Décision
Hermès

Ouvrage coordonné par
Denis BOUYSSOU, Didier DUBOIS, Marc PIRLOT et Henri PRADE

30 septembre 2004

Table des matières

Chapitre 1

Mesurage conjoint et modèles relationnels de préférence[1]

1.1. Introduction

1.1.1. *Une brève revue des modèles du mesurage conjoint*

Le mesurage conjoint [KRA 71, WAK 89] étudie les relations binaires définies sur des produits cartésiens. De telles relations binaires sont au cœur d'un grand nombre de disciplines comme :

– la décision en présence de critères multiples dans laquelle une relation de préférence permet de comparer globalement des alternatives évaluées sur plusieurs critères [BEL 01, KEE 76, WIN 86] ;

– la décision dans l'incertain, où une relation de préférence compare des alternatives évaluées sur plusieurs états de la nature [FIS 88, GUL 92, SHA 79, WAK 84, WAK 89] ;

– la théorie du consommateur, où sont manipulées des relations de préférence sur des paniers de biens [DEB 59] ;

– la décision inter-temporelle, qui fait usage d'une relation de préférence sur des alternatives évaluées à divers moments [KOO 60, KOO 72, KEE 76] ;

– la mesure des inégalités, qui compare des distributions de bien-être entre plusieurs individus [ATK 70, BEN 94, BEN 97].

1. *Il reste à préciser des références à d'autres chapitres du présent livre*

Chapitre rédigé par Denis BOUYSSOU et Marc PIRLOT.

Étant donné une relation binaire $\succsim$ sur un ensemble produit $X = X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$, le mesurage conjoint recherche des conditions qui permettent de construire des représentations numériques de $\succsim$ et d'établir éventuellement leurs propriétés d'unicité. Non seulement de telles représentations facilitent la manipulation des relations de préférence, mais encore, dans beaucoup de cas, les preuves d'existence de représentations sont constructives ou, à tout le moins, donnent des indications utiles sur la façon de les construire. De plus, les conditions d'existence de représentations peuvent souvent être testées empiriquement [KRA 71]. Toutes ces raisons expliquent l'intérêt qu'a suscité cette théorie dans de nombreux domaines de recherche.

Dans les modèles classiques de mesurage conjoint, la relation étudiée est généralement supposée *complète* et *transitive*. Le modèle central est le modèle d'*utilité additive* dans lequel :

$$x \succsim y \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} u_i(x_i) \geq \sum_{i=1}^{n} u_i(y_i). \tag{1.1}$$

Dans ce modèle, u_i désigne une fonction à valeurs réelles définie sur l'ensemble X_i ; x et y désignent des éléments de l'ensemble produit X ; ce sont donc des vecteurs à n composantes, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ et $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$.

L'analyse axiomatique de ce modèle est désormais classique et l'utilité additive (aussi appelées fonction de valeur additives) constitue la base de nombreuses techniques de l'analyse de la décision [FRE 93, KEE 76, WIN 86, WAK 89, POM 00]. Ce modèle soulève néanmoins deux types de difficultés.

D'une part, l'analyse axiomatique du modèle (1.1) pose des questions techniques assez subtiles mais importantes. De nombreux systèmes d'axiomes ont été proposés pour garantir l'existence d'une représentation telle que (1.1) [KRA 71, WAK 89]. On distingue principalement deux cas :

– Quand X est un ensemble fini, mais que l'on ne borne pas a priori sa cardinalité, Scott et Suppes [SCO 64] ont montré que le système d'axiomes nécessaire comporte un ensemble infini dénombrable de "conditions de simplification" (cancellation). Celles-ci garantissent qu'un système (fini) d'équations linéaires, via le théorème de l'alternative, possède au moins une solution (voir aussi [KRA 71, Chapitre 9] et, pour des contributions récentes, [FIS 96, FIS 97]). Ces conditions sont difficilement interprétables et testables.

– Quand X est infini, la situation est très différente, mais pose d'autres problèmes. Généralement on impose des conditions (non nécessaires) qui donnent à X une structure "proche" de celle des nombres réels et garantissent que $\succsim$ se "comporte bien" par rapport à cette structure. Une façon de procéder consiste à imposer un axiome archimédien et des conditions de résolubilité [KRA 71, Chapter 6] ; une autre fait de X un espace topologique et impose que $\succsim$ soit continue [DEB 60, WAK 89]. Avec de telles conditions, il suffit d'un nombre fini de conditions de simplification sur $\succsim$ pour caractériser le modèle (1.1) (pour de récentes contributions, voir [GON 96, GON 00] et [KAR 98] ; pour une approche alternative qui étend la technique utilisée dans le cas fini au cas infini, voir [JAF 74]). Dans ces systèmes axiomatiques, les propriétés nécessaires interagissent avec les propriétés structurelles, non nécessaires, imposées à X [KRA 71, Chapitre 6], ce qui nuit à une compréhension claire du modèle et n'en permet pas un test empirique complètement satisfaisant [KRA 71, Chapitre 9]. De plus, l'analyse du cas où $n = 2$ se distingue totalement de celle du cas $n \geq 3$.

Comme on le verra tout au long de ce chapitre, il est possible d'éviter les hypothèses non nécessaires à condition de renoncer au caractère additif du modèle ; c'est ce qu'ont fait les auteurs de [KRA 71, Chapter 7] en introduisant le modèle *décomposable* suivant :

$$x \succsim y \Leftrightarrow U(u_1(x_1), u_2(x_2), \ldots, u_n(x_n)) \geq U(u_1(y_1), u_2(y_2), \ldots, u_n(y_n)) \quad (1.2)$$

où U est une fonction croissante de tous ses arguments.

Le deuxième type de difficulté posé par le modèle (1.1), est plus fondamental : ce modèle exclut les relations de préférence qui ne seraient pas complètes ou pas transitives ; or, de nombreux auteurs ont contesté la nécessité de telles conditions [MAY 54, TVE 69] et certaines méthodes d'analyse de la décision ne postulent pas des préférences complètes et transitives [ROY 85, ROY 93].

Le modèle de *différences additives* proposé dans [TVE 69] est l'un des premiers qui ne postule pas une préférence transitive ; la préférence $\succsim$ satisfait :

$$x \succsim y \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} \Phi_i(u_i(x_i) - u_i(y_i)) \geq 0 \quad (1.3)$$

où les Φ_i sont des fonctions croissantes et impaires (ce qui rend la préférence complète). Ce modèle a été axiomatisé par Fishburn [FIS 92] (sans éviter les difficultés sus-mentionnées – imposition de conditions non-nécessaires – liées à la forme additive de ce modèle).

Plus récemment, des modèles additifs non-transitifs plus généraux (notamment non-nécessairement complets) ont été étudiés dans [BOU 86, FIS 90a, FIS 91, FIS 90b, FIS 92] et [VIN 91]. Ils sont du type suivant :

$$x \succsim y \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} p_i(x_i, y_i) \geq 0 \quad (1.4)$$

où les p_i sont des fonctions à valeurs réelles définies sur X_i^2 qui peuvent avoir des propriétés additionnelles (par exemple, $p_i(x_i, x_i) = 0$, pour tout $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ et pour tout $x_i \in X_i$).

Dans le même esprit que le modèle décomposable (1.2) qui évite les difficultés liées à l'axiomatisation des modèles additifs, Goldstein [GOL 91] a proposé une généralisation de (1.4) où la somme est remplacée par une fonction G, croissante en ses arguments ; le modèle sous-jacent est donc :

$$x \succsim y \Leftrightarrow G(p_1(x_1,y_1), p_2(x_2,y_2), \ldots, p_n(x_n,y_n)) \geq 0 \tag{1.5}$$

En analyse de la décision, des méthodes qui conduisent à des relations de préférence non-transitive et/ou non complètes, sont en usage depuis longtemps [ROY 68, ROY 73]. Ces méthodes, connues sous le nom de méthodes de *surclassement* [ROY 91, ROY 93], sont inspirées du choix social et plus particulièrement de la méthode de vote de Condorcet. Dans une version de base de la méthode ELECTRE, [ROY 68, ROY 73], construit la relation de surclassement suivante :

$$x \succsim y \Leftrightarrow \sum_{\{i : x_i S_i y_i\}} w_i \geq \lambda \tag{1.6}$$

où les w_i sont des poids associés aux critères, x_i et y_i représentent la performance des alternatives x et y sur le critère i, S_i est une relation ordonnant les niveaux des évaluations sur le critère i et λ est un seuil de majorité (dit *seuil de concordance*) généralement fixé à une valeur supérieure à 50%. Bien entendu, la relation ainsi obtenue n'est pas nécessairement transitive, ni complète. Prenons par exemple le cas où $n = 3$, $p_1 = p_2 = p_3 = \frac{1}{3}$, $x = (3,2,1)$, $y = (2,1,3)$, $z = (1,3,2)$, S_i est l'ordre naturel $\geq$ sur les nombres réels et $\lambda = 60\%$. Notant $\succ$ la partie asymétrique de $\succsim$ ($a \succ b$ si $a \succsim b$ et non $b \succsim a$) et appliquant la règle (1.6), on a $x \succ y \succ z$, mais non $x \succ z$: la relation $\succ$ n'est pas transitive. Pire, comme $z \succ x$, elle est même cyclique. Nous sommes ainsi confrontés à une version du paradoxe de Condorcet, dans un contexte multicritère. De même, en considérant $n = 2$, $p_1 = p_2 = \frac{1}{2}$, $x = (2,1)$, $y = (1,2)$ et $\lambda = 60\%$, on n'a ni $x \succsim y$, ni $y \succsim x$: la relation n'est pas complète.

On remarque aisément que la relation de surclassement définie par (1.6) vérifie le modèle (1.4) avec

$$p_i(x_i,y_i) = \begin{cases} w_i - \frac{\lambda}{n} & \text{si } x_i S_i y_i \\ \\ -\frac{\lambda}{n} & \text{sinon.} \end{cases} \tag{1.7}$$

1.1.2. *Contenu du présent chapitre*

Dans ce chapitre, nous proposons un cadre et des concepts d'analyse très généraux qui permettent d'étudier les relations sur un ensemble produit dans une perspective de mesurage conjoint. Ce cadre englobe la plupart des méthodes proposées en analyse multicritère pour construire une relation de préférence globale.

Nous considérerons en fait deux grandes filières de modèles de relations sur un ensemble produit. Pour en percevoir le contenu intuitif, il est utile de penser aux différentes stratégies qui peuvent être utilisées pour comparer des objets qui se distinguent sur plusieurs dimensions. Soit deux alternatives $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ et $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ évaluées sur n attributs. Une première stratégie pour décider si "x est au moins aussi bon que y" consiste à essayer de mesurer la "valeur" de chaque alternative sur chaque attribut, puis de combiner ces évaluations de façon appropriée. Notons que, par "valeur" nous entendons non pas une évaluation brute sur un attribut (qui serait x_i pour l'alternative x sur l'attribut i), mais la perception qu'en a un décideur dans un contexte donné, en tenant compte de ses objectifs et de ses préférences. Abandonnant toute idée de transitivité et de complétude, ceci suggère un modèle dans lequel :

$$x \succsim y \Leftrightarrow F(u_1(x_1), u_2(x_2), \ldots, u_n(x_n), u_1(y_1), u_2(y_2), \ldots, u_n(y_n)) \geq 0, \quad (1.8)$$

où les u_i sont des fonctions à valeurs réelles sur les X_i et F est une fonction à valeurs réelles sur le produit $\prod_{i=1}^{n} u_i(X_i)^2$.

Une seconde stratégie repose sur l'idée de mesurer les *écarts de préférence* séparément sur chaque attribut puis de combiner ces écarts positifs ou négatifs de façon à déterminer si la "balance" penche en faveur de x ou de y. Ceci suggère un modèle dans lequel :

$$x \succsim y \Leftrightarrow G(p_1(x_1, y_1), p_2(x_2, y_2), \ldots, p_n(x_n, y_n)) \geq 0 \quad (1.9)$$

où les p_i sont des fonctions à valeurs réelles sur X_i^2 et G est une fonction à valeurs réelles sur $\prod_{i=1}^{n} p_i(X_i^2)$.

Bien entendu les deux stratégies que nous venons de mentionner ne sont pas incompatibles et on peut envisager d'exprimer les écarts de préférence sur chaque critère en terme des "valeurs" attribuées par le décideur à x et à y sur chaque critère. Dans le modèle que ceci suggère, on a :

$$x \succsim y \Leftrightarrow H(\varphi_1(u_1(x_1), u_1(y_1)), \varphi_2(u_2(x_2), u_2(y_2)), \ldots, \varphi_n(u_n(x_n), u_n(y_n))) \geq 0 \quad (1.10)$$

où les u_i sont des fonctions à valeurs réelles sur X_i, φ_i des fonctions à valeurs réelles sur $u_i(X_i)^2$ et H, une fonction à valeurs réelles sur $\prod_{i=1}^{n} \varphi_i(u_i(X_i)^2)$.

Lorsqu'aucune propriété additionnelle n'est imposée aux fonctions intervenant dans les trois modèles ci-dessus, ceux-ci sont tout à fait généraux dans le sens où toute relation sur X (pour autant que cet ensemble soit fini ou dénombrable) est représentable dans chacun des trois modèles. Si X n'est pas dénombrable, seules des conditions techniques (nécessaires et suffisantes) en restreignent la généralité.

Pour rendre ces modèles non triviaux, on imposera des propriétés additionnelles aux fonctions intervenant dans ceux-ci. Par exemple,

– dans le modèle (1.8), on demandera que F soit non-décroissante en ses n premiers arguments et non-croissante en ses n derniers arguments ;

– dans le modèle (1.9), on demandera que G soit impaire ou non-décroissante en chacun de ses arguments ou que p_i soit anti-symétrique ;

– dans le modèle (1.10), on demandera que H soit impaire ou non-décroissante en chacun de ses arguments ou que φ_i soit impaire ou non-décroissante en son premier argument et non-croissante en le second.

L'adjonction de telles propriétés permet de définir une assez grande variété de modèles dont certains seront étudiés par la suite. En particulier, certaines variantes se rapprochent de modèles classiques présentés dans la section 1.1.1.

Fait plus important peut-être que les modèles eux-mêmes, les formes (1.8), (1.9) et (1.10) sous-tendent des notions fondamentales qui permettent d'analyser les relations sur un ensemble produit. Dans le modèle classique de l'utilité additive, la notion fondamentale est la préférence marginale. Cette relation définie sur chaque composante X_i comme la projection (en un certain sens) de la préférence globale $\succsim$ sur chaque attribut est celle qui est représentée numériquement par les fonctions u_i dans le modèle (1.1). Dans l'"élicitation" du modèle d'utilité additive, on s'appuie de façon déterminante sur les préférences marginales. Dans les modèles (1.8) et (1.9), ce ne sont pas les préférences marginales qui jouent le rôle central ; elles ne jouissent d'ailleurs pas nécessairement, dans ces modèles, des propriétés qui facilitent leur interprétation dans le modèle (1.1) ; en particulier, elles ne sont pas nécessairement transitives ni complètes. Elles ne sont pas non plus suffisamment "fines" pour déterminer la préférence globale comme nous le verrons plus loin.

Dans les trois modèles (1.8), (1.9) et (1.10), notre outil d'analyse primordial est la *trace* dans les différentes déclinaisons que permet la structure d'ensemble produit de X. Dans le modèle (1.8), il s'agira de la trace marginale sur chaque composante X_i ; cette relation ordonne les niveaux de l'échelle sur laquelle s'exprime chaque attribut. Dans le modèle (1.9), il s'agira de traces sur chaque produit X_i^2 qui ordonne les écarts de préférence entre deux alternatives sur l'attribut i. Dans le modèle (1.10), les deux types de traces apparaissent et interagissent.

Le plan du chapitre est le suivant. Dans la section 1.2, nous introduisons nos outils d'analyse à savoir les traces marginales sur les niveaux et les traces marginales sur les écarts ; nous situons les classiques préférences marginales par rapport aux premières. Ensuite nous montrons comment représenter une relation quelconque dans l'un des trois types de modèles introduits plus haut.

Après avoir décrit brièvement les différentes spécialisations du modèle (1.8) et en avoir présenté les caractérisations axiomatiques, nous montrons, dans la suite de la section 1.2, que certains de ces axiomes formulent en fait une exigence de base de toute procédure multicritère, le respect de la dominance. Nous analysons ensuite le rapprochement graduel de la trace marginale sur les niveaux et de la préférence marginale, à mesure que des exigences additionnelles sont imposées au modèle (le rapprochant du modèle additif).

La section 1.4 est consacrée à l'étude du modèle (1.9) ; comme dans la section précédente, nous en caractérisons différentes variantes. Nous montrons que les représentations numériques de type (1.9) sont bien adaptées à la compréhension des méthodes de surclassement. Nous passons ensuite (en section 1.5) aux relations qui peuvent être décrites par le modèle (1.10). Nous en caractérisons certaines variantes et nous situons quelques exemples dans cette famille de modèles, notamment, le modèle de différences additives (1.3) et certaines méthodes de surclassement.

Une brève conclusion résume les principaux apports des concepts introduits ici pour l'analyse de relations très générales sur un ensemble produit ; des applications diverses sont évoquées.

Les preuves de tous nos résultats sont élémentaires. Nous en présentons certaines que nous jugeons éclairantes pour la compréhension des concepts introduits. Le lecteur intéressé par davantage de détails peut se reporter à une série d'articles où les démonstrations complètes sont fournies : [BOU 04d, BOU 02b, BOU 04b, BOU 02c, BOU 04c]. On y trouvera en particulier l'étude complète du cas général, non nécessairement dénombrable, et les preuves d'indépendance de nos axiomes, un aspect que nous ne mentionnerons plus dans la suite.

1.2. Relations fondamentales et modèles triviaux

1.2.1. *Relations binaires sur un ensemble produit*

Nous adoptons les définitions relatives aux relations binaires qui ont été présentées dans le chapitre BV02 (Relations binaires et modélisation des préférences) du présent ouvrage. Nous utiliserons donc dans le même sens que dans ce chapitre, les notions de relation réflexive, irréflexive, complète, symétrique, asymétrique, transitive, de Ferrers et semi-transitive. Nous supposons également connues les définitions de préordre complet, d'ordre d'intervalle et de semi-ordre (ou quasi-ordre) (voir [**?**], pour ces définitions).

Nous travaillerons généralement avec des relations binaires sur un ensemble produit $X = X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$ où les X_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ sont a priori des ensembles de cardinalités quelconques et $n \geq 2$. Les éléments de X sont des vecteurs x à n composantes : $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ que nous interprétons comme des alternatives évaluées suivant n attributs.

Une relation sur X sera généralement notée $\succsim$, sa partie asymétrique, $\succ$ et sa partie symétrique $\sim$. La même convention est en vigueur pour les parties asymétrique et symétrique d'une relation lorsque le symbole $\succsim$ est affecté d'un indice ou d'un exposant. On interprète $a \succsim b$ comme une relation de préférence que l'on lit "a est au moins aussi bon que b".

Pour tout sous-ensemble I de l'ensemble d'attributs $\{1, 2, \dots, n\}$, on notera X_I (resp. X_{-I}) l'ensemble produit $\prod_{i \in I} X_i$ (resp. $\prod_{i \notin I} X_i$). Nous noterons (x_I, a_{-I}) le vecteur $w \in X$ tel que $w_i = x_i$ si $i \in I$ et $w_i = a_i$ sinon. Dans le cas où I se réduit à un seul indice i, on utilisera simplement les notations X_{-i} et (x_i, a_{-i}).

1.2.2. *Indépendance et préférences marginales*

Une relation de préférence quelconque $\succsim$ sur un ensemble produit X induit des relations, dites *préférences marginales*, sur les sous-espaces X_I pour tout sous-ensemble d'attributs I. La préférence marginale $\succsim_I$ induite par $\succsim$ sur X_I est définie pour tout x_I, y_I par :

$$x_I \succsim_I y_I \Leftrightarrow (x_I, z_{-I}) \succsim (y_I, z_{-I}), \text{ pour tout } z_{-I} \in X_{-I}, \tag{1.11}$$

La préférence marginale $\succsim_I$ n'hérite pas automatiquement de la propriété de complétude éventuelle de $\succsim$. Nous définissons deux propriétés qui donnent de la régularité aux préférences marginales.

