèle (1). C'est ce qui est fait dans [6]. De manière schématique, on obtiendra le modèle SEU en imposant que Γ soit « riche », que $\mathcal{P}$ soit négativement transitive et se comporte de manière compatible avec la richesse de Γ et en renforçant les conditions UARC1 et UARC2. Le modèle (1) apparaît donc comme une base commune à la fois au modèle classique (SEU) et aux modèles purement ordinaux (LD).

6.2 Extensions

On montre dans [8] comment étendre les résultats présentés plus haut pour :

- caractériser les relations $\mathcal{P}$ ayant une représentation dans le modèle LD dans laquelle la relation P a de bonnes propriétés de transitivité (étant, par exemple, un quasi-ordre). Ceci suppose l'introduction de conditions additionnelles, sans liens avec celles utilisées ici. Il est remarquable que l'on puisse caractériser le modèle LD sans avoir à supposer que P a de bonnes propriétés. Ceci semble être une caractéristique unique des modèles d'agrégation ordinaux déjà soulignée dans [25].
- caractériser les relations $\mathcal{P}$ ayant une représentation dans le modèle LD dans laquelle $\triangleright$ a de bonnes propriétés (étant, par exemple, transitive ou sans circuit). Une fois encore, ceci suppose l'introduction de conditions sans liens avec celles introduites ici.

La caractérisation du modèle LD que nous proposons nous paraît éclairer d'un jour nouveau les différences et les similarités entre ce modèle ordinal et le modèle SEU.

Mentionnons enfin que l'analyse faite dans [12, 14, 17] ne se borne pas à proposer une caractérisation axiomatique du modèle LD. Celle-ci est ensuite utilisée pour étudier les conséquences, drastiques, du fait de supposer que $\mathcal{P}$ a de bonnes propriétés de transitivité et, ainsi, souligner les limites du modèle LD. Cette analyse est liée à la problématique du théorème d'Arrow et de ses variantes [27]. Elle montre les liens étroits entre le modèle LD, la théorie des possibilités et le raisonnement non monotone. Clairement, cette analyse importante n'est en rien dépendante de la voie choisie pour caractériser le modèle LD.

Remerciements :

Nous tenons à remercier Patrice Perny pour de très stimulantes discussions à propos de ce travail. Nous restons toutefois seuls responsables des erreurs et des obscurités qui pourraient subsister.

Références

[1] M. Allais. Le comportement de l'homme rationnel devant le risque : Critique des postulats et axiomes de l'école américaine. *Econometrica*, 21:503–46, 1953.

[2] C. Boutilier. Toward a logic for qualitative decision theory. In J. Doyle, E. Sandewall, and P. Torasso, editors, *Proceedings of the 4th International Conference on Principles of Knowledge Representation and Reasoning (KR'94)*, pages 75–86, San Mateo, CA, 1994. Morgan Kaufmann Publishers.

[3] D. Bouyssou and M. Pirlot. Nontransitive decomposable conjoint measurement. *Journal of Mathematical Psychology*, 46(6):677–703, 2002.

[4] D. Bouyssou and M. Pirlot. 'Additive difference' models without additivity and subtractivity. *Journal of Mathematical Psychology*, 48(4):263–291, 2004.

[5] D. Bouyssou and M. Pirlot. A characterization of concordance relations. Forthcoming in *European Journal of Operational Research*, 2004.

[6] D. Bouyssou and M. Pirlot. A note on Wakker's cardinal coordinate independence. *Mathematical Social Sciences*, 48(1):11–22, 2004.

[7] D. Bouyssou and M. Pirlot. Notes on strict concordance relations. Working Paper, 2004.

[8] D. Bouyssou and M. Pirlot. On some ordinal models for decision making under uncertainty. Working Paper, 2004.

[9] R. Brafman and M. Tennenholtz. Modeling agents as qualitative decision makers. *Artificial Intelligence*, 94:217–268, 1997.

[10] R. Brafman and M. Tennenholtz. On the axiomatization of qualitative decision criteria. *Journal of the ACM*, 47:452–482, 2000.

[11] J. Doyle and R. H. Thomason. Background to qualitative decision theory. *AI Magazine*, 20(2):55–68, 1999.

[12] D. Dubois, H. Fargier, and P. Perny. Qualitative decision theory with preference relations and comparative uncertainty: An axiomatic approach. *Artificial Intelligence*, 148:219–260, 2003.

[13] D. Dubois, H. Fargier, and H. Prade. Decision-making under ordinal preferences and uncertainty. In D. Geiger and P. P. Shenoy, editors, *Proceedings of the 13th conference on Uncertainty in Artificial Intelligence*, pages 157–164. Morgan Kaufmann, Los Altos, 1997.

[14] D. Dubois, H. Fargier, H. Prade, and P. Perny. Qualitative decision theory: from Savage's axioms to nonmonotonic reasoning. *Journal of the ACM*, 49(4):455–495, 2002.

[15] D. Dubois, H. Prade, and R. Sabbadin. Decision-theoretic foundations of qualitative possibility theory. *European Journal of Operational Research*, 128:459–78, 2001.

[16] D. Ellsberg. Risk, ambiguity and the Savage axioms. *Quarterly Journal of Economics*, 75:643–669, 1961.

[17] H. Fargier and P. Perny. Qualitative decision models under uncertainty without the commensurability assumption. In K. B. Laskey and H. Prade, editors, *Proceedings of Uncertainty in Artificial Intelligence*, pages 188–195. Morgan Kaufmann Publishers, 1999.

[18] P. C. Fishburn. Noncompensatory preferences. *Synthese*, 33:393–403, 1976.

[19] P. C. Fishburn. *Nonlinear preference and utility theory*. Johns Hopkins University Press, Baltimore, 1988.

[20] P. C. Fishburn. Skew symmetric additive utility with finite states. *Mathematical Social Sciences*, 19:103–115, 1990.

[21] D. Kahneman and A. Tversky. Prospect theory: An analysis of decision under risk. *Econometrica*, 47:263–291, 1979.

[22] E. Karni. *Decision-Making under Uncertainty: The Case of State-Dependent Preferences*. Harvard University Press, Cambridge, MA., 1985.

[23] R. D. Luce and H. Raiffa. *Games and Decisions*. Wiley, New York, 1957.

[24] J. Milnor. Games against nature. In R. M. Thrall, C. H. Coombs, and R. L. Davis, editors, *Decision Processes*, pages 49–59. Wiley, New York, 1954.

[25] D. G. Saari. Connecting and resolving Sen's and Arrow's theorems. *Social Choice and Welfare*, 15:239–261, 1998.

[26] L. J. Savage. *The Foundations of Statistics*. Wiley, New York, 1954.

[27] A. K. Sen. Social choice theory. In K. J. Arrow and M. D. Intriligator, editors, *Handbook of mathematical economics*, volume 3, pages 1073–1181. North-Holland, Amsterdam, 1986.

[28] S.-W. Tan and J. Pearl. Qualitative decision theory. In *AAAI 1994, Proceedings of the 12th National Conference on Artificial Intelligence, Volume 2*, pages 928–933. AAAI Press, 1994.

[29] P. P. Wakker. *Additive representations of preferences: A new foundation of decision analysis*. Kluwer, Dordrecht, 1989.