Théorie du choix social et aide multicritère à la décision

D. Bouyssou [1] CNRS

Th. Marchant [2] Universiteit Gent

P. Perny [3] LIP6

mai 2002 – révision 13 octobre 2005

[1] LAMSADE, Université Paris Dauphine, Place du Maréchal de Lattre de Tassigny, F-75775 Paris Cedex 16, France, tel : +33 1 44 05 48 98, fax : +33 1 44 05 40 91, e-mail : bouyssou@lamsade.dauphine.fr.

[2] Universiteit Gent, H. Dunantlaan 1, B-9000 Gent, Belgique, tel : +32 9-264.63.73, fax : +32 9-264.64.87, e-mail : Thierry.Marchant@rug.ac.be.

[3] LIP6 – Université Pierre et Marie Curie, 8 rue du Capitaine Scott 75015 Paris, FRANCE, tel : + 33 1 44 27 70 04, fax : + 33 1 44 27 70 00 e-mail : Patrice.Perny@lip6.fr.

Résumé

L'objet de cet article est de présenter de manière simple quelques résultats importants en théorie de choix social et de discuter leur impact pour l'aide multicritère à la décision.

En nous appuyant sur des exemples classiques issus de problèmes de vote (section 2) nous montrerons quelques difficultés fondamentales liées à l'agrégation des préférences. Nous présenterons ensuite quelques résultats théoriques permettant de mieux comprendre la nature et l'ampleur de ces difficultés (section 3). Nous tenterons ensuite d'analyser les conséquences de ces résultats pour l'aide multicritère à la décision (section 4). Une abondante liste de références permettra au lecteur d'approfondir ces questions.

Mots-clés : Agrégation, Analyse multicritère, Théorie du choix social, Élections

1 Introduction

La complexité et l'importance des problèmes de gestion rencontrés dans de nombreuses organisations conduisent parfois à rechercher une « préparation scientifique » des décisions, ce que l'on appelle une *aide à la décision*. L'homme d'étude chargé d'une telle préparation est, en pratique, confronté à des tâches nombreuses et variées : identification des acteurs concernés, formulation du problème, élaboration d'une liste d'actions possibles, définition d'un ou plusieurs critères d'évaluation de ces actions, collecte d'informations, analyses de sensibilité, élaboration d'une recommandation, par exemple, sous la forme d'une sélection des « bonnes » actions ou d'un classement de celles-ci, etc. Son travail est souvent compliqué du fait de la volonté ou de la nécessité de prendre en compte des points de vue ou des critères conflictuels pour évaluer les actions mises en évidence ; on parle alors d'*aide multicritère à la décision* (voir Pomerol et Barba-Romero, 1993 ; Vincke, 1989 ; Roy, 1985). Se pose alors le problème de l'*agrégation des préférences* consistant à tenter de synthétiser les préférences partielles modélisées par chaque critère en un tout cohérent, une préférence globale, pouvant servir de base à l'élaboration d'une recommandation.

Un problème d'agrégation très voisin a été depuis longtemps abordé dans le cadre de la *théorie des élections*. Il consiste en la recherche d'un mécanisme (on parlera dans la suite de *système électoral* ou de *méthode d'agrégation*) permettant d'agréger de manière « raisonnable » les avis exprimés lors d'une élection par plusieurs votants concernant divers candidats de façon à déterminer un vainqueur (le candidat élu) ou encore à classer par ordre de préférence les divers candidats. Si ce problème a une origine fort ancienne, il est d'usage de faire remonter son analyse moderne aux travaux de Borda (1781) et de Condorcet (1785). La variété des systèmes électoraux utilisés dans le monde montre qu'il est toujours d'actualité. Au cours des années 1950, les travaux de Arrow (1963), Black (1958) et May (1952) sur cette question ont suscité une immense littérature (voir Kelly, 1991) constituant ce que l'on appelle aujourd'hui la *théorie du choix social*. Son objet est d'étudier les liens devant ou pouvant exister entre les *préférences individuelles* des membres d'un groupe social et les décisions prises par ce groupe, décisions reflétant la *préférence collective* du groupe.