Définition 1 *Soit $\succsim$ une relation sur un ensemble produit X et I, un sous-ensemble d'attributs.*

– *On dit que $\succsim$ est* indépendante pour *I si, pour tout x_I, $y_I \in X_I$,*

$$\begin{aligned}&[(x_I, z_{-I}) \succsim (y_I, z_{-I}), \text{ pour un certain } z_{-I} \in X_{-I}] \\ &\Rightarrow [(x_I, w_{-I}) \succsim (y_I, w_{-I}), \text{ pour tout } w_{-I} \in X_{-I}];\end{aligned}$$

– *on dit que $\succsim$ est* séparable pour *I si, pour tout x_I, $y_I \in X_I$,*

$$\begin{aligned}&[(x_I, z_{-I}) \succ (y_I, z_{-I}), \text{ pour un certain } z_{-I} \in X_{-I}] \\ &\Rightarrow Non\,[(y_I, w_{-I}) \succ (x_I, w_{-I})], \text{ pour tout } w_{-I} \in X_{-I}.\end{aligned}$$

– *Si $\succsim$ est indépendante (resp. séparable) pour tout sous-ensemble I d'attributs, on dit que $\succsim$ est indépendante (resp. séparable). Si $\succsim$ est indépendante (resp. séparable) pour tout sous-ensemble formé d'un seul attribut, on dit que $\succsim$ est faiblement indépendante (resp. faiblement séparable)*

L'indépendance est une notion classique en théorie du mesurage. Intuitivement, elle signifie que des valeurs communes sur un sous-ensemble d'attributs n'influencent pas la préférence. Il est bien connu que l'indépendance implique l'indépendance faible, mais le contraire n'est pas vrai [WAK 89]. De même, l'indépendance implique la séparabilité mais l'inverse est faux. La notion de séparabilité est un affaiblissement de l'indépendance qui a son intérêt : des modèles d'agrégation fondés sur l'opérateur $\max$ ou $\min$ donnent des préférences séparables, mais non indépendantes. La séparabilité interdit un renversement strict des préférences lorsqu'on fait varier des valeurs communes sur certains attributs. La séparabilité entraîne la séparabilité faible mais le contraire n'est pas vrai.

Indépendance et séparabilité sont évidemment liées à la complétude des préférences marginales. Les résultats suivants sont bien connus ou évidents.

Proposition 1

– Si $\succsim$ est complète et indépendante pour tout attribut i, $\succsim_i$ est complète ;

– $\succsim_i$ est complète ssi $\succsim$ est faiblement séparable et vérifie la condition suivante : pour tout $i = 1, \ldots, n$, pour tout $x_i, y_i \in X_i$ et pour tout $a_{-i} \in X_{-i}$,

$$(x_i, a_{-i}) \succsim (y_i, a_{-i}) \text{ ou } (y_i, a_{-i}) \succsim (x_i, a_{-i}). \tag{1.12}$$

Les préférences marginales sur chaque attribut i expriment les résultats de la comparaison de niveaux x_i et y_i, lorsque toutes choses sont égales par ailleurs, i. e. quand ces niveaux sont complétés par les mêmes niveaux sur X_{-i}. Nous verrons dans la section suivante que les préférences marginales $\succsim_i$ n'exploitent pas toute l'information contenue dans $\succsim$, ce que font par contre les traces marginales sur les niveaux.

1.2.3. *Traces marginales sur les niveaux*

On définit comme suit la trace marginale gauche $\succsim_i^+$, la trace marginale droite $\succsim_i^-$ et la trace marginale $\succsim_i^\pm$ sur X_i.

Définition 2 *Pour tout $x_i, y_i \in X_i$, pour tout $a_{-i} \in X_{-i}$, pour tout $z \in X$,*

$$x_i \succsim_i^+ y_i \Leftrightarrow [(y_i, a_{-i}) \succsim z \Rightarrow (x_i, a_{-i}) \succsim z],$$

$$x_i \succsim_i^- y_i \Leftrightarrow [z \succsim (x_i, a_{-i}) \Rightarrow z \succsim (y_i, a_{-i})],$$

$$x_i \succsim_i^\pm y_i \Leftrightarrow \begin{cases} (y_i, a_{-i}) \succsim z \Rightarrow (x_i, a_{-i}) \succsim z, \\ \textit{et} \\ z \succsim (x_i, a_{-i}) \Rightarrow z \succsim (y_i, a_{-i}). \end{cases}$$

Ces définitions montrent bien la différence qui existe entre traces marginales et préférences marginales. Les traces marginales utilisent toute l'information contenue dans $\succsim$ quant à la façon dont x_i se compare à y_i lorsque ces deux niveaux sont combinés avec les mêmes évaluations sur X_{-i}, y compris la façon dont ces alternatives se comparent aux autres. Au contraire, la préférence marginale résulte de la seule comparaison de x_i et y_i, *ceteris paribus*, ce qui exploite moins finement l'information contenue dans $\succsim$. Sous une hypothèse très faible, la réflexivité de $\succsim$, on a en effet que $x_i \succsim_i^+ y_i$ (ou $x_i \succsim_i^- y_i$) implique $x_i \succsim_i$. On le vérifie facilement en partant par exemple de $(y_i, a_{-i}) \succsim (y_i, a_{-i})$; en appliquant la définition de $\succsim_i^+$, on en déduit $(x_i, a_{-i}) \succsim (y_i, a_{-i})$; pour montrer l'autre implication, il suffit de partir de $(x_i, a_{-i}) \succsim (x_i, a_{-i})$ et d'utiliser la définition de $\succsim_i^-$.

Il n'est pas difficile de voir que, par définition, $\succsim_i^+$, $\succsim_i^-$ et $\succsim_i^\pm$ sont des relations réflexives et transitives.

Conformément à nos conventions, nous notons $\succ_i^+$ et $\sim_i^+$ les parties asymétrique et symétrique de $\succsim_i^+$ et nous procédons de même pour $\succsim_i^-$ et $\succsim_i^\pm$. Nous notons dans le lemme suivant quelques liens, utilisés par la suite, entre les traces marginales et la préférence $\succsim$: ces propriétés montrent comment la préférence "répond" aux traces marginales. La démonstration de ce lemme est laissée au lecteur.

Lemme 1 *Pour tout* $i \in \{1, \ldots, n\}$ *et* $x, y, z, w \in X$ *:*

1) $[x \succsim y, z_i \succsim_i^+ x_i] \Rightarrow (z_i, x_{-i}) \succsim y$*,*

2) $[x \succsim y, y_i \succsim_i^- w_i] \Rightarrow x \succsim (w_i, y_{-i})$*,*

3) $$[z_i \succsim_i^\pm x_i, y_i \succsim_i^\pm w_i] \Rightarrow \begin{cases} x \succsim y \Rightarrow (z_i, x_{-i}) \succsim (w_i, y_{-i}), \\ \textit{et} \\ x \succ y \Rightarrow (z_i, x_{-i}) \succ (w_i, y_{-i}), \end{cases}$$

4) $$[z_i \sim_i^\pm x_i, y_i \sim_i^\pm w_i, \forall\, i \in \{1, \ldots, n\}] \Rightarrow \begin{cases} x \succsim y \Leftrightarrow z \succsim w, \\ \textit{et} \\ x \succ y \Leftrightarrow z \succ w. \end{cases}$$

Il est clair que les traces marginales ne sont pas nécessairement des relations complètes. Lorsqu'elles le sont, cela a d'intéressantes conséquences comme nous le verrons dans la section 1.3.

1.2.4. *Traces marginales sur les écarts*

P. P. Wakker [WAK 88, WAK 89] a bien montré l'intérêt des traces sur les écarts de préférence dans la compréhension des modèles de mesurage conjoint. Nous introduisons deux relations $\succsim_i^*$ et $\succsim_i^{**}$ sur les écarts de préférence pour chaque attribut i ;

ces deux relations comparent des paires de niveaux ; ce sont donc des sous-ensembles de $X_i^2 \times X_i^2$.

Définition 3 *Pour tout* $x_i, y_i, z_i, w_i \in X_i$,

$$\begin{array}{c}(x_i, y_i) \succsim_i^* (z_i, w_i) \quad \textit{ssi} \\ \forall\, a_{-i}, b_{-i} \in X_{-i}, (z_i, a_{-i}) \succsim (w_i, b_{-i}) \Rightarrow (x_i, a_{-i}) \succsim (y_i, b_{-i});\end{array}$$

$$(x_i, y_i) \succsim_i^{**} (z_i, w_i) \quad \textit{ssi} \quad [(x_i, y_i) \succsim_i^* (z_i, w_i) \textit{ et } (w_i, z_i) \succsim_i^* (y_i, x_i)].$$

Intuitivement, on interprète $(x_i, y_i) \succsim_i^* (z_i, w_i)$ comme exprimant le fait que l'écart de préférence entre les niveaux x_i et y_i n'est pas moins grand que celui entre les niveaux z_i et w_i. Il faut noter que par définition, $\succsim_i^*$ est réflexive et transitive. Par contre, l'écart (x_i, y_i) n'y a pas de lien automatique avec l'écart "opposé" (y_i, x_i) ; c'est la raison pour laquelle la relation $\succsim_i^{**}$ est introduite.

Comme pour les traces marginales sur les niveaux, la relation de préférence $\succsim$ jouit de propriétés de monotonie par rapport aux traces marginales sur les écarts. De même, les traces sur les écarts et les traces sur les niveaux ne sont pas sans liens. Les premiers liens et les seconds sont respectivement décrits dans les deux lemmes qui suivent ; leur démonstration est élémentaire et laissée au soin du lecteur.

Lemme 2 *Pour tout* $x, y \in X$ *et tout* $z_i, w_i \in X_i$,

1) $\succsim$ *est indépendante ssi* $(x_i, x_i) \sim_i^* (y_i, y_i), \forall\, i \in \{1, \ldots, n\}$,

2) $[x \succsim y$ *et* $(z_i, w_i) \succsim_i^* (x_i, y_i)] \Rightarrow (z_i, x_{-i}) \succsim (w_i, y_{-i})$,

3) $[(z_i, w_i) \sim_i^* (x_i, y_i), \forall\, i \in \{1, \ldots, n\}] \Rightarrow [x \succsim y \Leftrightarrow z \succsim w]$,

4) $[x \succ y$ *et* $(z_i, w_i) \succsim_i^{**} (x_i, y_i)] \Rightarrow (z_i, x_{-i}) \succ (w_i, y_{-i})$,

5) $[(z_i, w_i) \sim_i^{**} (x_i, y_i), \forall\, i \in \{1, \ldots, n\}] \Rightarrow \begin{cases} [x \succsim y \Leftrightarrow z \succsim w] \\ \textit{et} \\ [x \succ y \Leftrightarrow z \succ w], \end{cases}$

Lemme 3 *Pour tout* $i \in \{1, \ldots, n\}$ *et tout* $x_i, y_i \in X_i$,

1) $x_i \succsim_i^+ y_i \Leftrightarrow [(x_i, w_i) \succsim_i^* (y_i, w_i), \forall\, w_i \in X_i]$,

2) $x_i \succsim_i^- y_i \Leftrightarrow [(w_i, y_i) \succsim_i^* (w_i, x_i), \forall\, w_i \in X_i]$,

3) $x_i \succsim_i^{\pm} y_i \Leftrightarrow [(x_i, w_i) \succsim_i^{**} (y_i, w_i), \forall\, w_i \in X_i]$,

4) $[\ell_i \succsim_i^+ x_i$ *et* $(x_i, y_i) \succsim_i^* (z_i, w_i)] \Rightarrow (\ell_i, y_i) \succsim_i^* (z_i, w_i)$,
5) $[y_i \succsim_i^- \ell_i$ *et* $(x_i, y_i) \succsim_i^* (z_i, w_i)] \Rightarrow (x_i, \ell_i) \succsim_i^* (z_i, w_i)$,
6) $[z_i \succsim_i^+ \ell_i$ *et* $(x_i, y_i) \succsim_i^* (z_i, w_i)] \Rightarrow (x_i, y_i) \succsim_i^* (\ell_i, w_i)$,
7) $[\ell_i \succsim_i^- w_i$ *et* $(x_i, y_i) \succsim_i^* (z_i, w_i)] \Rightarrow (x_i, y_i) \succsim_i^* (z_i, \ell_i)$,
8) $[x_i \sim_i^+ z_i$ *et* $y_i \sim_i^- w_i] \Rightarrow (x_i, y_i) \sim_i^* (z_i, w_i)$,
9) $[x_i \sim_i^{\pm} z_i$ *et* $y_i \sim_i^{\pm} w_i] \Rightarrow (x_i, y_i) \sim_i^{**} (z_i, w_i)$

Les traces marginales sur les écarts ne sont pas, en général complètes ; lorsqu'elles le sont, cela a d'intéressantes conséquences qui seront étudiées dans la section 1.4

1.2.5. *Trois modèles pour des relations quelconques sur un produit cartésien*

A condition que la cardinalité de X ne soit pas trop élevée, toute relation binaire sur X admet les représentations numériques décrites par les équations (1.8), (1.9) et (1.10). Comme nous le verrons dans la démonstration de la proposition suivante, les traces sur les niveaux jouent un rôle fondamental dans la représentation (1.8), les traces sur les écarts jouent un tel rôle dans la représentation (1.9) et les deux types de traces sont à la base des modèles (1.10). La portée de ce lien se renforcera bien davantage lorsque nous imposerons la complétude des traces dans les trois sections suivantes.

Nous utilisons ci-dessous la notation $[u_i(x_i)]$ pour désigner le vecteur à n composantes $(u_1(x_1), \ldots, u_n(x_n))$.

Proposition 2 *Soit $\succsim$ une relation binaire sur un ensemble $X = \prod_{i=1}^n X_i$ ayant au plus la cardinalité de $\mathbb{R}$.*

1) Il existe des fonctions u_i sur X_i, à valeurs réelles, et une fonction à valeurs réelles F définie sur $[\prod_{i=1}^n u_i(X_i)]^2$ telles que, pour tout $x, y \in X$,

$$x \succsim y \Leftrightarrow F([u_i(x_i)]; [u_i(y_i)]) \geq 0. \qquad (N0)$$

2) Il existe des fonctions p_i sur X_i^2, à valeurs réelles, et une fonction à valeurs réelles G définie sur $\prod_{i=1}^n p_i(X_i^2)$ telles que, pour tout $x, y \in X$,

$$x \succsim y \Leftrightarrow G([p_i(x_i, y_i)]) \geq 0 \qquad (E0)$$

3) Il existe des fonctions u_i sur X_i, à valeurs réelles, des fonction φ_i sur $u_i(X_i)^2$, à valeurs réelles et une fonction à valeurs réelles H définie sur $\prod_{i=1}^n \varphi_i(u_i(X_i)^2)$ telles que, pour tout $x, y \in X$,

$$x \succsim y \Leftrightarrow H([\varphi_i(u_i(x_i), u_i(y_i))]) \geq 0, \qquad (N0E0)$$

Preuve. Partie 1. Soit $i \in \{1,\ldots,n\}$. Par construction, $\sim_i^{\pm}$ est une relation d'équivalence puisqu'elle est réflexive, symétrique et transitive. Comme X_i a au plus la cardinalité de $\mathbb{R}$, il existe une fonction u_i de X_i dans $\mathbb{R}$ telle que pour tout $x_i, y_i \in X_i$:

$$x_i \sim_i^{\pm} y_i \Leftrightarrow u(x_i) = u_i(y_i). \tag{1.13}$$

Pour chaque $i \in \{1,\ldots,n\}$, soit u_i une fonction satisfaisant (1.13). On définit F de $[\prod_{i=1}^{n} u_i(X_i)]^2$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$F([u_i(x_i)];[u_i(y_i)]) = \begin{cases} +1 & \text{si } x \succsim y, \\ -1 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{1.14}$$

Le lemme 1.4 garantit que F est ainsi bien définie.

Partie 2. Comme $\sim_i^{**}$ est une relation d'équivalence et vu la cardinalité de X_i, il existe une fonction p_i de X_i^2 dans $\mathbb{R}$ séparant les classes d'équivalence de $\sim_i^{**}$, i.e. telle que pour tout $x_i, y_i, z_i, w_i \in X_i$:

$$(x_i, y_i) \sim_i^{**} (z_i, w_i) \Leftrightarrow p_i(x_i, y_i) = p_i(z_i, w_i). \tag{1.15}$$

Grâce au lemme 2.5, la fonction G ci-dessous est bien définie :

$$G([p_i(x_i, y_i)]) = \begin{cases} +1 & \text{si } x \succsim y, \\ -1 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{1.16}$$

Partie 3. Prenons, pour chaque i, une fonction u_i satisfaisant (1.13) et une fonction p_i satisfaisant 1.15. On définit φ_i sur $u_i(X_i)^2$ par :

$$\varphi_i(u_i(x_i), u_i(y_i)) = p_i(x_i, y_i) \tag{1.17}$$

pour tout $x_i, y_i \in X_i$. Montrons que φ_i est bien définie i.e. que $u_i(x_i) = u_i(z_i)$ et $u_i(y_i) = u_i(w_i)$ impliquent $p_i(x_i, y_i) = p_i(z_i, w_i)$. Par construction, on a $x_i \sim_i^{\pm} z_i$ et $y_i \sim_i^{\pm} w_i$; le lemme 3.9 donne $(x_i, y_i) \sim_i^{**} (z_i, w_i)$ et donc $p_i(x_i, y_i) = p_i(z_i, w_i)$.

Il ne reste plus qu'à définir H sur $\prod_{i=1}^{n} \varphi_i(u_i(X_i), u_i(X_i))$ par :

$$H([\varphi_i(u_i(x_i), u_i(y_i))]) = \begin{cases} +1 & \text{si } x \succsim y, \\ -1 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{1.18}$$

En utilisant le lemme 2.3, on voit que H est bien définie.

□

Remarque. La condition de cardinalité sur X imposée dans la proposition 2 n'est pas une condition nécessaire. Elle peut être affaiblie en exigeant seulement, pour le modèle ($N0$), que le nombre de classes des relations d'équivalence $\sim_i^{\pm}$ ne dépasse pas la cardinalité de $\mathbb{R}$; de même pour le modèle ($E0$), il faut et il suffit d'imposer la même restriction sur le nombre de classes d'équivalence des relations $\sim_i^{**}$. Pour le modèle ($N0E0$), les deux restrictions précédentes sont requises.

1.3. Modèles utilisant les traces marginales sur les niveaux

1.3.1. *Définition des modèles*

Dans le modèle ($N0$), le rôle de u_i se limite à associer une “étiquette” numérique à chaque classe d’équivalence de la relation $\succsim_i^{\pm}$ et celui de F est simplement de dire si les profils $[(u_i(x_i))]$, $[(u_i(y_i))]$ correspondent ou non à une préférence (voir définition de F dans l’équation 1.14). La situation change lorsqu’on impose à F des propriétés additionnelles ; nous obtenons ainsi :

– le modèle ($N1$) en ajoutant à ($N0$) le fait que $F([u_i(x_i)];[u_i(x_i)]) \geq 0$,

– le modèle ($N2$) en ajoutant à ($N1$) le fait que $F([u_i(x_i)];[u_i(y_i)]) = -F([u_i(y_i)];[u_i(x_i)])$.

De plus, dans chacun des modèles ($N0$), ($N1$) et ($N2$), nous envisageons les conséquences de l’hypothèse selon laquelle F est non-décroissante (respectivement croissante) en ses n premiers arguments et non-croissante (resp. décroissante) en ses n derniers arguments. Ces huit modèles sont définis dans le tableau 1.1.

Tableau 1.1. *Modèles utilisant les traces sur les niveaux*

($N0$)	$x \succsim y \Leftrightarrow F([u_i(x_i)];[u_i(y_i)]) \geq 0$
($N1$)	($N0$) avec $F([u_i(x_i)];[u_i(x_i)]) \geq 0$
($N2$)	($N0$) avec $F([u_i(x_i)];[u_i(y_i)]) = -F([u_i(y_i)];[u_i(x_i)])$
($N3$)	($N0$) avec F non-décroissante, non-croissante,
($N4$)	($N0$) avec F croissante, décroissante,
($N5$)	($N1$) avec F non-décroissante, non-croissante,
($N6$)	($N1$) avec F croissante, décroissante,
($N7$)	($N2$) avec F non-décroissante, non-croissante,
($N8$)	($N2$) avec F croissante, décroissante,

Un certain nombre d’implications entre ces modèles sont la conséquence immédiate de leur définition ; nous ne les détaillons pas. Nous consignons dans la proposition suivante les implications des deux propriétés caractéristiques de F introduites pour définir les modèles ($N1$) et ($N2$).

Proposition 3 *Une relation binaire $\succsim$ sur un ensemble produit $X = \prod_{i=1}^{n} X_i$ ayant au plus la cardinalité de $\mathbb{R}$ suit le*

1) modèle ($N1$) ssi $\succsim$ est réflexive ;

2) modèle ($N2$) ssi $\succsim$ est complète.