Les nombreux résultats obtenus en théorie du choix social sont riches d'enseignements pour l'aide multicritère à la décision. On se convaincra aisément des liens entre ces deux domaines en notant qu'il est aisé de passer de l'un à l'autre en remplaçant respectivement les mots « action », « critère », « préférence partielle » et « préférence globale » par « candidat », « votant », « préférence individuelle » et « préférence collective » dans ce qui précède (voir Arrow et Raynaud, 1986).

L'objet de cet article est de présenter de manière simple quelques résultats importants en théorie du choix social et de discuter leur impact pour l'aide multicritère à la décision.

En nous appuyant sur des exemples classiques issus de problèmes de vote (section 2) nous montrerons quelques difficultés fondamentales liées à l'agrégation des préférences. Nous présenterons ensuite quelques résultats théoriques permettant de mieux comprendre la nature et l'ampleur de ces difficultés (section 3). Nous tenterons ensuite d'analyser les conséquences de ces résultats pour l'aide multicritère à la décision (section 4). Une abondante liste de références permettra au lecteur d'approfondir ces questions.

2 Exemples introductifs

Les choix effectués par un groupe social affectent, en général, l'ensemble des individus qui le composent. Dès lors, il semble naturel de chercher à fonder ces choix sur les préférences de ces individus. Le choix d'un candidat (loi, projet, état social, etc.) dépend alors du résultat d'une élection permettant aux individus (on dira les *votants*) d'exprimer leurs préférences. Un système électoral (ou méthode d'agrégation) permet de tirer parti de l'information recueillie lors du scrutin pour déterminer le candidat élu ou, plus généralement, la décision prise au niveau du groupe. Comment, dans ces conditions, concevoir un « bon » système électoral ? Le « bon sens » nous incite à penser qu'un tel système doit être *démocratique*, c'est-à-dire permettre de refléter le plus fidèlement possible les préférences individuelles au niveau du groupe. Dans de nombreux pays (collectivités, groupes, comités), la traduction de cet idéal démocratique s'opère en faisant appel à une version ou à une autre d'une méthode de type « majoritaire » : un candidat a doit l'emporter sur un candidat b si une majorité de votants préfèrent a à b. Cette règle simple est très naturelle. Comme on le verra plus bas, elle ne soulève que peu de difficultés dans une situation ne faisant intervenir que deux candidats (voir May, 1952). On peut l'adapter de bien des façons pour faire face à des situations faisant intervenir au moins trois candidats. Ces adaptations peuvent donner lieu à des phénomènes surprenants. Cette section vise à en donner quelques exemples. On considérera tout d'abord le cas des systèmes dit *uninominaux* dans lesquels voter consiste uniquement à désigner le nom d'un candidat (section 2.1) avant d'aborder celui de systèmes où le vote peut prendre des formes plus complexes (section 2.2).

Dans tous les exemples qui suivent on supposera que chaque votant est en mesure de classer — avec d'éventuels ex æquo — l'ensemble des candidats par ordre de préférence ; on parle alors de préordre complet. On écrira dans cette section $a \succ b \succ c$ pour signifier qu'un votant préfère le candidat a au candidat b qui est lui-même préféré au candidat c (le candidat a étant dès lors préféré au candidat c). Sauf exception, on supposera de plus que les votants sont sincères, c'est-à-dire utilisent les possibilités offertes par le système électoral pour révéler leurs « vraies » préférences. Notons enfin que la plupart des exemples que nous présenterons sont classiques. On en trouvera de nombreux autres ainsi que la description et l'analyse de multiples méthodes dans Moulin (1980, 1988), Dummet (1984), Fishburn (1977) et Nurmi (1987). Une vue d'ensemble en français de ces questions est aussi proposée par Hudry (2003).

2.1 Systèmes uninominaux

Exemple 1 (Dictature de la majorité)
Soit $\{a, b, c, \ldots, z\}$ l'ensemble des 26 candidats à une élection pour laquelle il y a 100 votants dont les préférences sont les suivantes :

51	votants ont les préférences	$a \succ b \succ c \succ \ldots \succ y \succ z$,
49	votants ont les préférences	$z \succ b \succ c \succ \ldots \succ y \succ a$.

Quel que soit le système électoral uninominal envisagé, il est clair, sous l'hypothèse de sincérité des votants, que le candidat a recevra 51 voix contre 49 au candidat z ; les autres candidats ne reçoivent aucune voix. Le candidat a est alors élu à la majorité absolue. On peut s'interroger ici sur la pertinence du résultat dans la mesure où le candidat élu est particulièrement mal perçu par une proportion importante de votants alors que le candidat b semble bien perçu par l'ensemble du groupe et pourrait constituer un « bon compromis ». Un système majoritaire ainsi conçu laisse place à une possible « dictature de la majorité » et ne favorise pas nécessairement l'émergence de compromis. Il peut y avoir là un argument décisif pour adopter des systèmes électoraux où l'on demande aux votants de révéler une information plus riche que le seul nom du candidat qu'ils préfèrent. On en verra des exemples à la section 2.2. $\diamond$

La reconnaissance de l'existence d'une possible dictature de la majorité remonte à l'apparition de l'idée démocratique dans la Grèce antique. Bien d'autres phénomènes troublants peuvent cependant se produire avec des systèmes électoraux uninominaux de type majoritaire. Nous en donnons ici quelques exemples.

Exemple 2 (Respect de la majorité dans le système britannique)
Le système électoral en vigueur au Royaume Uni consiste en un vote uninominal à un tour (« plurality voting ») : est élu le candidat recevant le plus

de suffrages à l'issue de l'unique tour de scrutin. Soit $\{a, b, c\}$ l'ensemble des candidats lors d'une élection comprenant 21 votants (rien n'empêche de multiplier ce chiffre par 10^6 si l'on souhaite davantage de réalisme) dont les préférences sont les suivantes :

$$\begin{array}{rll} 10 & \text{votants ont les préférences} & a \succ b \succ c, \\ 6 & \text{votants ont les préférences} & b \succ c \succ a, \\ 5 & \text{votants ont les préférences} & c \succ b \succ a. \end{array}$$

En supposant les votants sincères, l'issue du scrutin est facilement prévisible : le candidat a recevra 10 voix contre respectivement 6 et 5 aux candidats b et c. La candidat a est donc élu avec 10 voix sur 21. Il semble néanmoins qu'un tel résultat ne reflète que très imparfaitement les vœux de la majorité des électeurs. On notera en effet qu'une majorité absolue de votants préfère tous les autres candidats à celui qui est élu (11 votants sur 21 préfèrent b et c à a) ! $\diamond$

Observons ce que donne sur cet exemple le scrutin uninominal à deux tours (« plurality with runoff ») tel qu'il est pratiqué en France (on supposera qu'au second tour, seuls les deux candidats ayant reçu le plus de suffrages au premier tour restent en lice). Au premier tour a et b arrivent en tête avec respectivement 10 et 6 voix. En supposant que l'élimination du candidat c n'affecte pas les préférences des votants concernant les candidats qui se maintiennent au second tour, on obtient alors la situation suivante :

$$\begin{array}{rll} 10 & \text{votants ont les préférences} & a \succ b, \\ 11 & \text{votants ont les préférences} & b \succ a. \end{array}$$

Le candidat b emporte alors l'élection avec 11 voix sur 21. On constatera aisément ici qu'aucun des deux candidats battus (a et c) n'est préféré à b par une majorité absolue d'électeurs. On ne peut toutefois pas tirer de cet exemple de conclusion générale en faveur du système français comme le montre l'exemple suivant.