Preuve. Les propriétés de réflexivité et de complétude sont clairement des conséquences respectivement des modèles ($N1$) et ($N2$). Le fait que la réflexivité est suffisante pour le modèle ($N1$) est également évident. Il reste à montrer que la complétude est suffisante pour le modèle ($N2$). Pour cela, il suffit de reprendre la construction de la représentation de $\succsim$ donnée dans la preuve de la proposition 2 en remplaçant la définition (1.14) de F par la suivante :

$$F([u_i(x_i)];[u_i(y_i)]) = \begin{cases} +1 & \text{si } x \succ y, \\ 0 & \text{si } x \sim y, \\ -1 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{1.19}$$

En utilisant la complétude de $\succsim$, on vérifie immédiatement que F est ainsi bien définie et satisfait la propriété $F([u_i(x_i)];[u_i(y_i)]) = -F([u_i(y_i)];[u_i(x_i)])$.

□

Dans la section suivante, nous introduisons des propriétés qui sont intimement liées à la monotonie de la fonction F. Fait intéressant, ces mêmes propriétés assurent la complétude des traces marginales.

1.3.2. *Complétude des traces marginales et monotonie de* F

Nous introduisons les trois axiomes suivants pour chaque dimension i.

Définition 4 (Conditions $AC1$, $AC2$ et $AC3$) *Soit $\succsim$ une relation binaire sur $X = \prod_{i=1}^n X_i$. Pour $i \in \{1,\dots,n\}$, on dit que cette relation satisfait :*

$AC1_i$ si

$$\left.\begin{array}{c} x \succsim y \\ \textit{et} \\ z \succsim w \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} (z_i, x_{-i}) \succsim y \\ \textit{ou} \\ (x_i, z_{-i}) \succsim w, \end{array}\right.$$

$AC2_i$ si

$$\left.\begin{array}{c} x \succsim y \\ \textit{et} \\ z \succsim w \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x \succsim (w_i, y_{-i}) \\ \textit{ou} \\ z \succsim (y_i, w_{-i}), \end{array}\right.$$

$AC3_i$ si

$$\left.\begin{array}{r} z \succsim (x_i, a_{-i}) \\ \textit{et} \\ (x_i, b_{-i}) \succsim y \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} z \succsim (w_i, a_{-i}) \\ \textit{ou} \\ (w_i, b_{-i}) \succsim y, \end{array}\right.$$

pour tout $x, y, z, w \in X$, tout $a_{-i}, b_{-i} \in X_{-i}$ et tout $x_i, w_i \in X_i$.

On dira encore que $\succsim$ satisfait $AC1$ (resp. $AC2$, $AC3$) si elle satisfait $AC1_i$ (resp. $AC2_i$, $AC3_i$) pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$. On utilisera le raccourci $AC123$ pour la conjonction des propriétés $AC1$, $AC2$ et $AC3$.

Ces trois conditions peuvent être qualifiées de conditions de simplification ou d'annulation (“cancellation”, en anglais), classiques en mesurage conjoint. Le nom des axiomes s'explique par le fait qu'il s'agit de simplification “intrA-Critère” (par opposition aux axiomes RC – de simplification “inteR-Critère – qui seront utilisés en section 1.4). Les conditions $AC1$, $AC2$ et $AC3$ ont été introduites à l'origine dans [BOU 99, BOU 97] et utilisées ensuite dans [GRE 02].

La condition $AC1_i$ suggère que les éléments de X_i peuvent être ordonnés en référence à la “dominance par le haut” : “x_i domine par le haut z_i” signifie que si $(z_i, c_{-i}) \succsim w$, alors $(x_i, c_{-i}) \succsim w$. La condition $AC2_i$ a une interprétation similaire en référence à la “dominance par le bas” : si $x \succsim (y_i, c_{-i})$ alors $x \succsim (w_i, c_{-i})$. La condition $AC3_i$ garantit qu'il est possible d'ordonner les éléments de X_i de façon compatible avec la dominance par le haut et la dominance par le bas ; celles-ci ne sont donc pas incompatibles. On peut montrer par des exemples [BOU 04d, Appendix A] que $AC1$, $AC2$ et $AC3$ sont logiquement indépendantes.

Les conditions $AC1$, $AC2$, $AC3$ ont des liens étroits avec les traces marginales. Nous les décrivons dans la proposition suivante.

Lemme 4 (Complétude des traces marginales)

1) $\succsim_i^+$ est complète ssi $\succsim$ vérifie $AC1_i$;
2) $\succsim_i^-$ est complète ssi $\succsim$ vérifie $AC2_i$;
3) $[Non[\, x_i \succsim_i^+ y_i\,] \Rightarrow y_i \succsim_i^- x_i]$ ssi $\succsim$ vérifie $AC3_i$;
4) $\succsim_i^\pm$ est complète ssi $\succsim$ vérifie $AC1_i, AC2_i$ et $AC3_i$.

Preuve. Pour prouver la partie 1, il suffit d'observer que la négation de $AC1_i$ est équivalente à la négation de la complétude de $\succsim_i^+$. On prouve la partie 2 de façon similaire.

Partie 3. Supposons que $Non[\, x_i \succsim_i^+ y_i\,]$; il existe alors $z \in X$ et $a_{-i} \in X_{-i}$ tels que $z \succsim (x_i, a_{-i})$ et $Non[\, z \succsim (y_i, a_{-i})\,]$. Si $(x_i, b_{-i}) \succsim w$, alors $AC3_i$ implique $(y_i, b_{-i}) \succsim w$ ou $z \succsim (y_i, a_{-i})$. Comme par hypothèse, $Non[\, z \succsim (y_i, a_{-i})\,]$, il faut que $(y_i, b_{-i}) \succsim w$, de sorte que $y_i \succsim_i^- x_i$. L'implication inverse résulte du fait que la négation de $AC3_i$ équivaut à l'existence de $x_i, y_i \in X_i$ tels que $Non[\, y_i \succsim_i^+ x_i\,]$ et

$Non[x_i \succsim_i^- y_i]$. La partie 4 résulte des trois premières parties.

□

La conjonction des trois conditions $AC1$, $AC2$ et $AC3$ implique que les traces marginales $\succsim_i^\pm$ induites par $\succsim$ sont des préordres complets. Il est assez naturel que ces mêmes propriétés entraînent des conséquences sur les préférences marginales $\succsim_i$. Cependant, comme on va le voir, préférences marginales et traces marginales sur les niveaux ne coïncident pas en général. Nous donnons les résultats suivants sans démonstration ; le lecteur intéressé les trouvera dans [BOU 04d, Proposition 3]).

Proposition 4 (Propriétés des préférences marginales)

1) Si $\succsim$ est réflexive et vérifie $AC1_i$ ou $AC2_i$ pour $i \in \{1, \ldots, n\}$, alors $\succsim$ est faiblement séparable et satisfait (1.12).

2) Si $\succsim$ est réflexive et vérifie $AC1_i$ ou $AC2_i$ alors $\succsim_i$ est un ordre d'intervalle.

3) Si, de plus, $\succsim$ satisfait $AC3_i$ alors $\succsim_i$ est un semi-ordre (ou quasi-ordre).

De la partie 1, en utilisant la proposition 1.1, on déduit que $\succsim_i$ est complète dès que $\succsim$ est réflexive et vérifie $AC1_i$ ou $AC2_i$.

Nous savons que si $\succsim$ est réflexive et satisfait $AC123$, les traces marginales $\succsim_i^\pm$ sont des préordres complets (lemme 4.4) et la partie 3 de la proposition précédente nous apprend que sous ces mêmes conditions les préférences marginales $\succsim_i$ sont des semi-ordres. Ceci suggère que les traces et les préférences marginales sont des relations distinctes, ce que confirment des exemples (voir [BOU 04d]) ; nous verrons plus loin des conditions assurant l'identité de ces relations. Lorsqu'elles sont distinctes, nous avons vu que $x_i \succsim_i^\pm y_i$ entraîne $x_i \succsim_i y_i$, dès que $\succsim$ est réflexive ; comme sous $AC123$, $\succsim_i^\pm$ et $\succsim_i$ sont complètes, cela signifie que, sous ces conditions, $\succsim_i^\pm$ est plus discriminante que $\succsim_i$ (au sens où $\sim_i^\pm \subseteq \sim_i$: plus de paires sont indifférentes pour la préférence marginale que pour la trace marginale).

Les axiomes $AC123$ sont non seulement liés à la complétude des traces marginales, mais aussi aux propriétés de monotonie de la fonction F apparaissant dans les modèles de type (1.8). Dans cette section, nous établissons à titre d'exemple une caractérisation des modèles ($N5$) et ($N6$). Nous nous limitons à la démonstration du cas où X est un ensemble dénombrable.

Proposition 5 (Caractérisation de ($N5$) et ($N6$)) *Soit $\succsim$ une relation binaire sur l'ensemble dénombrable $X = \prod_{i=1}^n X_i$. $\succsim$ vérifie le modèle ($N6$) ssi $\succsim$ est réflexive et satisfait $AC1$, $AC2$ et $AC3$. Les modèles ($N5$) et ($N6$) sont équivalents.*

Preuve. Le modèle $(N5)$ est un cas particulier du modèle $(N1)$; la préférence $\succsim$ y est donc réflexive (proposition 3.1). On vérifie aisément qu'une relation admettant une représentation dans le modèle $(N5)$ vérifie $AC123$. Réciproquement, si $\succsim$ est réflexive et vérifie $AC123$, on peut construire une représentation numérique suivant le modèle $(N6)$. Prenons pour chaque fonction u_i une représentation numérique du préordre complet $\succsim_i^{\pm}$, i.e. $\forall\, x_i, y_i \in X_i$:

$$x_i \succsim_i^{\pm} y_i \Leftrightarrow u_i(x_i) \geq u_i(y_i). \tag{1.20}$$

Une telle représentation existe du fait que X est dénombrable. On définit ensuite F sur $[\prod_{i=1}^n u_i(X_i)]^2$ par :

$$F([u_i(x_i)];[u_i(y_i)] = \begin{cases} +\exp(\sum_{i=1}^n (u_i(x_i) - u_i(y_i))) & \text{si } x \succsim y, \\ -\exp(\sum_{i=1}^n (u_i(y_i) - u_i(x_i))) & \text{sinon.} \end{cases} \tag{1.21}$$

Que F soit bien définie résulte du lemme 1.4. La croissance de F en ses n premiers arguments et sa décroissance en ses n derniers arguments résulte de la définition de F et du lemme 1.3.

□

Le cas non-dénombrable ne présente pas de difficulté sérieuse ; il faut et il suffit d'imposer que les traces marginales de $\succsim$ soient représentables sur les réels, ce qui équivaut à ce que soit satisfaite une condition d'"ordre-densité". On dira que $\succsim_i^{\pm}$ satisfait la condition d'"ordre-densité" $OD_i^{\pm}$ si il existe un sous-ensemble dénombrable $Y_i \subseteq X_i$ tel que $\forall x_i, z_i \in X_i$,

$$x_i \succ_i^{\pm} z_i \;\Rightarrow\; \exists\, y_i \in Y_i \text{ tel que } x_i \succsim_i^{\pm} y_i \succsim_i^{\pm} z_i. \tag{1.22}$$

Moyennant cette condition additionnelle imposée à $\succsim$ pour tout $i \in \{1,\ldots,n\}$, la caractérisation des modèles reste valable.

Notons également que le cas, légèrement plus général, des modèles $(N3)$ et $(N4)$ se traite tout à fait de la même manière ; ces deux modèles sont équivalents et les préférences qui peuvent y être représentées sont celles qui vérifient les propriétés $AC1$, $AC2$ et $AC3$.

1.3.3. *Modèle ($N8$) et stricte monotonie par rapport aux traces*

Pour obtenir une caractérisation du modèle le plus contraint de ceux figurant dans le tableau 1.1, nous introduisons deux nouveaux axiomes qui ne délivrent leur puissance que lorsque la relation est complète. Ces axiomes sont bâtis sur le modèle de l'axiome d'«annulation triple» qui est utilisé classiquement dans la caractérisation des modèles d'utilité additive ; c'est d'ailleurs la raison de leur dénomination : «TAC» pour «annulation Triple intrA-Critère».

Définition 5 (Conditions $TAC1$, $TAC2$) *On dit que* $\succsim$ *satisfait :*

$TAC1_i$ *si*

$$\left.\begin{array}{r}(x_i, a_{-i}) \succsim y\\ \textit{et}\\ y \succsim (z_i, a_{-i})\\ \textit{et}\\ (z_i, b_{-i}) \succsim w\end{array}\right\} \Rightarrow (x_i, b_{-i}) \succsim w,$$

$TAC2_i$ *si*

$$\left.\begin{array}{r}(x_i, a_{-i}) \succsim y\\ \textit{et}\\ y \succsim (z_{-i}, a_{-i})\\ \textit{et}\\ w \succsim (x_i, b_{-i})\end{array}\right\} \Rightarrow w \succsim (z_i, b_{-i}),$$

pour tout $x_i, z_i \in X_i$*, tout* $a_{-i}, b_{-i} \in X_{-i}$ *et tout* $y, w \in X$.

Nous dirons que $\succsim$ *satisfait* $TAC1$ *(resp.* $TAC2$*) si elle satisfait* $TAC1_i$ *(resp.* $TAC2_i$*) pour tout* $i \in \{1, \ldots, n\}$ *. Nous abrégerons aussi* $TAC1$ *et* $TAC2$ *en* $TAC12$*.*

Les deux premières conditions dans la prémisse de $TAC1_i$ et $TAC2_i$ suggèrent que le niveau x_i n'est pas moins élevé que le niveau z_i. $TAC1_i$ (resp. $TAC2_i$) impliquent alors que x_i devrait dominer z_i par le haut (resp. par le bas).

Nous donnons sans démonstration (voir [BOU 04d]) quelques conséquences de $TAC1$ et $TAC2$. Ces axiomes ne seront imposés qu'à des relations complètes ; sans cette hypothèse, leur pouvoir est assez limité.

Lemme 5 (Réponse strictement positive aux traces sur les niveaux) *Si* $\succsim$ *est une relation binaire* complète *sur* $X = \prod_{i=1}^{n} X_i$ *alors :*

1) $TAC1_i \Rightarrow [AC1_i \textit{ et } AC3_i]$

2) $TAC2_i \Rightarrow [AC2_i \textit{ et } AC3_i]$

3) $TAC1_i$ *est équivalent à la complétude de la relation* $\succsim_i^{\pm}$ *jointe à la condition suivante :*

$$[x \succsim y \textit{ et } z_i \succ_i^{+} x_i] \Rightarrow (z_i, x_{-i}) \succ y. \tag{1.23}$$

4) $TAC2_i$ *est équivalent à la complétude de la relation* $\succsim_i^{\pm}$ *jointe à la condition suivante :*

$$[x \succsim y \textit{ et } y_i \succ_i^{-} w_i] \Rightarrow x \succ (w_i, y_{-i}). \tag{1.24}$$

5) Si $TAC1_i$ *ou* $TAC2_i$*, alors* $\succsim$ *est indépendante pour* $\{i\}$ *et* $\succsim_i$ *est un préordre complet. De plus, si on a* $TAC12$ *alors* $\succsim_i = \succsim_i^{\pm}$*.*

Comme on le voit, sitôt que $\succsim$ est complète, la conjonction de $TAC1_i$ et $TAC2_i$ garantit que $\succsim$ répond de façon strictement croissante à la trace marginale $\succ_i^{\pm}$. Ces propriétés impliquent aussi que $\succsim$ est faiblement indépendante pour la coordonnée $\{i\}$ et que la préférence marginale $\succsim_i$ est un préordre complet identique à la trace marginale $\succsim_i^{\pm}$. Nous n'examinons pas en détail ici les relations entre $TAC1_i$, $TAC2_i$, d'une part, et $AC1_i$, $AC2_i$, $AC3_i$, d'autre part. Nous y reviendrons dans la section 1.3.6. On peut montrer par des exemples (voir [BOU 04d, Appendice A]) que pour une relation complète, $TAC1$ et $TAC2$ sont des propriétés logiquement indépendantes.

Notons qu'on ne peut déduire de ceci des propriétés fortes de la préférence globale, comme la transitivité, ni même la semi-transitivité ou la propriété de Ferrers ; la préférence $\succsim$ n'est donc pas en général un ordre d'intervalle, même dans le cas le plus contraint, celui du modèle ($N8$).

Les résultats précédents conduisent directement à la caractérisation du modèle ($N8$).

Proposition 6 (Caractérisation de ($N8$)) *Soit $\succsim$ une relation binaire sur l'ensemble dénombrable $X = \prod_{i=1}^{n} X_i$. $\succsim$ vérifie le modèle ($N8$) ssi $\succsim$ est complète et satisfait $TAC1$ et $TAC2$.*

Preuve. La preuve suit exactement le même schéma que celle de la proposition 5. Seule la définition de la fonction F doit être adaptée pour prendre en compte la complétude de $\succsim$. On définit F sur $[\prod_{i=1}^{n} u_i(X_i)]^2$ en remplaçant (1.25) par :

$$F([u_i(x_i)];[u_i(y_i)]) = \begin{cases} +\exp(\sum_{i=1}^{n}(u_i(x_i) - u_i(y_i))) & \text{si } x \succsim y, \\ 0 & \text{si } x \sim y, \\ -\exp(\sum_{i=1}^{n}(u_i(y_i) - u_i(x_i))) & \text{sinon.} \end{cases} \qquad (1.25)$$

Il résulte des parties 3 et 4 du lemme 5 que F est strictement croissante en les u_i (qui sont, dans cette construction, des représentation numériques des préordres $\succsim_i^{\pm}$).

□

1.3.4. *Caractérisation complète des modèles sur les niveaux*

A titre documentaire, nous donnons sans démonstration (voir la démonstration dans [BOU 04d]) une caractérisation complète des modèles sur les niveaux décrits dans le tableau 1.1. Nous nous limitons au cas où X est dénombrable, le cas non dénombrable se traitant sans difficulté, moyennant l'imposition de conditions d'ordre-densité sur les traces (à partir du modèle ($N4$)).

Théorème 1 (Modèles fondés sur les traces sur les niveaux) *Soit $\succsim$ une relation binaire sur un ensemble dénombrable $X = \prod_{i=1}^{n} X_i$. Cette relation est représentable dans le*

1) Modèle ($N1$) ssi $\succsim$ est réflexive ;

2) Modèle ($N2$) ssi $\succsim$ est complète ;

3) Modèle ($N4$) ssi $\succsim$ vérifie $AC1$, $AC2$ et $AC3$; les modèles ($N3$) et ($N4$) sont équivalents ;

4) Modèle ($N6$) ssi $\succsim$ est réflexive et vérifie $AC1$, $AC2$ et $AC3$; les modèles ($N5$) et ($N6$) sont équivalents ;

5) Modèle ($N7$) ssi $\succsim$ est complète et vérifie $AC1$, $AC2$ et $AC3$;

6) Modèle ($N8$) ssi $\succsim$ est complète et vérifie $TAC1$ et $TAC2$.

Observons que croissance et non-décroissance (resp. décroissance et non-croissance) ne se distinguent pas dans nos modèles à moins que la fonction F soit anti-symétrique (i.e., $F([u_i(x_i)]; [u_i(y_i)]) = -F([u_i(y_i)]; [u_i(x_i)])$). Dans ce cas, la valeur “0” joue un rôle spécial et exclusif, celui d'indiquer l'indifférence, et cela conduit à distinguer le cas croissant du cas non-décroissant.

1.3.4.1. *Unicité et représentations régulières*

Du point de vue de l'unicité de la représentation, tous ces modèles sont évidemment assez pauvres. Une grande variété de fonctions peuvent être utilisées tant en ce qui concerne F que u_i. Cependant, il n'est pas difficile de voir quelles sont exactement les contraintes que doivent vérifier ces fonctions. Prenons le cas du modèle ($N6$). Notre preuve de la proposition 5 montre qu'il est toujours possible d'utiliser des fonctions u_i vérifiant :

$$x_i \succsim_i^{\pm} y_i \Leftrightarrow u_i(x_i) \geq u_i(y_i). \tag{1.26}$$

Nous appellerons *régulière* une représentation où les fonctions u_i vérifient 1.26. D'après notre preuve, toute transformation strictement monotone d'une fonction u_i vérifiant cette condition peut être utilisée et donnera lieu à une autre représentation régulière. D'autres choix sont possibles cependant. En fait, il est facile de voir que n'importe quelle fonction u_i satisfaisant

$$x_i \succ_i^{\pm} y_i \Rightarrow u_i(x_i) > u_i(y_i) \tag{1.27}$$

peut être utilisée dans une représentation du modèle ($N6$).

Pour ce qui est de la fonction F, on peut remplacer l'exponentielle de la somme des différences des $2n$ arguments, utilisée dans la formule (1.21), par n'importe quelle fonction à valeurs réelles positives sur $\mathbb{R}^{2n}$ qui soit croissante en ses n premiers arguments et décroissante en les n derniers (au moins sur le sous-ensemble $[\prod_{i=1}^{n} u_i(X_i)]^2$). Il est par ailleurs clair que seules de telles fonctions peuvent être utilisées.

Les représentations décrites ci-dessus sont les seules possibles pour le modèle $(N6)$. Il n'est pas difficile d'adapter les raisonnements que nous avons faits pour couvrir tous les modèles envisagés ici (voir [BOU 04d] pour les détails).

1.3.5. *Relations compatibles avec la dominance*

Pourquoi s'intéresser particulièrement aux modèles $(N5)$ et $(N6)$ et $(N8)$? La raison majeure est liée à l'application des modèles du mesurage conjoint à l'analyse multicritère. En analyse multicritère, la préférence globale est généralement construite (et non donnée *a priori*). Cette construction se fonde sur les données (c'est-à-dire les évaluations des alternatives sur les différents points de vue pertinents) et leur interprétation en termes de préférence sur chaque critère. Sur ce dernier point, il importe de souligner que les ensembles X_i n'ont pas été supposé être des ensembles numériques ; ce peuvent être des ensembles ordonnés ou même des échelles nominales. L'interprétation de ces évaluations en terme de préférence nécessite au minimum de définir un ordre sur les ensembles X_i, ordre qui corresponde aux préférences croissantes du décideur sur le point de vue correspondant. L'échelle ainsi interprétée porte le nom de *critère* [ROY 93].

On s'attend bien entendu à ce que certains liens logiques minimaux existent entre les critères et les préférences globales. Le *respect de la dominance*[2] en est un, communément admis [ROY 85, ROY 93, VIN 89]. En théorie du mesurage conjoint, aucun ordre n'est postulé a priori sur les X_i ; celui-ci, s'il existe, devrait se retrouver – ou, du moins, ne pas être contredit – par la préférence globale. Dès lors, on peut formuler le principe de respect de la dominance, dans le contexte du mesurage conjoint, de la manière suivante.

Définition 6 *Une relation binaire réflexive* $\succsim$ *sur un ensemble* $X = \prod_{i=1}^{n} X_i$ *est* compatible avec une relation de dominance *si, pour tout* $i \in \{1, \ldots, n\}$ *, il existe un préordre complet* S_i *sur* X_i *tel que, pour tout* $x, y \in X$ *et tout* $z_i, w_i \in X_i$*,*

$$[x \succsim y, z_i S_i x_i \text{ et } y_i S_i w_i \text{ pour tout } i \in \{1, \ldots, n\}\,] \Rightarrow z \succsim w. \tag{1.28}$$

On dit que cette compatibilité est stricte *si la conclusion de la condition (1.28) est modifiée en* $z \succ w$ *dès que, pour un certain* $j \in \{1, \ldots, n\}$ *,* $z_j P_j x_j$ *ou* $y_j P_j w_j$ *(où* P_j *dénote la partie asymétrique de* S_j*).*

2. Cette notion de dominance ne doit pas être confondue avec celle que nous avons introduite incidemment après la définition 4 ; cette dernière concerne uniquement les positions relatives des niveaux sur un attribut ; nous l'avons appelée "dominance par le haut" et "dominance par le bas" faute d'avoir trouvé un terme plus approprié.

Cette définition appelle une remarque. On pourrait penser qu'une définition raisonnable de la compatibilité avec une relation de dominance consisterait à requérir la condition suivante au lieu de (1.28) :

$$[x_i S_i y_i \text{ pour tout } i \in \{1,\ldots,n\}] \Rightarrow x \succsim y. \tag{1.29}$$

Le lecteur se convaincra facilement que cette notion de compatibilité avec une dominance serait trop faible dans le cas où la relation $\succsim$ n'est pas supposée transitive. En effet, lorsque $\succsim$ possède des cycles dans sa partie asymétrique, il est possible que cette relation vérifie (1.28) alors qu'il existe des alternatives $x, y, z \in X$ telles que $x \Delta y$, $y \succ z$ et $z \succ x$ (où la relation de dominance $x \Delta y$ est définie par $[x_i S_i y_i$ pour tout $i \in \{1,\ldots,n\}]$). Dans une telle situation, les alternatives non-dominées (pour la relation Δ) ne s'imposent pas nécessairement comme de bonnes solutions d'un problème de choix multicritère puisque x pourrait être non-dominé alors qu'il existerait une alternative z telle que $z \succ x$. La définition 6) évite cet écueil puisque, avec (1.28), $x \Delta y$ et $y \succ z$ impliquent $x \succsim z$, en contradiction avec $z \succ x$.

Vu les résultats de la section 1.3.2 liant les relations $\succsim_i^{\pm}$ à la monotonie de F, on peut s'attendre à ce que, lorsqu'une préférence $\succsim$ est compatible avec une relation de dominance, les relations S_i de la définition 6 ne soient pas étrangères aux traces marginales $\succsim_i^{\pm}$. C'est bien le cas, comme le montre la proposition suivante (nous nous y limitons aux relations de préférence réflexives, mais le cas des relations asymétriques pourrait être traité similairement).

Proposition 7 (Compatibilité avec la dominance) *Une relation binaire réflexive $\succsim$ sur un ensemble $X = \prod_{i=1}^n X_i$ est* compatible *avec une relation de dominance ssi elle satisfait $AC1$, $AC2$ et $AC3$. Dans ce cas S_i est compatible avec $\succsim_i^{\pm}$ dans le sens suivant :*

$$x_i \succ_i^{\pm} y_i \Rightarrow Non[\, y_i S_i x_i \,] \tag{1.30}$$

Preuve. La nécessité de $AC1$, $AC2$ et $AC3$ est assez immédiate. Prenons le cas de $AC1$, les autres cas étant similaires. Supposons que $(x_i, a_{-i}) \succsim y$ et $(z_i, b_{-i}) \succsim w$. La relation S_i étant complète, nous avons soit $x_i S_i z_i$ soit $z_i S_i x_i$. Si $z_i S_i x_i$ alors, en utilisant la définition de la compatibilité avec la dominance, $(x_i, a_{-i}) \succsim y$ implique $(z_i, a_{-i}) \succsim y$. Si $x_i S_i z_i$, alors $(z_i, b_{-i}) \succsim w$ implique $(x_i, b_{-i}) \succsim w$. Par conséquent $AC1$ est vérifié.

Le fait que $AC1$, $AC2$ et $AC3$ sont des conditions suffisantes est évident. On peut en effet prendre $S_i = \succsim_i^{\pm}$ pour tout $i \in \{1,\ldots,n\}$. Sous $AC123$, les $\succsim_i^{\pm}$ sont des préordres complets (lemme 4.4) et en utilisant le lemme 1.4, on obtient (1.28).

Pour montrer (1.30), supposons au contraire qu'il existe $x_i, y_i \in X_i$ avec $x_i \succ_i^{\pm} y_i$ et $y_i S_i x_i$. De la première relation nous déduisons qu'il existe soit $a_{-i} \in X_{-i}$ et $z \in X$

tels que $(x_i, a_{-i}) \succsim z$ et $Non[(y_i, a_{-i}) \succsim z]$ soit $b_{-i} \in X_{-i}$ et $w \in X$ tels que $w \succsim (y_i, b_{-i})$ et $Non[w \succsim (x_i, b_{-i})]$. Dans les deux cas, $y_i S_i x_i$ et l'application de (1.28) conduisent à une contradiction.

□

On déduit de ce résultat que, lorsque la préférence $\succsim$ est compatible avec une relation de dominance, $\succsim_i^{\pm}$ ne peut être plus fine que S_i. En d'autres termes, $S_i \subseteq \succsim_i^{\pm}$. Si l'on considère qu'une préférence globale $\succsim$, compatible avec une dominance, procède en pratique à une agrégation des relations S_i définissant les critères, on comprendra que $\succsim$ ne peut induire comme trace sur X_i une relation qui contredirait S_i, ni même qui créerait une préférence, là où S_i ne voit qu'indifférence. Même si, pour une préférence réflexive et satisfaisant $AC123$, on ne peut garantir l'unicité des relations S_i, on constate cependant que celles-ci sont fortement contraintes : S_i ne peut qu'être un préordre complet inclus à $\succsim_i^{\pm}$.

La proposition précédente institue le modèle $(N6)$ (ou son équivalent $(N5)$) comme cadre naturel des préférences compatibles avec une relation de dominance. Une question qui vient immédiatement à l'esprit est celle de la compatibilité *stricte* avec une relation de dominance. Assez curieusement, le cadre naturel pour la compatibilité stricte n'est pas exactement celui du modèle $(N8)$. En effet, ce modèle impose des préférences complètes, ce qui n'est pas, comme nous allons le voir, une condition nécessaire pour le respect strict de la dominance.

1.3.6. *Compatibilité stricte avec la dominance*

Une compatibilité stricte avec la dominance nécessite bien entendu un renforcement des axiomes AC_1, AC_2, AC_3. Nous appelons $AC4$ le renforcement suivant de $AC3$.

Définition 7 (Condition $AC4$) *On dit que $\succsim$ satisfait $AC4_i$ si $\succsim$ vérifie $AC3_i$ et si, lorsqu'un des conséquents de $AC3_i$ est faux, l'autre est satisfait avec $\succ$ au lieu de $\succsim$. Nous dirons que $\succsim$ satisfait $AC4$ si elle satisfait $AC4_i$ pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$.*

Le lemme suivant que nous donnons sans démonstration (voir [BOU 04d]), énonce quelques conséquences de $AC4$.

Lemme 6 (Conséquences de $AC4$)

1) Si $\succsim$ est réflexive, $AC4_i$ est équivalente à la complétude de $\succsim_i^{\pm}$ et la conjonction des deux conditions :

$$[x \succsim y \text{ et } z_i \succ_i^{\pm} x_i] \Rightarrow (z_i, x_{-i}) \succ y, \tag{1.31}$$

$$[x \succsim y \text{ et } y_i \succ_i^{\pm} w_i] \Rightarrow x \succ (w_i, y_{-i}). \tag{1.32}$$

2) Si $\succsim$ est réflexive et satisfait $AC4_i$ alors
- $\succsim$ est indépendante pour $\{i\}$,
- $\succsim_i$ est un préordre complet et
- $\succsim_i = \succsim_i^{\pm}$.
3) Si $\succsim$ est complète, $[TAC1_i$ et $TAC2_i] \Leftrightarrow AC4_i$.

Dès que $\succsim$ est réflexive, la condition $AC4$, qui, par définition, est plus forte que $AC3$, entraîne également $AC1$ et $AC2$ puisqu'elle implique la complétude des relations $\succsim_i^{\pm}$ (lemmes 6.1 et 4.4). Lorsque $\succsim$ est complète, $AC4$ est équivalente à $TAC1$ et $TAC2$, ce qui fournit donc (voir proposition 6) une caractérisation alternative du modèle $(N8)$: $\succsim$ satisfait $(N8)$ ssi $\succsim$ est complète et vérifie $AC4$.

L'avantage de $AC4$ sur $TAC1$ et $TAC2$ est que cette condition entraîne une réponse strictement monotone aux traces marginales, même lorsque $\succsim$ est incomplète. Elle est également la condition que nous recherchons en vue de caractériser la compatibilité stricte avec une relation de dominance.

Proposition 8 (Compatibilité stricte avec la dominance) *Une relation binaire réflexive $\succsim$ sur un ensemble $X = \prod_{i=1}^{n} X_i$ est* compatible *avec une relation de dominance ssi elle satisfait $AC4$. Dans ce cas, les relations S_i sont déterminées de façon unique et $S_i = \succsim_i^{\pm}$, pour tout i.*

La preuve de cette proposition est similaire à celle de la proposition 7 ; nous l'omettons (voir [BOU 04d]).

Notons que les conditions assurant la (stricte) compatibilité avec une relation de dominance ne garantissent pas en revanche que $\succsim$ possède de «bonnes» propriétés : ni complétude, ni transitivité ! Il est en effet facile, en utilisant des exemples inspirés du paradoxe de Condorcet (voir par exemple [SEN 86]), de bâtir une relation binaire $\succsim$ strictement compatible avec une relation de dominance et ayant des circuits dans sa partie asymétrique (par exemple en bâtissant $\succsim$ via la règle de la majorité appliquée aux relations S_i).

1.3.7. *Le cas des préordres complets*

Pour en revenir à des modèles plus classiques de préférences, à savoir le cas où $\succsim$ est supposé être un préordre complet, nous examinons comment cette hypothèse se combine avec nos axiomes. Quand $\succsim$ est un préordre complet, la trace marginale $\succsim_i^{\pm}$ se confond avec la préférence marginale $\succsim_i$. Nous donnons sans preuve (voir [BOU 04d]) les résultats suivants.

Lemme 7 (Cas du préordre) *Soit $\succsim$ un préordre complet sur l'ensemble $X = \prod_{i=1}^{n} X_i$. Nous avons :*

1) [$\succsim$ est faiblement séparable] $\Leftrightarrow$ [$\succsim$ satisfait $AC1$] $\Leftrightarrow$ [$\succsim$ satisfait $AC2$] $\Leftrightarrow$ [$\succsim$ satisfait $AC3$],

2) [$\succsim$ est faiblement indépendant] $\Leftrightarrow$ [$\succsim$ satisfait $AC4$] $\Leftrightarrow$ [$\succsim$ satisfait $TAC1$ et $TAC2$] .

Dans le cas des préordres partiels, on peut donc se passer des traces marginales ; les préférences marginales sont un outil d'analyse suffisamment fin. Notons à cet égard que le cas des préordres est hautement spécifique : dans [BOU 04d, Appendix A], nous donnons des exemples de quasi-ordres faiblement indépendants qui violent respectivement $AC1$, $AC2$ et $AC3$. Dans ce cas un peu moins contraint, l'indépendance faible, n'est pas équivalente à $AC1$, $AC2$ ou $AC3$.

En utilisant ces observations, il est facile de montrer la proposition suivante.

Proposition 9 *Soit $\succsim$ un préordre partiel sur un ensemble dénombrable $X = \prod_{i=1}^{n} X_i$. Il existe des fonctions u_i définies sur X_i, à valeurs réelles, et une fonction U sur $\prod_{i=1}^{n} u_i(X_i)$, à valeurs réelles, telles que, pour tout $x, y \in X$,*

$$x \succsim y \Leftrightarrow U(u_1(x_1), \ldots, u_n(x_n)) \geq U(u_1(y_1), \ldots, u_n(y_n)) \geq 0. \tag{1.33}$$

La fonction U dans (1.33) peut être choisie :

1) non-décroissante *en chacun de ses arguments ssi $\succsim$ est faiblement séparable,*

2) croissante *en chacun de ses arguments ssi $\succsim$ est faiblement indépendante.*

Idée de la preuve. Partons du résultat classique de Cantor [CAN 95] : tout préordre $\succsim$ sur un ensemble dénombrable X possède une représentation numérique, c'est-à-dire qu'il existe une fonction $f : X \to \mathbb{R}$ telle que $x \succsim y \Leftrightarrow f(x) \geq f(y)$. Dans le cas général, une factorisation de f en $U(u_1(x_1), \ldots, u_n(x_n))$ s'obtient, comme dans la preuve de la proposition 1 : on choisit des fonctions u_i séparant les classes d'équivalence de $\succsim_i^{\pm}$ (*cf.* (1.13) : $x_i \sim_i^{\pm} y_i \Leftrightarrow u(x_i) = u_i(y_i)$) et on définit U en posant $f(x) = U(u_1(x_1), \ldots, u_n(x_n))$. Dans les cas faiblement séparable et faiblement indépendant, u_i sera une représentation numérique de la préférence marginale, le préordre $\succsim_i$, ou, ce qui revient au même, de la trace marginale $\succsim_i^{\pm}$. On définit U comme précédemment. En combinant les résultats des lemmes 4, 6 et 7 on montre que U est non-décroissante (resp. croissante) en chacun de ses arguments.

□

Le cas non dénombrable nécessite l'adjonction des habituelles hypothèses limitant la cardinalité de X et garantissant l'existence de représentations numériques pour les préordres $\succsim$ et $\succsim_i$ (ordre-densité).

Alors que le cas croissant est bien connu ([KRA 71], théorème 7.1), le résultat dans le cas non-décroissant généralise un théorème obtenu par [BLA 78] dans le cas où $X \subseteq \mathbb{R}^n$.

1.3.8. *Exemples*

Les modèles (1.1), (1.3) et (1.6) présentés dans l'introduction, qu'ils correspondent ou non à des préférences transitives, s'inscrivent dans nos modèles à niveaux, même si seul le modèle d'utilité additive correspond à des préférences qui sont des préordres complets. Dans ces trois modèles en effet, les traces marginales $\succsim_i^{\pm}$ sont des préordres complets. Le modèle (1.4), par contre, n'a pas nécessairement de traces marginales complètes ; si, dans ce modèle, on postule en sus la complétude des traces, on se rapproche du modèle de différences additives de Tversky (1.3). Nous passons brièvement en revue chacun des trois modèles cités plus haut, aux fins d'illustration.

Le modèle d'utilité additive (1.1) appartient au modèle ($N8$), le plus contraint des modèles fondés sur les niveaux ; de plus, les préférences qui sont représentables par une fonction d'utilité additive sont des préordres complets. Conformément au lemme 6, les traces marginales et les préférences marginales se confondent et sont des préordres totaux ; les fonctions u_i apparaissant dans (1.1) sont des représentations numériques particulières des préférences (ou des traces) marginales ; la préférence réagit strictement à tout progrès ou recul strict sur une trace marginale.

Le modèle de différences additives de Tversky (1.3) peut donner lieu à des préférences non transitives. Comme le modèle d'utilité additive, il appartient à la classe la plus contrainte ($N8$). Le lemme 6 s'applique également identifiant traces marginales et préférences marginales ; les fonctions u_i qui apparaissent dans (1.3) en sont des représentations numériques particulières. Le modèle de différences additives sera approché de plus près dans la section 1.5.2 car il s'appuie également sur les traces sur les niveaux (représentées par les fonctions Φ_i).

Bien que les modèles fondés sur les niveaux ne soient pas les plus adaptés pour décrire les méthodes de surclassement (dont une version de base est décrite par 1.6), les relations de préférence obtenues par ces méthodes possèdent néanmoins des traces marginales qui sont des préordres. Les préférences décrites par le modèle 1.6 appartiennent à la classe $(N5)$ ou $(N6)$ de modèles sur les niveaux. La partie asymétrique des préférences marginales $\succ_i$ est généralement vide (les préférences marginales ne discriminent pas les niveaux sur un critère j quelconque à moins que le poids p_j de ce critère soit à lui seul déterminant ; plus précisément, si $\sum_{i=1}^n w_i \geq \lambda$, mais $\sum_{i\neq j} w_i < \lambda$)

Le lecteur pourrait être surpris de constater que les modèles $(N0)$ à $(N8)$ ne permettent pas de distinguer entre les modèles d'utilité additive et de différences additives. En particulier, pour ces derniers, traces et préférences marginales sont confondues. Ne serait-ce pas parce que les seuls modèles intéressants, si l'on excepte ceux inspirés des méthodes majoritaires du choix social (comme les méthodes ELECTRE), sont nécessairement du type $(N8)$, le plus contraint ? Auquel cas, l'analyse plus fine menée jusqu'ici et qui consiste à distinguer soigneusement les traces marginales des préférences marginales perdrait beaucoup de son intérêt. Outre le fait que l'approche suivie permet d'éclairer des questions comme le respect de la dominance (section 1.3.5), il existe des modèles intuitivement intéressants qui échappent à une description satisfaisante si on se limite à une analyse en termes de préférences marginales. Considérons une préférence $\succsim$ qui serait représentable dans un modèle d'utilité additive à seuil :

$$x \succ y \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{i=1}^{n} u_i(x_i) \geq \sum_{i=1}^{n} u_i(y_i) + \varepsilon \tag{1.34}$$

$$x \sim y \quad \Leftrightarrow \quad |\sum_{i=1}^{n} u_i(x_i) - \sum_{i=1}^{n} u_i(y_i)| \leq \varepsilon, \tag{1.35}$$

où ε est un nombre positif qui représente le seuil au delà duquel un écart de préférence est perceptible ; des écarts qui n'atteignent pas ce seuil ne sont pas perçues et conduisent à un jugement d'indifférence ($\sim$). Les préférences $\succsim$ qui peuvent être décrites par un tel modèle ne sont pas des préordres complets, mais des semi-ordres (ou quasi-ordres). La partie asymétrique de la préférence ($\succ$) est transitive, mais l'indifférence ($\sim$) ne l'est pas (voir [LUC 56, PIR 97]. Un tel modèle est celui qui prévaut par exemple pour décrire un test statistique d'égalité de moyennes (à ceci près que la relation $\succsim$ ne doit pas être interprétée comme une préférence mais comme un jugement comparatif sur des quantités). Il n'est pas possible d'analyser une telle relation en termes de préférences marginales. En effet, celles-ci sont représentables par

$$x_i \succsim_i y_i \Leftrightarrow u_i(x_i) \geq u_i(y_i) - \varepsilon$$

ce qui fait de chaque relation de préférence marginale $\succsim_i$ un semi-ordre. Les traces marginales sont en général plus discriminantes ; ce sont des préordres complets qui, si l'ensemble des alternatives est suffisamment riche (par exemple, si les ensembles images $u_i(X_i)$ sont des intervalles de la droite réelle), sont représentables par les fonctions u_i (c'est-à-dire $x_i \succsim_i^{\pm} y_i \Leftrightarrow u_i(x_i) \geq u_i(y_i)$). Dans ce modèle, la préférence $\succsim$ est complète et ses traces marginales sont complètes ; elle appartient donc au modèle $(N7)$. Il n'est pas invraisemblable que la raison pour laquelle de tels modèles ont été peu étudiés soit liée au fait que le modèle dominant, l'utilité additive, ne nécessite pas une analyse plus fine que celle fournie par les préférences marginales. Le type d'analyse de relations développé dans la présente section offre en tout cas des outils qui permettent l'analyse de toute relation, pas seulement des préordres complets. Dans la section suivante, nous nous intéresserons à un autre outil d'analyse, les traces sur les niveaux.