Exemple 3 (Respect de la « majorité » dans le système français)
Soit $\{a, b, c, d\}$ l'ensemble des candidats à une élection pour laquelle il y a 21 votants dont les préférences sont les suivantes :

$$\begin{array}{rll} 10 & \text{votants ont les préférences} & b \succ a \succ c \succ d, \\ 6 & \text{votants ont les préférences} & c \succ a \succ d \succ b, \\ 5 & \text{votants ont les préférences} & a \succ d \succ b \succ c. \end{array}$$

Avec le système français, seuls les candidats b et c restent en lice au second tour et b l'emporte confortablement avec 15 voix sur 21 bien qu'une majorité absolue (11/21) de votants lui préfère à la fois le candidat a et le candidat d (nous laissons le soin au lecteur familier de la vie politique française la tâche, aisée, de mettre des noms à nos quatre candidats et d'imaginer une situation politique où les préférences présentées sont plausibles). ◇

Les deux exemples précédents montrent donc qu'un scrutin à un ou deux tours fondé sur un principe majoritaire peut donc amener à l'élection d'un candidat alors qu'une majorité absolue de votants en préfère un ou plusieurs autres. Dans ces conditions, il peut être légitime de s'interroger sur l'hypothèse de sincérité des votants puisque ceux-ci réaliseront bien vite la possibilité d'occurrence de tels phénomènes. C'est l'idée du « vote utile ».

Exemple 4 (Vote utile et sincérité des votants)
Reprenons les données de l'exemple 3 et supposons que les 6 votants dont les préférences sont $c \succ a \succ d \succ b$ choisissent de ne pas être sincères et de se comporter comme si leurs préférences étaient $a \succ c \succ d \succ b$, ce qui traduit un « vote utile » au premier tour en faveur du candidat a. Il est clair qu'alors le candidat a est élu dès le premier tour de scrutin en recevant une majorité absolue de suffrages (11/21). On a vu à l'exemple précédent que si ces 6 votants avaient été sincères, le candidat b aurait été élu. En ne révélant pas leurs vraies préférences, ces 6 votants parviennent à faire élire le candidat a, ce qui leur est favorable puisqu'ils préfèrent a à b. On voit donc qu'un tel système peut ne pas inciter les votants à révéler leurs « vraies préférences ». La méthode est dite **manipulable**. Une telle possibilité conduit à ne plus voir dans les élections un mécanisme de révélation des opinions du corps électoral et à donner une « prime à l'astuce », ce qui peut paraître éloigné d'un certain idéal démocratique. ◇

Le système de vote français laisse place à d'autres phénomènes troublants comme le montrent les trois exemples suivants.

Exemple 5 (Problèmes de monotonie dans le système français)
Soit $\{a, b, c\}$ l'ensemble des candidats à une élection pour laquelle il y a 17 votants. Suite à une enquête d'opinion publiée avant les élections, le candidat a conjecture que les préférences des votants sont les suivantes :

$$\begin{array}{lll} 6 & \text{votants ont les préférences} & a \succ b \succ c, \\ 5 & \text{votants ont les préférences} & c \succ a \succ b, \\ 4 & \text{votants ont les préférences} & b \succ c \succ a, \\ 2 & \text{votants ont les préférences} & b \succ a \succ c. \end{array}$$

Avec le système français seuls les candidats a et b devraient passer le premier tour et a devrait gagner l'élection au second tour avec 11 voix sur 17. Ne trouvant pas cette prévision suffisamment confortable, le candidat a décide de lancer une campagne électorale active visant à séduire l'électorat de son plus proche concurrent, le candidat b. Supposons que l'enquête ait révélé de manière exacte la totalité des préférences des votants et que la campagne électorale ait l'effet recherché sur les deux derniers votants pour lesquels a est passé devant b (les préférences des autres votants restent inchangées). On obtient alors les préférences suivantes :

8	votants ont les préférences	$a \succ b \succ c$,
5	votants ont les préférences	$c \succ a \succ b$,
4	votants ont les préférences	$b \succ c \succ a$.