Une autre question que l'on peut à bon droit se poser concerne la dernière sous-section, celle consacrée aux préordres complets (section 1.3.7). Ne peut-on se limiter à l'étude des préordres indépendants ? En d'autres termes, y a-t-il des relations de préférence intéressantes qui soient des préordres complets séparables mais non indépendants ? La réponse est bien entendu positive ; lorsque dans le modèle (1.1) on remplace la somme par “minimum” ou “maximum”, on obtient alors une relation qui est un préordre séparable, mais non indépendant. En effet, considérons le cas où $(X_i) = [0, 10]$ et $u_i(x_i) = x_i$ pour $i = 1, 2$; la préférence $\succsim$ compare les alternatives en comparant leur point faible, c'est-à-dire $x \succsim y$ ssi $\min x_i \geq \min y_i$. Il est clair que les traces et les préférences marginales sont confondues et correspondent à l'ordre habituel sur les nombres réels de l'intervalle $[0, 10]$. Soient $x = (3, 5)$ et $y = (7, 3)$; on a $x \sim y$, mais la préférence ne réagit pas strictement si nous augmentons, par exemple, la performance de x sur le second critère : même en portant à 10 cette valeur, nous aurons encore l'indifférence entre $(3, 10)$ et $(7, 3)$.

D'autres règles de décision importantes, comme “LexiMin” ou “LexiMax”, l'intégrale de Choquet, l'intégrale de Sugeno (voir chapitre Marichal [**?**]) définissent en général des préférences qui sont des préordres complets séparables mais non nécessairement indépendants.

1.4. Modèles utilisant les traces marginales sur les écarts

Dans cette section, nous étudions des modèles de préférence obtenus de façon analogue à ceux de la section précédente, en remplaçant les traces marginales sur les niveaux par les traces marginales sur les écarts.

1.4.1. *Définition des modèles*

Partant du modèle trivial ($E0$), fondé sur les traces sur les écarts et introduit en section 1.2.5, dans lequel :

$$x \succsim y \Leftrightarrow G([p_i(x_i, y_i)]) \geq 0,$$

nous en définissons les variantes suivantes :

– le modèle ($E1$), en imposant à ($E0$) que $p_i(x_i, x_i) = 0$,

– le modèle ($E2$), en imposant à ($E1$) l'anti-symétrie de chaque p_i, i.e. $p_i(x_i, y_i) = -p_i(y_i, x_i)$,

– le modèle ($E3$), en imposant à ($E2$) que G soit impaire, i.e. $G(\mathbf{x}) = -G(-\mathbf{x})$.

Comme en section 1.3, nous considérons les modèles obtenus en supposant que dans chacune des quatre variantes ($E0$), ($E1$), ($E2$) et ($E3$), G est non-décroissante ou croissante en chacun de ses arguments, ce qui nous donne au total douze modèles ; leur définition est reprise dans le tableau 1.2.

Tableau 1.2. *Modèles utilisant les traces sur les écarts*

($E0$)	$x \succsim y \Leftrightarrow G([p_i(x_i, y_i)]) \geq 0$
($E1$)	($E0$) avec $p_i(x_i, x_i) = 0$
($E2$)	($E1$) avec $p_i(x_i, y_i) = -p_i(y_i, x_i)$
($E3$)	($E2$) avec G impair
	....
($E4$)	($E0$) avec G non-décroissante
($E8$)	($E0$) avec G croissante
	....
($E5$)	($E1$) avec G non-décroissante
($E9$)	($E1$) avec G croissante
	....
($E6$)	($E2$) avec G non-décroissante
($E10$)	($E2$) avec G croissante
	....
($E7$)	($E3$) avec G non-décroissante
($E11$)	($E3$) avec G croissante

Les implications liant a priori ces modèles sont évidentes et nous ne les détaillons pas. Par ailleurs, les propriétés de G utilisées dans la définition des modèles ($E1$), ($E2$) et ($E3$) impliquent des propriétés simples des relations représentables dans ces modèles, propriétés qui permettent de les caractériser.

Proposition 10 (Caractérisation de ($E1$), ($E2$) et ($E3$)) *Une relation binaire* $\succsim$ *sur un ensemble produit* $X = \prod_{i=1}^{n} X_i$ *ayant au plus la cardinalité de* $\mathbb{R}$ *est représentable dans*

1) le modèle ($E1$) ou le modèle ($E2$) ssi $\succsim$ *est indépendante ;*

2) le modèle ($E3$) ssi $\succsim$ *est indépendante et complète.*

Preuve. Partie 1. Dans le modèle ($E1$), on a $p_i(x_i, x_i) = 0$, de sorte que $(x_i, a_{-i}) \succsim (x_i, b_{-i}) \Leftrightarrow G(0, (p_j(a_j, b_j))_{j \neq i}) \geq 0 \Leftrightarrow (y_i, a_{-i}) \succsim (y_i, b_{-i})$. Il en résulte que $\succsim$ est indépendante dès que $\succsim$ est représentable dans ($E1$).

Supposons réciproquement que $\succsim$ est indépendante et construisons une représentation de $\succsim$ dans le modèle ($E2$). Nous reprenons la construction d'une représentation décrite dans la démonstration de la partie 2 de la proposition 3 en la modifiant légèrement. La modification porte sur la spécification des fonctions p_i. Celles-ci séparent les classes d'équivalence de $\sim_i^{**}$, $(x_i, y_i) \sim_i^{**} (z_i, w_i) \Leftrightarrow p_i(x_i, y_i) = p_i(z_i, w_i)$. Rien ne nous empêche d'imposer à p_i de vérifier $p_i(x_i, x_i) = 0$, pour un certain $x_i \in X_i$; comme $\succsim$ est indépendante, $(x_i, x_i) \sim_i^{**} (y_i, y_i)$ pour tout $y_i \in X_i$ et donc, $p_i(y_i, y_i) = 0$ pour tout $y_i \in X_i$. Nous pouvons de plus imposer à p_i de vérifier $p_i(x_i, y_i) = -p_i(y_i, x_i)$. Ensuite, G est définie par (1.16) comme pour le modèle trivial, i.e. :

$$G([p_i(x_i, y_i)]) = \begin{cases} +1 & \text{si } x \succsim y, \\ -1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Il est clair que G est bien définie et donne une représentation de $\succsim$ dans le modèle ($E2$).

Partie 2. Le fait que $\succsim$ soit complète est une conséquence directe de la définition du modèle ($E3$) ; comme le modèle ($E3$) implique le modèle ($E1$), $\succsim$ est indépendante. Réciproquement, supposons que $\succsim$ est indépendante et complète. Dans ce cas-ci, on utilise les mêmes fonctions p_i que dans la partie 1, mais on modifie la définition de G comme suit :

$$G([p_i(x_i, y_i)]) = \begin{cases} +1 & \text{si } x \succ y, \\ 0 & \text{si } x \sim y, \\ -1 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{1.36}$$

On montre grâce à l'indépendance de $\succsim$ que G est bien définie. Comme $\succsim$ est complète, la fonction G est impaire.

□

Les propriétés de non-décroissance ou de croissance de G sont liées à des axiomes spécifiques, fort similaires à ceux définis dans la section 1.3.2. Nous les introduisons dans le paragraphe suivant.

1.4.2. *Complétude des traces marginales sur les écarts et monotonie de* G

Nous énonçons les deux axiomes suivants, pour chaque attribut i. Comme $AC1$, $AC2$ et $AC3$, ces axiomes ont la forme de conditions de simplification («cancellation»). Leur appellation rappelle qu'il s'agit d'annulations «inteR-Critère».

Définition 8 (Conditions $RC1$ et $RC2$) *Soit $\succsim$ une relation binaire sur l'ensemble $X = \prod_{i=1}^{n} X_i$. On dit que cette relation satisfait l'axiome :*

$RC1_i$ *si*

$$\left.\begin{array}{r} (x_i, a_{-i}) \succsim (y_i, b_{-i}) \\ \textit{et} \\ (z_i, c_{-i}) \succsim (w_i, d_{-i}) \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} (x_i, c_{-i}) \succsim (y_i, d_{-i}) \\ \textit{ou} \\ (z_i, a_{-i}) \succsim (w_i, b_{-i}), \end{array}\right.$$

$RC2_i$ *si*

$$\left.\begin{array}{r} (x_i, a_{-i}) \succsim (y_i, b_{-i}) \\ \textit{et} \\ (y_i, c_{-i}) \succsim (x_i, d_{-i}) \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} (z_i, a_{-i}) \succsim (w_i, b_{-i}) \\ \textit{ou} \\ (w_i, c_{-i}) \succsim (z_i, d_{-i}), \end{array}\right.$$

pour tout $x_i, y_i, z_i, w_i \in X_i$ et tout $a_{-i}, b_{-i}, c_{-i}, d_{-i} \in X_{-i}$. On dit que $\succsim$ satisfait $RC1$ (resp. $RC2$) si elle satisfait $RC1_i$ (resp. $RC2_i$) pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$. On abréviera parfois la conjonction de $RC1$ et $RC2$ en $RC12$.

La condition $RC1_i$ suggère que (x_i, y_i) constitue un écart de préférence plus grand que (z_i, w_i) ou vice versa. Il est en effet facile de voir que supposer $Non[\,(x_i, y_i) \succsim_i^* (z_i, w_i)\,]$ et $Non[\,(z_i, w_i) \succsim_i^* (x_i, y_i)\,]$ mène à une violation de $RC1_i$. De la sorte, $RC1_i$ est équivalent à la complétude de $\succsim_i^*$. De même, $RC2_i$ suggère que les deux écarts «opposés» (x_i, y_i) et (y_i, x_i) sont liés. En terme de la relation $\succsim_i^*$, cet axiome dit que si l'écart de préférence entre x_i et y_i n'est pas au moins aussi grand qu'entre z_i et w_i, alors l'écart de préférence entre y_i et x_i devrait être au moins aussi grand que celui entre w_i et z_i. Nous reprenons ces observations dans le lemme suivant dont la preuve résulte immédiatement des définitions.

Lemme 8 (Complétude des traces sur les écarts) *Nous avons :*

1) $[\succsim_i^*$ *est complète*$]$ *ssi* $RC1_i$ *;*

2) $RC2_i$ *ssi*
$[$*pour tout* $x_i, y_i, z_i, w_i \in X_i,\ Non[\,(x_i, y_i) \succsim_i^* (z_i, w_i)\,] \Rightarrow (y_i, x_i) \succsim_i^* (w_i, z_i)]$ *;*

3) $[\succsim_i^{**}$ *est complète*$]$ *ssi* $[RC1_i$ *et* $RC2_i]$.

La condition $RC1$ a été introduite dans [BOU 86] sous le nom «weak cancellation». L'extension de la condition $RC1$ à des sous-ensembles d'attributs est fondamental dans [VIN 91] où cette condition est baptisée «independence». La condition $RC2$ a été proposée en premier lieu dans [BOU 02b, BOU 99, BOU 97]. Notons encore deux conséquences, simples mais importantes, de $RC1$ et $RC2$ (voir leur preuve dans [BOU 04c]).

Lemme 9 (Conséquences de $RC1$ et $RC2$)

1) Si $\succsim$ satisfait $RC1_i$ alors $\succsim$ est faiblement séparable pour i,

2) Si $\succsim$ satisfait $RC2$ alors $\succsim$ est indépendante et soit réflexive soit irréflexive.

Les axiomes $RC1$ et $RC2$ nous permettent d'analyser tous les modèles restants, à l'exception du modèle le plus contraint, ($E11$). On constate que les propriétés de non-décroissance et de croissance par rapport aux traces sur les écarts ne se distinguent pas, sauf dans le cas le plus contraint (modèles ($E7$) et ($E11$)).

Proposition 11 (Caractérisation des modèles ($E4$) à ($E10$)) *Une relation binaire $\succsim$ sur un ensemble produit $X = \prod_{i=1}^{n} X_i$ dénombrable est représentable dans le*

1) modèle ($E4$) ou le modèle ($E8$) ssi $\succsim$ satisfait $RC1$;

2) modèle ($E5$) ou le modèle ($E9$) ssi $\succsim$ est indépendante et satisfait $RC1$;

3) modèle ($E6$) ou le modèle ($E10$) ssi $\succsim$ satisfait $RC1$ et $RC2$;

4) modèle ($E7$) ssi $\succsim$ est complète et satisfait $RC1$ et $RC2$.

Preuve. Partie 1. Le modèle ($E4$) vérifie $RC1$. En effet, supposons que $(x_i, a_{-i}) \succsim (y_i, b_{-i})$ et $(z_i, c_{-i}) \succsim (w_i, d_{-i})$. En utilisant le modèle ($E4$) on a :

$$G(p_i(x_i, y_i), (p_j(a_j, b_j))_{j\neq i}) \geq 0 \text{ et}$$
$$G(p_i(z_i, w_i), (p_j(c_j, d_j))_{j\neq i}) \geq 0.$$

Si $p_i(x_i, y_i) \geq p_i(z_i, w_i)$, en utilisant la non-décroissance de G, nous obtenons $G(p_i(x_i, y_i), (p_j(c_j, d_j))_{j\neq i}) \geq 0$ de sorte que $(x_i, c_{-i}) \succsim (y_i, d_{-i})$. Si $p_i(z_i, w_i) > p_i(x_i, y_i)$, nous avons $G(p_i(z_i, w_i), (p_j(a_j, b_j))_{j\neq i}) \geq 0$ de sorte que $(z_i, a_{-i}) \succsim (w_i, b_{-i})$. Par conséquent $RC1$ est vérifié.

La deuxième partie de la preuve construit une représentation dans ($E8$) d'une relation $\succsim$ qui vérifie $RC1$. Grâce à $RC1$, nous savons que $\succsim_i^*$ est un préordre complet. Nous choisissons pour la fonction p_i une représentation numérique de $\succsim_i^*$ (qui existe car X_i est supposé dénombrable) : $(x_i, y_i) \succsim_i^* (z_i, w_i) \Leftrightarrow p_i(x_i, y_i) \geq p_i(z_i, w_i)$. On définit alors G sur $p_i(X_i^2)$ comme suit :

$$G([p_i(x_i, y_i)]) = \begin{cases} + \exp(\sum_{i=1}^n p_i(x_i, y_i)) & \text{si } x \succsim y, \\ - \exp(- \sum_{i=1}^n p_i(x_i, y_i)) & \text{sinon .} \end{cases} \tag{1.37}$$

On voit que G est bien défini en utilisant le lemme 2.3 et la définition des p_i. Pour montrer la croissance de G, supposons que $p_i(z_i, w_i) > p_i(x_i, y_i)$, c'est-à-dire que $(z_i, w_i) \succ_i^* (x_i, y_i)$. Si $x \succsim y$, le lemme 2.2 implique que $(z_i, x_{-i}) \succsim (w_i, y_{-i})$ et la conclusion résulte de la définition de G. Si $Non[x \succsim y]$, on a soit $Non[(z_i, x_{-i}) \succsim (w_i, y_{-i})]$ soit $(z_i, x_{-i}) \succsim (w_i, y_{-i})$. Dans chaque cas, la conclusion résulte de la définition de G.

Partie 2. Le modèle ($E5$) impliquant les modèles ($E1$) et ($E4$), la nécessité de la condition d'indépendance et de $RC1$ en découle. Sous ces hypothèses, on construit une représentation de $\succsim$ dans le modèle ($E9$), comme dans la partie 1, à ceci près que l'on impose à p_i de vérifier $p_i(x_i, x_i) = 0$ (ce que permet la conséquence de la propriété d'indépendance notée dans le lemme 2.1).

Partie 3. On vérifie que si $\succsim$ est représentable dans le modèle ($E6$), elle vérifie $RC1$ et $RC2$. Pour $RC1$, c'est une conséquence du fait que le modèle ($E6$) implique le modèle ($E4$) ; pour $RC2$ la vérification se fait comme dans la partie 1 pour $RC1$. La nécessité des conditions $RC1$ et $RC2$ est ainsi prouvée.

Sous l'hypothèse que $\succsim$ satisfait $RC1$ et $RC2$, on en construit une représentation dans le modèle ($E10$) de la façon suivante. Par le lemme 8.3, on sait que les relations $\succsim_i^*$ et $\succsim_i^{**}$ sont des préordres complets. Comme les ensembles X_i sont dénombrables, il existe des fonctions $q_i : X_i \to \mathbb{R}$ représentant $\succsim_i^*$; nous en choisissons une quelconque et définissons p_i par $p_i(x_i, y_i) = q_i(x_i, y_i) - q_i(y_i, x_i)$. Il est clair que les fonctions p_i ainsi définies sont anti-symétriques et fournissent des représentations numériques des relations $\succsim_i^{**}$. En utilisant ces fonctions p_i, on définit G par (1.37). Le lemme 2.5 montre que cette définition n'est pas contradictoire. Pour montrer la croissance de G, supposons que $p_i(z_i, w_i) > p_i(x_i, y_i)$, c'est-à-dire que $(z_i, w_i) \succ_i^{**} (x_i, y_i)$. Par construction, ceci implique que $(z_i, w_i) \succsim_i^* (x_i, y_i)$. La croissance de G se prouve alors comme dans la partie 1.

Partie 4. La nécessité de la complétude résulte de la proposition 10.2 et du fait que le modèle ($E7$) implique le modèle ($E3$) ; la nécessité de $RC1$ et $RC2$ résulte du fait que le modèle ($E7$) implique le modèle ($E6$) et de la partie 3. Sous ces hypothèses sur $\succsim$, la construction d'une représentation de $\succsim$ dans le modèle ($E7$) se fait comme pour le modèle ($E10$), seule la fonction G est définie différemment :

$$G([p_i(x_i, y_i)]) = \begin{cases} + \exp(\sum_{i=1}^n p_i(x_i, y_i)) & \text{si } x \succ y, \\ 0 & \text{si } x \sim y, \\ - \exp(- \sum_{i=1}^n p_i(x_i, y_i)) & \text{sinon.} \end{cases} \tag{1.38}$$

Comme $\succsim$ est complète, G est impaire ; G est bien définie, vu la définition des p_i et le lemme 2.5. Elle est non-décroissante en vertu du lemme 2, parties 2 et 4.

$\square$

1.4.3. *Caractérisation du modèle ($E11$)*

Pour rendre compte de la distinction entre les modèles ($E7$) et ($E11$), nous introduisons un axiome du même type que $TAC1$ et $TAC2$, introduits en section 1.3.2, dans les modèles fondés sur les traces sur les niveaux. Ici aussi l'axiome TC ne donnera sa puissance que dans le cas où $\succsim$ est complète et sera liée au modèle dans lequel la croissance par rapport aux traces se distingue de la non-décroissance.

Définition 9 (Condition TC) *Soit $\succsim$ une relation binaire sur l'ensemble $X = \prod_{i=1}^{n} X_i$. On dit que cette relation satisfait l'axiome :*

TC_i *si*

$$\left.\begin{array}{r} (x_i, a_{-i}) \succsim (y_i, b_{-i}) \\ \textit{et} \\ (z_i, b_{-i}) \succsim (w_i, a_{-i}) \\ \textit{et} \\ (w_i, c_{-i}) \succsim (z_i, d_{-i}) \end{array}\right\} \Rightarrow (x_i, c_{-i}) \succsim (y_i, d_{-i}),$$

pour tout $x_i, y_i, z_i, w_i \in X_i$ et tout $a_{-i}, b_{-i}, c_{-i}, d_{-i} \in X_{-i}$. On dit que $\succsim$ satisfait TC si elle satisfait TC_i pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$.

La condition TC_i («Triple Cancellation») est une condition classique d'annulation qui a été utilisée souvent (voir [KRA 71, WAK 89]) dans l'analyse du modèle d'utilité additive (1.1). Nous donnons dans le lemme suivant, sans démonstration, deux propriétés liées à TC. Nous renvoyons à [WAK 88, WAK 89] pour une analyse détaillée de cet axiome, y compris pour son interprétation en terme d'écarts de préférence.

Lemme 10 (Stricte monotonie par rapport aux traces sur les écarts)

1) Si $\succsim$ est complète, TC_i implique $RC1_i$ et $RC2_i$,

2) Si $\succsim$ est complète et vérifie TC_i, on a : $[x \succsim y$ et $(z_i, w_i) \succ_i^{**} (x_i, y_i)] \Rightarrow (z_i, x_{-i}) \succ (w_i, y_{-i})$.

La deuxième de ces propriétés souligne clairement le lien de TC avec la stricte monotonie de $\succsim$ par rapport à ses traces $\succsim_i^{**}$ (lorsque $\succsim$ est complète). Elle montre que TC est le chaînon manquant qui va nous permettre de caractériser le modèle ($E11$).

Proposition 12 (Caractérisation du modèle ($E11$)) *Une relation binaire $\succsim$ sur un ensemble produit $X = \prod_{i=1}^{n} X_i$ dénombrable est représentable dans le modèle ($E11$) ssi $\succsim$ est complète et satisfait TC.*

Preuve. La nécessité des conditions se vérifie directement. Supposant que $\succsim$ est complète et vérifie TC, on obtient, par le lemme 10.1, qu'elle vérifie $RC1$ et $RC2$. On définit donc p_i et G comme dans la preuve de la partie 4 de la proposition11. La croissance de G résulte du lemme 10.2.

□

Pour la commodité du lecteur, nous reprenons dans le tableau suivant, les caractérisations des modèles fondés sur les traces sur les écarts.

Tableau 1.3. *Caractérisation des modèles utilisant les traces sur les écarts*

Modèle	Définition	Conditions
$(E0)$	$x \succsim y \Leftrightarrow G([p_i(x_i, y_i)]) \geq 0$	$\emptyset$
$(E1)$ $\Updownarrow$ $(E2)$	$(E0)$ avec $p_i(x_i, x_i) = 0$ / $(E0)$ avec p_i anti-symétrique	ind.
$(E3)$	$(E0)$ avec p_i anti-symétrique et G impaire	cpl., ind.
$(E8) \Leftrightarrow (E4)$	$(E0)$ avec $G(\nearrow\nearrow)$	$RC1$
$(E9) \Leftrightarrow (E5)$	$(E1)$ avec $G(\nearrow\nearrow)$	$RC1$, ind.
$(E10) \Leftrightarrow (E6)$	$(E2)$ avec $G(\nearrow\nearrow)$	$RC12$
$(E7)$	$(E3)$ avec $G(\nearrow)$	cpl., $RC12$
$(E11)$	$(E3)$ avec $G(\nearrow\nearrow)$	cpl., TC

$\nearrow$: "non-décroissant", $\nearrow\nearrow$: "croissant"
cpl. : "complet", ind. : "indépendant"

1.4.4. *Remarques*

1.4.4.1. *Le modèle de Goldstein.*

Les modèles ($E8$) et ($E4$) ont été introduits par [GOL 91] comme cas particuliers de son "modèle décomposable à seuils" ; l'équivalence de ces modèles y avait été remarquée.

1.4.4.2. *Préférences marginales.*

Quel rôle jouent les préférences marginales $\succsim_i$ dans les modèles fondés sur les traces sur les écarts ? Certainement pas un rôle central, mais l'on peut cependant établir un certain nombre de propriétés de monotonie les reliant à la préférence globale $\succsim$. Nous en présentons quelques unes, sans démonstration, dans la proposition qui suit :

Proposition 13

1) Si $\succsim$ est représentable dans le modèle ($E5$) alors : $[x_i \succ_i y_i$ pour tout $i] \Rightarrow Non[y \succsim x]$.

2) Si $\succsim$ est représentable dans le modèle ($E6$) alors :
- $\succsim_i$ est complète,
- $[x_i \succ_i y_i$ pour tout $i] \Rightarrow [x \succsim y]$.

3) Si $\succsim$ est représentable dans le modèle ($E11$) alors :
- $[x_i \succsim_i y_i$ pour tout $i] \Rightarrow [x \succsim y]$,
- $[x_i \succsim_i y_i$ pour tout i et il existe $j \in \{1, \ldots, n\}$ tel que $x_j \succ_j y_j] \Rightarrow [x \succ y]$.

Les propriétés de monotonie de nos modèles - à l'exception de celles de ($E11$) - peuvent paraître décevantes. Il faut cependant les lire en gardant à l'esprit le caractère non nécessairement transitif ni complet des préférences dont nous traitons. Dans un tel cadre, certaines propriétés qui pourraient passer pour évidentes ne seraient tout simplement pas souhaitables. Par exemple, quand les relations d'indifférence marginales $\sim_i$ ne sont pas transitives, il peut ne pas être indiqué de demander une propriété telle que :

$$[x_i \sim_i y_i \text{ pour tout } i] \Rightarrow [x \sim y].$$

Une telle propriété, si elle était vérifiée, interdirait que des différences, réelles mais imperceptibles, sur plusieurs critères pris séparément, interagissent pour donner une préférence globale. Considérons par exemple la comparaison de triplets $x = (x_1, x_2, x_3)$ de nombres x_i compris entre 0 et 1. On décide de comparer les triplets par la méthode majoritaire suivante : $x \succsim y$ ssi, sur au moins deux critères, $x_i \geq y_i$. Clairement, pour chaque préférence marginale, on a $\succsim_i = \sim_i$, c'est-à-dire que tous les niveaux sont deux à deux indifférents ; en effet, $(x_i, z_{-i}) \sim (y_i, z_{-i})$ quels que soient x_i, y_i et z_{-i}. Pourtant, la relation de préférence $\succsim$ n'est pas réduite à l'indifférence entre toutes les paires de triplets (par exemple, $1 \succsim_i 0$, pour tout $i = 1, 2, 3$, mais $(1, 1, 1) \succ (0, 0, 0)$). Plus généralement, le lecteur consultera sur ce point [GIL 95] ou [PIR 97]). Dans le contexte des relations non nécessairement transitives ou complètes, les préférences marginales ne sont pas en général suffisamment informatives et il faut se tourner vers les traces marginales $\succsim_i^{\pm}$; dans l'exemple, les traces $\succsim_i^{\pm}$ sont, pour chaque dimension i, l'ordre naturel sur les nombres de l'intervalle $[0, 1]$. Les propriétés de monotonie de la préférence $\succsim$ par rapport aux traces marginales ont été décrites dans les lemmes 1 et 5.4.

1.4.4.3. *Unicité de la représentation*

Comme dans le cas du modèle sur les niveaux, les propriétés d'unicité des représentations décrites dans les propositions 11 et 12 sont très faibles. Pour le modèle ($E8$), par exemple, on peut toujours prendre pour $p_i(x_i, y_i)$, une représentation numérique du préordre $\succsim_i^*$ (dans le cas fini ou dénombrable, tout au moins) ce que nous appellerons, comme dans les modèles sur les niveaux, une représentation *régulière*. D'autres choix sont possibles, mais il est nécessaire (et suffisant) que p_i respecte la condition suivante :

$$(x_i, y_i) \succ_i^* (z_i, w_i) \Rightarrow p_i(x_i, y_i) > p_i(z_i, w_i). \tag{1.39}$$

En d'autres termes, la représentation numérique choisie doit être au moins aussi discriminante que la relation $\succ_i^*$. Dans des modèles plus contraints comme ($E7$) ou ($E10$), il est nécessaire d'imposer une condition similaire, relative à $\succ_i^{**}$ au lieu de $\succ_i^*$. Le lecteur se reportera, pour plus de détail, au lemme 5.5 de [BOU 04c].

1.4.5. *Exemples*

De tous les modèles présentés dans l'introduction le seul qui n'utilise pas les traces sur les écarts est le modèle décomposable (1.2) puisque celui-ci agrège séparément les niveaux de chaque alternative. Nous passons brièvement en revue les autres modèles.

Commençons par le modèle de préférences additives non transitives (1.4) dont nous rappelons la forme :

$$x \succsim y \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} p_i(x_i, y_i) \geq 0.$$

Si nous ne postulons aucune propriété particulière des fonctions p_i, nous sommes dans le modèle ($E8$) (équivalent à ($E4$)) ; les fonctions p_i représentent les traces $\succsim_i^*$ qui sont des préordres complets ; la fonction G, qui se ramène à l'addition, est strictement croissante. Supposer des propriétés additionnelles aux fonctions p_i, comme $p_i(x_i, x_i) = 0$ ou l'anti-symétrie, nous mène respectivement aux modèles ($E9$) (équivalent à ($E5$)) et ($E11$). Dans ce dernier modèle, p_i représente, non plus $\succsim_i^*$, mais $\succsim_i^{**}$, qui est un préordre complet (la fonction G est impaire !).

Le modèle de différences additives de Tversky, (1.3), est un cas particulier de ce dernier modèle ; les fonctions p_i s'expriment comme fonctions de la différence algébrique $u_i(x_i) - u_i(y_i)$ de fonctions d'utilité marginales représentant les traces sur les niveaux. Il s'agit donc d'un modèle qui utilise à la fois les traces sur les écarts et sur les niveaux. Ceux-ci seront analysés dans la section suivante.

Si l'on récrit le modèle d'utilité additive, (1.1), sous la forme

$$x \succsim y \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n}(u_i(x_i) - u_i(y_i)) \geq 0,$$

on constate qu'il est un cas particulier du modèle de différences additives dans lequel les fonctions Φ_i sont réduites à l'identité : les différences d'utilités marginales $(u_i(x_i) - u_i(y_i))$ représentent les traces $\succsim_i^{**}$.

Le modèle d'utilité additive différencie finement les écarts de préférence puisqu'à chaque valeur prise par la différence $(u_i(x_i) - u_i(y_i))$ correspond une classe de la relation $\succsim_i^{**}$. Au contraire, les méthodes de surclassement, comme (1.6), détaillent très peu les écarts de préférence. Dans le cas de la méthode majoritaire (1.6), p_i représente $\succsim_i^{*}$ et distingue seulement deux classes d'écarts de préférence, comme l'indique (1.7) : ou bien l'écart (x_i, y_i) est "positif", auquel cas tout le poids du critère i est attribué à cet écart (diminué d'une portion du seuil de majorité), ou bien cet écart est "négatif" et dans ce cas, il n'apporte rien. Notons que (1.7) donne une représentation de la préférence obtenue par la méthode majoritaire dans le modèle ($E8$) alors que ses propriétés permettraient une représentation dans le modèle ($E10$). La relation $\succsim_i^{**}$ comporte trois classes et peut être représentée par la fonction :

$$p_i(x_i, y_i) = \begin{cases} w_i & \text{si} \quad x_i > y_i \\ 0 & \text{si} \quad x_i = y_i \\ -w_i & \text{si} \quad x_i < y_i. \end{cases} \tag{1.40}$$

On définit alors G, par exemple, par :

$$G(p_1, \ldots, p_n) = 1 - \sum_{i:p_i<0} p_i - \lambda \tag{1.41}$$

On obtient bien, avec cette représentation, la même relation que celle définie par (1.6). En effet, supposant les poids normalisés ($\sum w_i = 1$), on voit que G donne, de façon un peu détournée, la somme des poids des critères sur lesquels x_i est supérieur ou égal à y_i diminuée du seuil λ.

Ces constatations élémentaires ouvrent la voie à une caractérisations des méthodes majoritaires comme modèles sur les écarts de type ($E10$), dans lesquels les traces $\succsim_i^{**}$ sur les écarts distinguent au plus trois classes d'écarts (voir [BOU 01, BOU 04b]).

En général les méthodes ELECTRE comportent un élément supplémentaire par rapport aux méthodes majoritaires. Pour décider si x doit être préféré à y (x "surclasse" y), on "pèse" les arguments en faveur de x, ce qui correspond à la méthode majoritaire (1.6) ; si le poids est suffisant, on vérifie encore si aucun "argument fort" ne s'oppose à déclarer x préféré à y. Par "argument fort", on entend un écart (x_i, y_i) "très négatif" en défaveur de x sur un critère i. Si x_i et y_i représentent des évaluations numériques d'alternatives sur le critère i, un "écart très négatif" peut par exemple s'exprimer par le passage d'un seuil ν_i, appelé seuil de veto ; on n'admet pas de dire que x est préféré à y si, sur au moins un critère i,

$$x_i < y_i - \nu_i.$$

On voit que la notion d'écart "très négatif" introduit une troisième classe d'écarts de préférence, celle correspondant à un "veto". La relation $\succsim_i^*$ peut ainsi être représentée par

$$p_i(x_i, y_i) = \begin{cases} w_i & \text{si} \quad x_i \geq y_i \\ 0 & \text{si} \quad y_i - \nu_i \leq x_i < y_i \\ -M & \text{si} \quad x_i < y_i - \nu_i, \end{cases} \tag{1.42}$$

où M est un grand nombre positif. On définit G par

$$G(p_1, \ldots, p_n) = \sum_i p_i - \lambda. \tag{1.43}$$

Il est facile de vérifier que $x \succsim y$ si et seulement si la somme des poids des critères sur lesquels x est au moins aussi bon que y dépasse λ et il n'y a pas de critère sur lequel l'évaluation de x soit inférieure à celle de y de plus du seuil de veto (la valeur de $-M$ est telle qu'elle empêche de jamais atteindre le seuil λ, dès qu'elle est réalisée par un des termes p_i).

Une relation obtenue par la *règle majoritaire avec veto* que nous venons de définir, est représentable dans le modèle ($E10$). Les relations $\succsim_i^*$ distinguent au plus trois classes d'écarts de préférence et les relations $\succsim_i^{**}$, au plus cinq.

Ces exemples montrent que les modèles sur les écarts sont bien adaptés à la description et à la compréhension des méthodes de surclassement. Nous reviendrons sur ces modèles à la fin de la section suivante où nous montrerons comment, en général, les relations comparant les écarts peuvent être reliées aux descriptions des alternatives par leurs attributs (ici, nous avons supposé que X_i était un ensemble de nombres avec un ordre naturel qui correspond aux préférences du décideur).

1.5. Modèles utilisant les traces marginales sur les écarts et sur les niveaux

Après avoir étudié dans les sections précédentes les modèles fondés sur les traces marginales sur les niveaux et ceux fondés sur les traces marginales sur les écarts, il est naturel de s'interroger sur les modèles utilisant à la fois les traces sur les niveaux et celles sur les écarts. C'est ce que nous faisons ci-dessous, en exprimant l'amplitude des écarts en fonction des traces sur les niveaux.

Pour la facilité du lecteur, nous rappelons la définition du modèle général ($N0E0$), déjà présenté en section 1.1.1 ; la relation de préférence $\succsim$ y est définie par :

$$x \succsim y \Leftrightarrow H([\varphi_i(u_i(x_i), u_i(y_i))]) \geq 0. \tag{$N0E0$}$$

Ce modèle peut être vu comme un cas particulier du modèle ($E0$) dans lequel on aurait substitué les fonctions $\varphi_i(u_i(x_i), u_i(y_i))$ aux fonctions $p(x_i, y_i)$. On peut également le voir comme une généralisation du modèle de différences additives (1.3) où on aurait remplacé les opérations d'addition et de soustraction par des fonctions tout-à-fait générales.

A chacun des douze modèles ($E0$) à ($E11$) étudiés dans la section 1.3 correspond un modèle dans lequel $p_i(x_i, y_i)$ est remplacé par $\varphi_i(u_i(x_i), u_i(y_i))$, sans autre propriété additionnelle. Ceci définit les modèles ($N0E0$) à ($N0E11$). Ces «nouveaux» modèles n'ont guère d'intérêt car ils sont en réalité tout-à-fait équivalents (dans le cas où l'ensemble des alternatives X n'excède pas la cardinalité des nombres réels) aux modèles correspondants fondés sur les écarts ($E0$) à ($E11$) ; ils en donnent juste une autre représentation numérique. En effet, étant donné une fonction $p_i(x_i, y_i)$ définie sur $X_i \times X_i$, il est toujours possible de la décomposer en passant par une fonction u_i, à valeurs réelles, définie sur X_i. La seule condition que u_i doive vérifier est de séparer les éléments de X_i que distingue la trace marginale $\succsim_i^{\pm}$. Notons que, pour l'instant, nous ne supposons pas la complétude des traces sur les niveaux $\succsim_i^{\pm}$. En d'autres termes, les fonctions u_i doivent vérifier la condition suivante :

$$u_i(x_i) = u_i(y_i) \Rightarrow x_i \sim_i^{\pm} y_i.$$

Pour toute fonction u_i respectant cette exigence de base et étant donné une fonction p_i, on définit sans ambiguïté la fonction φ_i sur le sous-ensemble $u_i(X_i) \times u_i(X_i)$ de $\mathbb{R}^2$ en posant :

$$p_i(x_i, y_i) = \varphi_i(u_i(x_i), u_i(y_i)).$$

Par conséquent, partant d'une représentation quelconque $G([p_i(x_i, y_i)])$ d'une relation $\succsim$ dans un des modèles sur les écarts, on obtient automatiquement une représentation de cette relation dans le modèle correspondant sur les écarts et les niveaux en remplaçant $p_i(x_i, y_i)$ par la fonction $\varphi_i(u_i(x_i), u_i(y_i))$ que nous venons de définir. Notons que la fonction H utilisée est identique à G. Soulignons également encore une fois que ceci n'est possible sans restriction que dans le cas où la cardinalité de X n'excède pas celle des réels et si l'on n'impose aucune propriété particulière à φ_i ; à ce stade, φ_i ne sera donc pas, en général, monotone en ses deux arguments.

Pour rapprocher les fonctions φ_i d'une opération de soustraction, on peut considérer deux variantes de chacun des douze modèles ($N0E0$) à ($N0E11$). Dans la première, on impose que φ_i soit non-décroissante en son premier argument et non-croissante en le second. Ceci conduit aux modèles ($N1E0$) à ($N1E11$). Dans l'autre variante, nous imposons aux fonctions φ_i d'être croissantes en leur premier argument et décroissantes en le second. Cela nous mène à la définition des modèles ($N2E0$) à ($N2E11$).

Nous avons ainsi défini en tout $3 \times 12 = 36$ modèles (voir tableau 1.4) faisant intervenir écarts et niveaux ; les douze premiers, nous l'avons vu, ne présentent pas d'intérêt ; nous étudions les autres dans la suite de cette section après avoir discuté les relations entre les traces sur les écarts et les traces sur les niveaux.

Tableau 1.4. *Modèles fondés sur les traces sur les niveaux et sur les écarts*

$(N0E0)$	$x \succsim y \Leftrightarrow H([\varphi_i(u_i(x_i), u_i(y_i))]) \geq 0$
$(N0E1)$	$(N0E0)$ avec $\varphi_i(u(x_i), u_i(x_i)) = 0$
$(N0E2)$	$(N0E1)$ avec φ_i anti-symétrique
$(N0E3)$	$(N0E2)$ avec H impair
	....
$(N0E4)$	$(N0E0)$ avec H non-décroissante
$(N0E5)$	$(N0E0)$ avec H croissante
	....
$(N0E6)$	$(N0E1)$ avec H non-décroissante
$(N0E7)$	$(N0E1)$ avec H croissante
	....
$(N0E8)$	$(N0E2)$ avec H non-décroissante
$(N0E9)$	$(N0E2)$ avec H croissante
	....
$(N0E10)$	$(N0E3)$ avec H non-décroissante
$(N0E11)$	$(N0E3)$ avec H croissante

Les modèles $(N1Ex)$ correspondent aux modèles $(N0Ex)$ où $\varphi_i(\nearrow, \searrow)$
Les modèles $(N2Ex)$ correspondent aux modèles $(N0Ex)$ où $\varphi_i(\nearrow\nearrow, \searrow\searrow)$

1.5.1. *Rapports entre traces sur les écarts et sur les niveaux*

En se reportant aux définitions 2 et 3 de $\succsim_i^{\pm}$, $\succsim_i^*$ et $\succsim_i^{**}$, on constate que $\succsim_i^{\pm}$ est la trace de $\succsim_i^*$ et de $\succsim_i^{**}$ car

$$x_i \succsim_i^{\pm} y_i \quad \text{ssi} \quad \forall z_i \in X_i,\ (x_i, z_i) \succsim_i^* (y_i, z_i) \qquad \text{et} \quad \forall w_i \in X_i,\ (w_i, x_i) \succsim_i^* (w_i, y_i). \tag{1.44}$$

Ceci, soulignons-le, est vrai sans faire aucune hypothèse sur les traces, en particulier, même si elles ne sont pas complètes.