Après le premier tour, on peut observer que b est effectivement victime de la campagne menée par a puisque ce sont a et c qui restent en lice. Cependant, à cette première victime vient s'ajouter une seconde beaucoup plus inattendue. En effet, au second tour a perd l'élection devant c qui obtient 9 voix sur 17.

Avec le système français et dans cette configuration particulière, on peut donc dire que la bonne campagne électorale de a lui a été fatale. On dit que la méthode est **non monotone** dans la mesure où l'amélioration de la position d'un candidat dans les préférences individuelles peut se traduire par une dégradation de sa situation à l'issue du scrutin. Avec une telle méthode, les possibilités de manipulations mises à jour à l'exemple 4 n'en deviennent que plus nombreuses : il est clair que l'on peut avoir intérêt à ne pas voter pour le candidat que l'on préfère. Notons d'ailleurs que le système français autorise parfois des « manipulations » très simples comme le fait de ne pas exprimer ses préférences ainsi que le montre l'exemple suivant. $\diamond$

Exemple 6 (Paradoxe du « pêcheur à la ligne »)
Soit $\{a, b, c\}$ l'ensemble des candidats à une élection pour laquelle il y a 11 électeurs dont les préférences se répartissent comme suit :

4	votants ont les préférences	$a \succ b \succ c$,
4	votants ont les préférences	$c \succ b \succ a$,
3	votants ont les préférences	$b \succ c \succ a$.

Avec le système français seuls les candidats a et c devraient passer le premier tour et c devrait gagner l'élection au second tour avec 7 voix sur 11. Supposons toutefois que 2 parmi les 4 premiers électeurs, particulièrement peu intéressés par l'élection de c qui est donné largement favori, décident d'aller « pêcher à la ligne » plutôt que d'aller voter. On se retrouve donc devant une population de 9 votants dont les préférences se répartissent comme suit :

$$\begin{array}{rll} 2 & \text{votants ont les préférences} & a \succ b \succ c, \\ 4 & \text{votants ont les préférences} & c \succ b \succ a, \\ 3 & \text{votants ont les préférences} & b \succ c \succ a. \end{array}$$

À leur retour à la maison nos deux pêcheurs ne peuvent que se féliciter de leur décision puisque non seulement ils ont profité d'une belle journée de pêche, mais ils peuvent constater que leur abstention a causé la défaite du candidat c puisque le candidat b est élu au second tour avec une majorité de 5 voix sur 9 suffrages exprimés. L'abstention de deux votants potentiellement hostiles à c a entraîné sa défaite. Une telle méthode **n'incite pas à la participation**. $\diamond$

Exemple 7 (Vote en sous-comités)
Soit $\{a, b, c\}$ l'ensemble des candidats à une élection pour laquelle il y a 26 électeurs. Les 13 votants situés dans des zones urbaines ont des préférences réparties comme suit :

$$\begin{array}{rll} 4 & \text{votants ont les préférences} & a \succ b \succ c, \\ 3 & \text{votants ont les préférences} & b \succ a \succ c, \\ 3 & \text{votants ont les préférences} & c \succ a \succ b, \\ 3 & \text{votants ont les préférences} & c \succ b \succ a. \end{array}$$

Les 13 votants situés dans des zones rurales ont eux des préférences réparties comme suit :

$$\begin{array}{rll} 4 & \text{votants ont les préférences} & a \succ b \succ c, \\ 3 & \text{votants ont les préférences} & c \succ a \succ b, \\ 3 & \text{votants ont les préférences} & b \succ c \succ a, \\ 3 & \text{votants ont les préférences} & b \succ a \succ c. \end{array}$$

Imaginons qu'un scrutin se déroule en zone urbaine. Il est facile de constater que a et c seront confrontés au second tour et que a l'emportera avec 7 voix contre 6. De même pour un scrutin en zone rurale, a et b subsisteront au second tour et a l'emportera avec 7 voix contre 6. On constate que a l'emporte à la fois en zone urbaine et en zone rurale. Il serait donc naturel de penser que a devrait l'emporter lors du scrutin national. Il est facile de constater qu'il n'en va pas ainsi puisqu'au niveau national a est éliminé dès le premier tour, b l'emportant au second face à c avec 17 voix contre 9. On dit qu'une telle méthode n'est pas **séparable**. $\diamond$