Dans le cas où $\succsim_i^*$ est un préordre complet (donc lorsque $\succsim$ satisfait les axiomes $AC1_i$ et $AC2_i$), nous pouvons lui appliquer la proposition 9 ; en effet, $\succsim_i^*$ est un préordre complet sur l'ensemble produit $X_i \times X_i$; il admet donc une représentation numérique de la forme

$$(x_i, y_i) \succsim_i^* (z_i, w_i) \quad \text{ssi} \quad \varphi_i(u_i(x_i), u_i(y_i)) \geq \varphi_i(u_i(z_i), u_i(w_i)).$$

Toujours selon la proposition 9, la fonction φ_i peut-être choisie non-décroissante (resp. croissante) en sa première variable et non-croissante (resp. décroissante) en sa seconde variable ssi $\succsim_i^*$ est faiblement séparable (resp. faiblement indépendant). Deux remarques s'imposent. D'abord, comme l'ensemble produit sur lequel $\succsim_i^*$ est définie ne comporte que deux dimensions, "faiblement séparable" est équivalent à "séparable" et "faiblement indépendant", à "indépendant". Ensuite, il nous faut insister sur le fait que c'est $\succsim_i^*$ qui doit être supposé séparable ou indépendant et non $\succsim$. En conséquence, il nous reste à déterminer des conditions sur $\succsim$ qui garantissent la séparabilité ou l'indépendance de $\succsim_i^*$. Des conditions de séparabilité de $\succsim_i^*$ et de $\succsim_i^{**}$ sont consignées dans la proposition suivante. Par contre, et c'est de prime abord un peu étonnant, l'indépendance de $\succsim_i^{**}$ n'est garantie par aucun des modèles, même le plus contraint, à savoir $(N2E11)$: nous nous en expliquerons plus bas.

Proposition 14 *Si X_i est dénombrable et $\succsim$ vérifie $AC123_i$ et $RC1_i$, alors $\succsim_i^*$ est un préordre complet séparable sur X_i^2 et toute représentation numérique $p_i(x_i, y_i)$ de $\succsim_i^*$ se décompose en*

$$p_i(x_i, y_i) = \varphi_i(u_i(x_i), u_i(y_i)), \tag{1.45}$$

avec u_i, une représentation numérique du préordre $\succsim_i^{\pm}$ et φ_i une fonction définie sur $u_i(X_i)^2$, non-décroissante en son premier argument et non-croissante en le second.

Si $\succsim$ satisfait de plus $RC2_i$, on peut dire les mêmes choses de la relation $\succsim_i^{**}$ et de ses représentations numériques.

Preuve. Nous savons que $\succsim$ vérifie $RC1_i$ ssi $\succsim_i^*$ est un préordre complet sur X_i^2. Ce préordre est séparable si, quels que soient x_i, y_i, z_i, w_i dans X_i, on ne peut avoir ni $(x_i, z_i) \succ_i^* (y_i, z_i)$ et $(y_i, w_i) \succ_i^* (x_i, w_i)$ ni $(z_i, x_i) \succ_i^* (z_i, y_i)$ et $(w_i, y_i) \succ_i^* (w_i, x_i)$. Comme $\succsim_i^*$ est une relation complète, la première interdiction équivaut à demander que

$$\left.\begin{array}{r} (x_i, z_i) \succsim_i^* (y_i, z_i) \\ \text{et} \\ (y_i, w_i) \succsim_i^* (x_i, w_i) \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} (y_i, z_i) \succsim_i^* (x_i, z_i) \\ \text{ou} \\ (x_i, w_i) \succsim_i^* (y_i, w_i). \end{array}\right.$$

Nous savons que $\succsim_i^{\pm}$ est la trace de $\succsim_i^*$ sur X_i et comme $\succsim$ vérifie $AC123_i$, $\succsim_i^{\pm}$ est un préordre complet. En conséquence, ou bien $x_i \succsim_i^{\pm} y_i$ ou bien $y_i \succsim_i^{\pm} x_i$. Dans le premier cas, partant de $(y_i, w_i) \succsim_i^* (y_i, w_i)$ et utilisant (1.44), on obtient $(x_i, w_i) \succsim_i^* (y_i, w_i)$. Dans le second cas, partant de $(x_i, z_i) \succsim_i^* (x_i, z_i)$, on obtient $(y_i, w_i) \succsim_i^* (x_i, w_i)$.

La seconde interdiction se traite de façon similaire.

Soient $p_i(x_i, y_i)$ et $u_i(x_i)$ des représentations numériques quelconques respectivement des préordres $\succsim_i^*$ et $\succsim_i^{\pm}$. En utilisant ce qui précède, on vérifie directement que poser

$$\varphi_i(u_i(x_i), u_i(y_i)) = p_i(x_i, y_i)$$

définit bien une fonction φ_i sur $u_i(X_i)^2$ et que cette fonction est non-décroissante en son premier argument et non-croissante en le second.

Pour ce qui est de $\succsim_i^{**}$, les mêmes considérations s'y appliquent pourvu que $\succsim_i^{**}$ soit un préordre complet, ce que garantit $RC2_i$.

$\square$

Considérons à présent le modèle ($N2E11$). On vérifie directement qu'une préférence $\succsim$ représentable dans ce modèle est nécessairement complète et satisfait $TAC12$ et TC. Par conséquent, en utilisant les lemmes 5.3, 5.4 et 10.2, on sait qu'une telle préférence réagit de façon strictement positive tant aux traces sur les niveaux qu'aux traces sur les écarts, c'est-à-dire que si $(y_i, a_{-i}) \succsim (z_i, b_{-i})$, alors

$$\begin{array}{rcl} x_i \succ_i^{\pm} y_i & \Rightarrow & (x_i, a_{-i}) \succ (z_i, b_{-i}) \\ \text{et} \quad (x_i, z_i) \succ_i^{*} (y_i, z_i) & \Rightarrow & (x_i, a_{-i}) \succ (z_i, b_{-i}). \end{array}$$

On ne peut en déduire, pour autant, que $x_i \succ_i^{\pm} y_i \Rightarrow (x_i, w_i) \succ_i^{*} (y_i, w_i)$ pour tout niveau w_i. Il se peut en effet que pour certains niveaux w_i, le fait que x_i soit un niveau plus élevé que y_i ne se manifeste pas dans l'écart (x_i, w_i) comparé à l'écart (y_i, w_i). Pour révéler cette différence, il faut que pour certains niveaux a_{-i}, b_{-i}, on ait $(w_i, b_{-i}) \sim (y_i, a_{-i})$; dans ce cas, par stricte monotonie de $\succsim$ par rapport à $\succsim_i^{**}$, on a $(x_i, a_{-i}) \sim (w_i, b_{-i})$ et Non $[(w_i, b_{-i}) \sim (x_i, a_{-i})]$, d'où $(w_i, y_i) \succ_i^{*} (w_i, x_i)$ et $(x_i, w_i) \succ_i^{**} (y_i, w_i)$.

Or la condition $x_i \succ_i^{\pm} y_i \Rightarrow (x_i, w_i) \succ_i^{*} (y_i, w_i)$ est nécessaire pour l'indépendance de $\succsim_i^{**}$. En effet, $\succsim_i^{**}$ est indépendante ssi pour tout x_i, y_i, z_i, w_i dans X_i, $(x_i, z_i) \succsim_i^{**} (y_i, z_i) \Leftrightarrow (x_i, w_i) \succsim_i^{**} (y_i, w_i)$ et $(z_i, x_i) \succsim_i^{**} (z_i, y_i) \Leftrightarrow (w_i, x_i) \succsim_i^{**} (w_i, y_i)$. Or, $x_i \succsim_i^{\pm} y_i$ entraîne l'existence de niveaux a_{-i} et d'une alternative w tels que $(x_i, a_{-i}) \succsim w$ et Non $[(y_i, a_{-i}) \succsim w]$; d'où il résulte que $(x_i, w_i) \succ_i^{*} (y_i, w_i)$. L'indépendance de $\succsim_i^{**}$ entraîne que pour tout z_i, $(x_i, z_i) \succ_i^{**} (y_i, z_i)$.

Notre incapacité à caractériser l'indépendance de $\succsim_i^{**}$ en terme de la relation $\succsim$ et des axiomes précédemment introduits n'aura, comme nous le verrons, aucune incidence pour la caractérisation de nos modèles ; on ne pourra toutefois garantir l'existence de représentations *régulières* pour le modèle ($N2E11$) (i.e. de représentations où u_i représente $\succsim_i^{\pm}$ et $\varphi_i(u_i(x_i), u_i(y_i))$ représente $\succsim_i^{**}$).

1.5.2. *Etude des modèles ($N1E0$) à ($N1E11$) et ($N2E0$) à ($N2E11$)*

Dans cette section nous faisons l'hypothèse que X est, au plus, infini dénombrable ; les difficultés du cas général, essentiellement techniques, sont traitées dans

Modèles E		Modèles $N0Ex$, $N1Ex$ et $N2Ex$	Conditions
$(E0)$	$\Leftrightarrow$	$(N0E0) \Leftrightarrow (N1E0) \Leftrightarrow (N2E0)$	$\emptyset$
$(E1)$	$\Leftrightarrow$	$(N0E1) \Leftrightarrow (N1E1) \Leftrightarrow (N2E1)$	
$\Updownarrow$		$\Updownarrow$	ind.
$(E2)$	$\Leftrightarrow$	$(N0E2) \Leftrightarrow (N1E2) \Leftrightarrow (N2E2)$	
$(E3)$	$\Leftrightarrow$	$(N0E3) \Leftrightarrow (N1E3) \Leftrightarrow (N2E3)$	cpl., ind.

Tableau 1.5. *Modèles équivalents à* $(E0)$, $(E1)$, $(E2)$ *et* $(E3)$

[BOU 04a]. Nous traitons d'abord du cas où H n'est pas supposé monotone, c'est-à-dire, des modèles $(N1E0)$ à $(N1E3)$ et $(N2E0)$ à $(N2E3)$. On comprend facilement que ces modèles n'apportent rien de plus que les modèles correspondants sur les écarts, à savoir $(E0)$, $(E1)$, qui est équivalent à $(E2)$, et $(E3)$. En effet, la monotonie des fonctions φ_i n'impose aucune contrainte supplémentaire, du fait que la fonction H n'est pas tenue de réagir de façon monotone aux variations des fonctions φ_i. On construit aisément les représentations à partir de celles des modèles sur les écarts, en substituant $\varphi_i(u_i(x_i), u_i(y_i))$ à $p_i(x_i, y_i)$. Les équivalences entre modèles sont consignées dans le tableau 1.5 ; nous y reprenons les équivalences avec les modèles $(N0E0)$, $(N0E1)$, $(N0E2)$ et $(N0E3)$ et leur caractérisation. Dès que la fonction H est supposée monotone, les variations de φ_i sont relayées et des contraintes additionnelles apparaissent, qui se reflètent dans la caractérisation des relations. Le modèle $(N1E4)$ est le premier modèle intéressant ; il est équivalent aux modèles $(N1E8)$, $(N2E4)$ et $(N2E8)$. On vérifie immédiatement qu'une préférence représentable dans le modèle $(N1E4)$ satisfait $AC123$ et ces conditions, jointes à $RC1$, sont nécessaires et suffisantes pour ce modèle. Pour obtenir une représentation d'une relation satisfaisant $RC1$ et $AC123$ dans le modèle $(N1E8)$, il suffit de partir de la représentation dans le modèle $(E8)$ que nous avions construite en 1.37, à savoir

$$G([p_i(x_i, y_i)]) = \begin{cases} + \exp(\sum_{i=1}^n p_i(x_i, y_i)) & \text{si } x \succsim y, \\ - \exp(-\sum_{i=1}^n p_i(x_i, y_i)) & \text{sinon .} \end{cases}$$

où p_i est une représentation numérique de $\succsim_i^*$ pour tout i. Grâce à la proposition 14, on peut décomposer $p_i(x_i, y_i)$, représentation numérique quelconque de $\succsim_i^*$, en $\varphi_i(u_i(x_i), u_i(y_i))$ où u_i représente le préordre $\succsim_i^{\pm}$ et φ_i est non-décroissante en son premier argument et non-croissante en le second. Ceci montre que le modèle $(N1E8)$ n'est pas plus restrictif que $(N1E4)$. On peut montrer qu'au départ de la représentation que nous venons de construire, on peut éventuellement modifier les fonctions φ_i en des fonctions croissante en son premier argument et décroissante en le second et ceci, sans hypothèse supplémentaire sur la relation $\succsim$ (le lecteur intéressé par la technique de cette modification la trouvera détaillée dans [BOU 04a]). Notons que cette fonction modifiée ne sera plus, en général, une représentation numérique de $\succsim_i^*$. Ceci montre que le modèle ($N2E8$) n'est pas plus contraint que ($N1E4$) et établit l'équivalence annoncée des quatre modèles ainsi que leur caractérisation.

Passons au modèle ($N1E5$) et à ses équivalents ($N1E9$), ($N2E5$) et ($N2E9$). Après avoir constaté la nécessité de l'indépendance, en sus de celle de $RC1$ et $AC123$ pour le modèle ($N1E5$), on construit, pour une relation $\succsim$ satisfaisant ces hypothèses, comme dans le paragraphe précédent, une représentation de $\succsim$ dans le modèle ($N1E9$). La seule différence est que $p_i(x_i, y_i)$ n'est pas une représentation quelconque de $\succsim_i^*$: cette représentation satisfait une propriété additionnelle, $p_i(x_i, x_i) = 0$. En utilisant la proposition 14, on décompose *cette* représentation numérique de $\succsim_i^*$, en $\varphi_i(u_i(x_i), u_i(y_i))$ où u_i représente le préordre $\succsim_i^{\pm}$ et φ_i est non-décroissante en son premier argument et non-croissante en le second ; de plus $\varphi_i(u_i(x_i), u_i(x_i)) = 0$. Comme précédemment, on peut altérer $\varphi_i(u_i(x_i), u_i(y_i))$ en une fonction croissante en son premier argument et décroissante en le second, en conservant la propriété additionnelle $\varphi_i(u_i(x_i), u_i(x_i)) = 0$, et on obtient ainsi une représentation de $\succsim$ dans ($N2E9$).

Le modèle ($N1E6$) implique $RC12$ et $AC123$. L'indépendance de $\succsim$ est une conséquence de $RC12$ (comme dans le modèle ($E6$) dont il est une spécialisation. La même procédure utilisée jusqu'ici s'applique encore pour montrer l'équivalence et caractériser les modèles ($N1E6$), ($N1E10$), ($N2E6$) et ($N2E10$). On part de (1.38). La fonction p_i est ici une représentation de $\succsim_i^{**}$; c'est une fonction anti-symétrique. L'anti-symétrie de p_i est transmise à $\varphi_i(u_i(x_i), u_i(y_i))$ grâce à la proposition 14.

Les quatre derniers modèles rompent avec la tradition : ils ne sont pas tous équivalents. On y distingue trois classes : ($N1E7$) et ($N2E7$) sont équivalents ; les deux derniers sont distincts. On arrive sans grande peine à caractériser ces classes. Remarquons que tous ces modèles correspondent à des relations $\succsim$ complètes. ($N1E7$) et ($N2E7$) correspondent exactement aux relations $\succsim$ complètes, satisfaisant $RC12$ et $AC123$. La construction d'une représentation se fait comme précédemment, partant de celle de ($E7$).

Pour une préférence $\succsim$ représentable dans le modèle ($N1E11$), il est clair que TC et AC123 sont nécessaires puisque ($N1E11$) est une spécialisation des modèles ($N1E10$) et ($E11$). Sous ces hypothèses, le procédé de construction utilisé pour le modèle ($N1E7$) conduit à une représentation dans le modèle ($N1E11$).

Finalement, pour le modèle ($N2E11$), TC et $TAC12$ sont nécessaires. La construction d'une représentation débute comme pour le modèle ($N1E7$), puis on déforme la fonction φ_i en une fonction non-décroissante en son premier argument et non-croissante en le secondqui cesse d'être une représentation numérique de $\succsim_i^{**}$.

Le tableau 1.6 reprend l'ensemble des résultats de caractérisation et d'équivalences relatifs aux modèles ($N1E4$) à ($N1E11$) et ($N2E4$) à ($N2E11$).

Modèles $N1Ex$		Modèles $N2Ex$	Conditions
$(N1E4) \Leftrightarrow (N1E8)$	$\Leftrightarrow$	$(N2E4) \Leftrightarrow (N2E8)$	$RC1$, $AC123$
$(N1E5) \Leftrightarrow (N1E9)$	$\Leftrightarrow$	$(N2E5) \Leftrightarrow (N2E9)$	ind., $RC1$, $AC123$
$(N1E6) \Leftrightarrow (N1E10)$	$\Leftrightarrow$	$(N2E6) \Leftrightarrow (N2E10)$	$RC12$, $AC123$
$(N1E7)$	$\Leftrightarrow$	$(N2E7)$	compl., $RC12$, $AC123$
$(N1E11)$			compl., TC, $AC123$
		$(N2E11)$	compl., TC, $TAC12$

Tableau 1.6. *Equivalences et caractérisation des modèles ($N1E4$) à ($N1E11$) et ($N2E4$) à ($N2E11$)*

1.5.3. *Exemples*

Le modèle de différences additives de Tversky (1.3) et le modèle d'utilité additive (1.1) sont tous deux à l'intersection des modèles utilisant les traces sur les niveaux et sur les écarts. Ils vérifient tous deux, comme nous l'avons vu dans les sections 1.3.8 et 1.4.5, les hypothèses des modèles les plus contraints ($N8$) et ($E11$), ce qui les place dans la catégorie ($N1E11$) des modèles combinés sur les niveaux et les écarts.

Le modèle de différences additives peut être vu comme un cas particulier du modèle (1.4) ; les fonctions $p_i(x_i, y_i)$ intervenant dans ce dernier s'y factorisent en des différences algébriques : $p_i(x_i, y_i) = \Phi_i(u_i(x_i) - u_i(y_i))$ où les fonctions u_i représentent les traces marginales $\succsim_i^{\pm}$, égales, dans ce cas, aux préférences marginales $\succsim_i$.

Dans les versions opérationnelles des méthodes de surclassement, les écarts de préférence reçoivent généralement aussi une expression en terme des niveaux. Dans les versions que nous avons présentées (1.6) ou la méthode majoritaire avec veto, (1.42) et (1.43), nous avons postulé que les écarts de préférence s'expriment directement en terme des descriptions des alternatives, c'est-à-dire en fonction des coordonnées des vecteurs x et y. En d'autres termes, on a supposé que $u_i(x_i) = x_i$. Il est facile bien sûr d'adapter les descriptions des modèles pour faire apparaître explicitement le codage des descriptions (les éléments de X_i) en échelles ordonnées ($u_i(X_i)$) : il suffit dans les expressions (1.6), (1.42) et (1.43), notamment, de remplacer x_i et y_i par $u_i(x_i)$ et $u_i(y_i)$, respectivement. Ce faisant, on obtient pour les méthodes de surclassement, des modèles sur les écarts et les niveaux de type ($N1E10$) ou leurs équivalents ($N2E10$). Ce ne sont toutefois pas nécessairement les représentations dans les modèles les plus contraints possibles qui sont les plus commodes, comme on a déjà pu le constater avec les modèles sur les écarts (comparer (1.40) et (1.41) à (1.6)).

1.6. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons décrit une approche générale de description de relations binaires sur un ensemble produit, fondée sur des modèles de mesurage conjoint tolérant l'intransitivité et l'incomplétude. Les outils d'analyse sont simples : nous utilisons différents types de traces marginales induites par la relation. Ils sont relativement puissants : ils permettent une analyse complète d'un bon nombre de modèles, comme nous l'avons montré en nous limitant au cas où X est dénombrable.

Notre projet était de voir jusqu'où il est possible d'aller, en terme de représentation numérique de relations, en n'utilisant qu'un petit nombre de conditions d'annulation et sans imposer de condition de transitivité aux relations ni de propriétés structurelles sur l'ensemble des objets. Comme nous l'avons vu, et c'est plutôt surprenant, on peut aller assez loin dans la description des modèles en restant dans le cadre assez pauvre que nous nous sommes imposés. De plus, les conditions d'annulation que nous utilisons ($RC1$, $RC2$, indépendance, TC, $AC1$, $AC2$, $AC3$, $TAC1$, $TAC2$, $AC4$) sont raisonnablement simples et sont étroitement liées aux conditions utilisées dans les modèles traditionnels de mesurage conjoint.

Le cadre d'analyse ainsi développé et les résultats obtenus sont riches d'applications potentielles ; certaines ont été évoquées dans ce chapitre ; citons en particulier :

– la caractérisation de toutes les relations compatibles avec une relation de dominance obtenue en utilisant les modèles fondés sur les traces sur les niveaux (voir sections 1.3.5 et 1.3.6 et [BOU 04d]) ;

– la caractérisation de relations de préférence qui peuvent être obtenues par le biais d'un "modèle d'aggrégation ordinale" utilisant les traces marginales sur les écarts ; ces modèles peuvent servir à l'analyse des méthodes majoritaires et des relations de surclassement de type ELECTRE, comme nous le suggérons dans la section 1.4.5 (voir [BOU 01, BOU 04b]) ; ces travaux offrent une alternative à l'approche suivie dans [FAR 01, DUB 01, DUB 02a, DUB 03b])

– la caractérisation de modèles "ordinaux" pour la décision dans l'incertain (voir chapitre [**?**]) ; les modèles décrits dans le présent chapitre s'adaptent à la décision dans l'incertain ; il suffit de supposer que les composantes X_i de l'ensemble produit sont des copies d'un même ensemble ; les n composantes décrivant une alternative correspondent aux évaluations de celle-ci dans les différents "états de la Nature" (voir [BOU 00, BOU 03b, BOU 03a]) ; de même que pour l'agrégation ordinale, ces travaux proposent une approche alternative à celle développée dans [DUB 97, FAR 99, DUB 02b, DUB 03a]

– la caractérisation de différentes formes fonctionnelles pour F, G ou H [BOU 02a].

Il est évidemment impossible de développer tous ces points ici. Le lecteur qui nous aura patiemment suivi jusqu'à ce point n'aura guère de peine à imaginer la philosophie générale de ces résultats.

Pour résumer en quelques mots le message principal de ce chapitre, nous dirions :

– que face à une relation non transitive ou non complète, il est indiqué de considérer ses traces et/ou ses traces marginales ;

– que l'usage des techniques de mesurage conjoint n'est pas limité à l'étude des relations transitives et complètes ;

– que, si l'on n'est pas à la recherche de procédures d'élicitation efficaces, remplacer l'hypothèse d'additivité par de simples exigences de décomposabilité permet souvent de saisir de façon très simple l'essentiel d'un modèle ;

– que remplacer l'additivité par une hypothèse de décomposabilité revient à utiliser des modèles qui sont intimement liés à la modélisation des préférences sur base de règles [GRE 99, GRE 01, GRE 02]. De cette façon, il peut être envisagé de construire des procédures d'élicitation utilisant une machinerie d'induction de règles issue de l'intelligence artificielle.

Le cadre général et les résultats exposés contribuent aussi à la théorie générale du mesurage conjoint. Ils nous permettent d'esquisser un tableau général des modèles de mesurage conjoint (voir la figure 1.1) ; les modèles y sont classés selon :

– qu'ils utilisent les traces sur les écarts, auquel cas leur forme fonctionnelle peut être écrite de façon à être non-décroissante en les fonctions $p_i(x_i, y_i)$,

– ou qu'ils utilisent les traces sur les niveaux, auquel cas leur forme fonctionnelle peut être écrite de façon à être non-décroissante en les fonctions $u_i(x_i)$ and non-croissante en les fonctions $u_i(y_i)$,

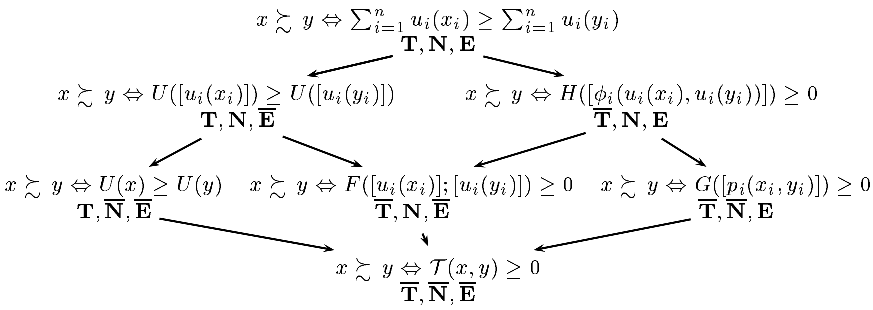
– ou encore qu'il sont transitifs.

Dans la figure 1.1, $\mathbf{T}$ dénote un modèle transitif, $\mathbf{N}$ un modèle qui possède des traces marginales sur les niveaux complètes et $\mathbf{E}$ un modèle qui possède des traces complètes sur les écarts.

Dans la famille $\mathbf{N}$ toutes les relations sont faiblement séparables, mais peuvent ne pas être faiblement indépendantes (ni, à plus forte raison, indépendantes). Au contraire, la famille $\mathbf{E}$ ne comprend que des relations indépendantes, dès qu'est invoqué l'axiome $RC2$. Les relations de préférence marginales tendent à jouir de bonnes propriétés dans la famille $\mathbf{N}$: elles sont complètes et le plus souvent des semi-ordres (dès que les axiomes $AC3$ et soit $AC1$ ou $AC2$ sont d'application). Il n'en va pas de même dans la famille $\mathbf{E}$.

Notons que toutes les combinaisons de $\mathbf{T}$, $\mathbf{N}$ et $\mathbf{E}$ ont été étudiées dans la littérature, à l'exception de la combinaison $\mathbf{T}, \overline{\mathbf{L}}, \mathbf{D}$. Il n'y a là rien d'étonnant vu que lorsque $\mathbf{E}$ s'applique, la plupart des modèles font également appel à $RC2$ et sont donc indépendants. Quand ces propriétés se combinent à la transitivité et à la complétude de $\succsim$, $\succsim_i$ est un préordre complet qui se confond avec $\succsim_i^{\pm}$. Par conséquent, de tels modèles ont nécessairement des traces complètes sur les niveaux.

Figure 1.1. *Résumé des modèles*



$\mathbf{T}$ signifie "transitive"
$\mathbf{N}$ signifie "utilise les traces sur les niveaux"
$\mathbf{E}$ signifie "utilise les traces sur les écarts"
$\overline{x}$ signifie "Non x"

1.7. Bibliographie

[ATK 70] ATKINSON A. B., « On the measurement of inequality », *Journal of Economic Theory*, vol. 2, 1970.

[BEL 01] BELTON V., STEWART T., *Multiple criteria decision analysis : an integrated approach*, Kluwer, Dordrecht, 2001.

[BEN 94] BEN-PORATH E., GILBOA I., « Linear measures, the Gini index and the income-equality tradeoff », *Journal of Economic Theory*, vol. 64, p. 443–467, 1994.

[BEN 97] BEN-PORATH E., GILBOA I., SCHMEIDLER D., « On the measurement of inequality under uncertainty », *Journal of Economic Theory*, vol. 75, p. 194–204, 1997.

[BLA 78] BLACKORBY C., PRIMONT D., RUSSELL R., *Duality, separability, and functional structure : theory and economic applications*, North-Holland, New-York, 1978.

[BOU 86] BOUYSSOU D., « Some remarks on the notion of compensation in MCDM », *European Journal of Operational Research*, vol. 26, p. 150–160, 1986.

[BOU 97] BOUYSSOU D., PIRLOT M., VINCKE PH., « A general model of preference aggregation », KARWAN M.H., SPRONK J., WALLENIUS J., Eds., *Essays in decision making*, Berlin, Springer Verlag, p. 120–134, 1997.

[BOU 99] BOUYSSOU D., PIRLOT M., « Conjoint Measurement without Additivity and Transitivity », MESKENS N., ROUBENS M., Eds., *Advances in Decision Analysis*, Dordrecht, Kluwer, p. 13–29, 1999.

[BOU 00] BOUYSSOU D., PERNY P., PIRLOT M., Nontransitive decomposable conjoint measurement as a general framework for MCDM and decision under uncertainty, Communication à EURO XVII, Budapest, Hungary, 16–19 July, 2000.

[BOU 01] BOUYSSOU D., PIRLOT M., « A characterisation of strict concordance relations », BOUYSSOU D., JACQUET-LAGRÈZE E., PERNY P., SŁOWIŃSKI R., VANDERPOOTEN D., VINCKE PH.., Eds., *Aiding decisions with multiple criteria : essays in honour of Bernard Roy*, Dordrecht, Kluwer, p. 121–145, 2001.

[BOU 02a] BOUYSSOU D., GRECO S., MATARAZZO B., PIRLOT M., SŁOWIŃSKI R., Characterization of 'max', 'min' and 'order statistics' multicriteria aggregation functions, Communication à *IFORS'2002*, 8 – 12 July, 2002, Edinburgh, U.K., July 2002.

[BOU 02b] BOUYSSOU D., PIRLOT M., « Nontransitive decomposable conjoint measurement », *Journal of Mathematical Psychology*, vol. 46, p. 677–703, 2002.

[BOU 02c] BOUYSSOU D., PIRLOT M., Ordinal aggregation and strict preferences for multiattributed alternatives, Working Paper, LAMSADE, Université Paris-Dauphine,, 2002.

[BOU 03a] BOUYSSOU D., PIRLOT M., « A note on Wakker's cardinal coordinate independence », *Mathematical Social Sciences*, vol. 48, p. 11–22, 2003.

[BOU 03b] BOUYSSOU D., PIRLOT M., On some ordinal models for decision making under uncertainty, Working Paper, LAMSADE, Université Paris-Dauphine, 2003.

[BOU 04a] BOUYSSOU D., PIRLOT M., « 'Additive difference' models without additivity and subtractivity », *Journal of Mathematical Psychology*, vol. 48, p. 263–291, 2004.

[BOU 04b] BOUYSSOU D., PIRLOT M., A characterization of concordance relations, à paraître dans *European Journal of Operational Research*, 2004.

[BOU 04c] BOUYSSOU D., PIRLOT M., Following the traces. An introduction to conjoint measurement without transitivity and additivity, à paraître dans *European Journal of Operational Research*, 2004.

[BOU 04d] BOUYSSOU D., PIRLOT M., « Preferences for multi-attributed alternatives : traces, dominance and numerical representations », *Journal of Mathematical Psychology*, vol. 48, n°3, p. 167–185, 2004.

[CAN 95] CANTOR G., « Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre I », *Mathematische Annalen*, vol. 46, p. 481–512, 1895.

[DEB 59] DEBREU G., *Theory of value : an axiomatic analysis of economic equilibrium*, Wiley, New York, 1959.

[DEB 60] DEBREU G., « Topological methods in cardinal utility theory », ARROW K.J., KARLIN S., SUPPES P., Eds., *Mathematical methods in the Social Sciences*, p. 16–26, Stanford University Press, Stanford, 1960.

[DUB 97] DUBOIS D., FARGIER H., PRADE H., « Decision-making under ordinal preferences and uncertainty », GEIGER D., SHENOY P. P., Eds., *Proceedings of the 13th conference on* *uncertainty in artificial intelligence*, Morgan Kaufmann, Los Altos, p. 157–164, 1997.

[DUB 01] DUBOIS D., FARGIER H., PERNY P., PRADE H., « Towards a qualitative multicriteria decision theory », *Proceedings of the EUROFUSE Workshop on Preference Modelling and Applications*, Granada, Spain, April 25–27, 2001, p. 121–129, 2001.

[DUB 02a] DUBOIS D., FARGIER H., PERNY P., « On the limitation of ordinal approaches to decision making », FENSEL D., GUINCHIGLIA F., WILLIAMS M.-A., MCGUINNESS D., Eds., *Knowledge Representation 2002 — Proceedings of the 8th International Conference (KR'02)*, San Francisco, CA, Morgan Kaufmann, p. 133–144, 2002.

[DUB 02b] DUBOIS D., FARGIER H., PRADE H., PERNY P., « Qualitative decision theory : from Savage's axioms to nonmonotonic reasoning », *Journal of the ACM*, vol. 49, n° 4, p. 455–495, 2002.

[DUB 03a] DUBOIS D., FARGIER H., PERNY P., « Qualitative decision theory with preference relations and comparative uncertainty : an axiomatic approach », *Artificial Intelligence*, vol. 148, p. 219–260, 2003.

[DUB 03b] DUBOIS D., FARGIER H., PERNY P., PRADE H., « A characterization of generalized concordance rules in multicriteria decision-making », *International Journal of Intelligent Systems*, vol. 18, n° 7, p. 751–774, 2003.

[FAR 99] FARGIER H., PERNY P., « Qualitative decision models under uncertainty without the commensurability assumption », LASKEY K. B., PRADE H., Eds., *Proceedings of Uncertainty in Artificial Intelligence*, Morgan Kaufmann Publishers, p. 188–195, 1999.

[FAR 01] FARGIER H., PERNY P., « Modélisation des préférences par une règle de concordance généralisée », COLORNI A., PARUCCINI M., ROY B., Eds., A-MCD-A, *Aide Multicritère à la Décision / Multiple Criteria Decision Aid*, p. 99–115, European Commission, Joint Research Centre, 2001.

[FIS 88] FISHBURN P.C., *Nonlinear preference and utility theory*, Johns Hopkins University Press, Baltimore, 1988.

[FIS 90a] FISHBURN P.C., « Additive non-transitive preferences », *Economic Letters*, vol. 34, p. 317–321, 1990.

[FIS 90b] FISHBURN P.C., « Continuous nontransitive additive conjoint measurement », *Mathematical Social Sciences*, vol. 20, p. 165–193, 1990.

[FIS 91] FISHBURN P.C., « Nontransitive additive conjoint measurement », *Journal of Mathematical Psychology*, vol. 35, p. 1–40, 1991.

[FIS 92] FISHBURN P.C., « On nonstandard nontransitive additive utility », *Journal of Economic Theory*, vol. 56, p. 426–433, 1992.

[FIS 96] FISHBURN P.C., « Finite linear qualitative probability », *Journal of Mathematical Psychology*, vol. 40, p. 21–31, 1996.

[FIS 97] FISHBURN P.C., « Cancellation conditions for multiattribute preferences on finite sets », KARWAN M.H., SPRONK J., WALLENIUS J., Eds., *Essays in decision making*, Berlin, Springer Verlag, p. 157–167, 1997.

[FRE 93] FRENCH S., *Decision theory – An introduction to the mathematics of rationality*, Ellis Horwood, London, 1993.

[GIL 95] GILBOA I., LAPSON R., « Aggregation of semiorders : intransitive indifference makes a difference », *Economic Theory*, vol. 5, p. 109–126, 1995.

[GOL 91] GOLDSTEIN W.M., « Decomposable threshold models », *Journal of Mathematical Psychology*, vol. 35, p. 64–79, 1991.

[GON 96] GONZALES CH., « Additive utilities when some components are solvable and others not », *Journal of Mathematical Psychology*, vol. 40, p. 141–151, 1996.

[GON 00] GONZALES CH., « Two factor additive conjoint measurement with one solvable component », *Journal of Mathematical Psychology*, vol. 44, p. 285–309, 2000.

[GRE 99] GRECO S., MATARAZZO B., SŁOWIŃSKI R., « The use of rough sets and fuzzy sets in MCDM », GAL T., HANNE T., STEWART T., Eds., *Multicriteria decision making, Advances in* MCDM *models, algorithms, theory and applications*, Kluwer, p. 14.1–14.59, 1999.

[GRE 01] GRECO S., MATARAZZO B., SŁOWIŃSKI R., « Rough sets theory for multicriteria decision analysis », *European Journal of Operational Research*, vol. 129, n° 1, p. 1-47, 2001.

[GRE 02] GRECO S., MATARAZZO B., SŁOWIŃSKI R., « Preference representation by means of conjoint measurement and decision rule model », BOUYSSOU D., JACQUET-LAGRÈZE E., PERNY P., VANDERPOOTEN D., VINCKE PH., Eds., *Aiding decisions with multiple criteria : essays in honour of Bernard Roy*, p. 263–313, Kluwer, Dordrecht, 2002.

[GUL 92] GUL F., « Savage's theorem with a finite number of states », *Journal of Economic Theory*, vol. 57, p. 99–110, 1992.

[JAF 74] JAFFRAY J.-Y., « On the extension of additive utilities to infinite sets », *Journal of Mathematical Psychology*, vol. 11, p. 431–452, 1974.

[KAR 98] KARNI E., SAFRA Z., « The hexagon condition and additive representation for two dimensions : an algebraic approach », *Journal of Mathematical Psychology*, vol. 42, p. 393–399, 1998.

[KEE 76] KEENEY R.L., RAIFFA H., *Decisions with multiple objectives : preferences and value tradeoffs*, Wiley, New-York, 1976.

[KOO 60] KOOPMANS T. C., « Stationary ordinal utility and impatience », *Econometrica*, vol. 28, p. 287–309, 1960.

[KOO 72] KOOPMANS T. C., « Representation of preference orderings over time », MCGUIRE C. B., RADNER R., Eds., *Decision and Organization*, p. 57–100, North-Holland, Amsterdam, 1972.

[KRA 71] KRANTZ D.H., LUCE R.D., SUPPES P., TVERSKY A., *Foundations of measurement*, vol. 1 : *Additive and polynomial representations*, Academic Press, New-York, 1971.

[LUC 56] LUCE R.D., « Semi-orders and a theory of utility discrimination », *Econometrica*, vol. 24, p. 178–191, 1956.

[MAY 54] MAY K.O., « Intransitivity, utility and the aggregation of preference patterns », *Econometrica*, vol. 22, p. 1–13, 1954.

[PIR 97] PIRLOT M., VINCKE PH., *Semiorders. properties, representations, applications*, Kluwer, Dordrecht, 1997.

[POM 00] POMEROL J.-C., BARBA-ROMERO S., *Multicriterion decision in management, principles and practice*, Kluwer, Dordrecht, 2000.

[ROY 68] ROY B., « Classement et choix en présence de points de vue multiples (la méthode ELECTRE) », *Revue française d'informatique et de recherche opérationnelle*, vol. 8, p. 57-75, 1968.

[ROY 73] ROY B., BERTIER P., « La méthode ELECTRE II : une application au media-planning », ROSS M., Ed., *OR'72*, p. 291–302, North Holland, Amsterdam, 1973.

[ROY 85] ROY B., *Méthodologie multicritère d'aide à la décision*, Economica, Paris, 1985.

[ROY 91] ROY B., « The outranking approach and the foundations of ELECTRE methods », *Theory and Decision*, vol. 31, p. 49–73, 1991.

[ROY 93] ROY B., BOUYSSOU D., *Aide multicritère à la décision : méthodes et cas*, Economica, Paris, 1993.

[SCO 64] SCOTT D., « Measurement structures and linear inequalities », *Journal of Mathematical Psychology*, vol. 1, p. 233–247, 1964.

[SEN 86] SEN A.K., « Social choice theory », ARROW K.J., INTRILIGATOR M.D., Eds., *Handbook of mathematical economics*, vol. 3, p. 1073–1181, North-Holland, Amsterdam, 1986.

[SHA 79] SHAPIRO L., « Conditions for expected uility maximization », *Annals of Statistics*, vol. 7, p. 1288–1302, 1979.

[TVE 69] TVERSKY A., « Intransitivity of preferences », *Psychological Review*, vol. 76, p. 31–48, 1969.

[VIN 89] VINCKE PH., *L'aide multicritère à la décision*, Éditions de l'Université de Bruxelles-Éditions Ellipses, Bruxelles, 1989, Version anglaise *Multi-criteria decision aid*, Wiley, New York, 1992.

[VIN 91] VIND K., « Independent preferences », *Journal of Mathematical Economics*, vol. 20, p. 119–135, 1991.

[WAK 84] WAKKER P. P., « Cardinal coordinate independence for expected utility », *Journal of Mathematical Psychology*, vol. 28, n° 1, p. 110–117, 1984.

[WAK 88] WAKKER P.P., « Derived strength of preference relations on coordinates », *Economic Letters*, vol. 28, p. 301–306, 1988.

[WAK 89] WAKKER P.P., *Additive representations of preferences : a new foundation of decision analysis*, Kluwer, Dordrecht, 1989.

[WIN 86] VON WINTERFELDT D., EDWARDS W., *Decision analysis and behavioral research*, Cambridge University Press, Cambridge, 1986.