Lorsqu'il y a plus de deux candidats, les exemples qui précèdent montrent qu'il n'est pas simple de vouloir bâtir un système électoral répondant, dans toutes les situations, à ce que l'on pourrait en attendre. Notons que le système britannique (vote uninominal à un tour) ne pose aucun des problèmes mentionnés ci-dessus, dès lors qu'il n'y a que deux candidats. On pourrait donc imaginer qu'il suffit de traiter un problème de vote à n candidats ($n > 2$) comme une séquence de $n-1$ problèmes de votes à deux candidats : on commence par choisir arbitrairement deux candidats que l'on confronte dans un vote à la majorité, le vainqueur est opposé à un troisième candidat dans un second vote, et ainsi de suite jusqu'au dernier des n candidats. Malheureusement cette façon d'enchaîner les vote majoritaires « en cascade » comporte également des inconvénients sérieux comme le montrent les deux exemples suivants.

Exemple 8 (Influence de l'ordre du jour dans un vote majoritaire en cascade) Soit $\{a, b, c\}$ l'ensemble des candidats à une élection. Considérons trois votants dont les préférences sont les suivantes :

$$\begin{array}{lll} 1 & \text{votant a les préférences} & a \succ b \succ c, \\ 1 & \text{votant a les préférences} & b \succ c \succ a, \\ 1 & \text{votant a les préférences} & c \succ a \succ b. \end{array}$$

Si l'ordre du jour consiste à considérer les candidats dans l'ordre a, b, c, on oppose d'abord les candidats a et b et a l'emporte à la majorité absolue (deux voix contre une). On confronte alors les candidats a et c ce qui conduit à la victoire de c par deux voix contre une. Le candidat c remporte donc l'élection. Avec un ordre du jour b, c, a, on oppose d'abord les candidats b et c. Le candidat b l'emporte par deux voix contre une. Il est alors confronté au candidat a qui l'emporte avec deux voix contre une et est donc élu. On constatera sans difficulté qu'avec un ordre du jour c, a, b, le candidat b est élu.

On remarque dans cet exemple que chacun des candidats est susceptible de gagner l'élection et que la victoire de l'un ou de l'autre ne dépend que du choix arbitraire de l'ordre du jour (on notera que cette méthode est fréquemment employée dans les assemblées législatives pour examiner un projet de loi : les amendements sont examinés successivement selon un certain ordre du jour et le projet amendé fait ensuite l'objet d'un vote l'opposant au *statu quo*). Le choix d'un ordre du jour particulier favorise tel ou tel candidat. Ceux-ci ne sont plus alors traités de manière « symétrique » : plus un candidat entre en lice « tôt » moins il est avantagé. Une telle méthode n'est pas **neutre**. On notera que les systèmes britanniques et français sont, eux, clairement neutres puisqu'il n'ont tendance à favoriser ou à défavoriser systématiquement aucun candidat. $\diamond$

Exemple 9 (Violation de l'unanimité dans un vote majoritaire en cascade) Soit $\{a, b, c, d\}$ l'ensemble des candidats à une élection. Considérons trois votants dont les préférences sont les suivantes :

$$\begin{array}{lll} 1 & \text{votant a les préférences} & b \succ a \succ d \succ c, \\ 1 & \text{votant a les préférences} & c \succ b \succ a \succ d, \\ 1 & \text{votant a les préférences} & a \succ d \succ c \succ b. \end{array}$$

Si l'ordre du jour est a, b, c, d alors le candidat d emporte l'élection alors que la totalité des votants lui préfèrent a, candidat qui est éliminé face à b dès la première confrontation. Une telle méthode ne respecte pas le principe d'**unanimité** voulant qu'une procédure de vote respecte un avis partagé par l'ensemble de tous les votants. On notera que dans les systèmes britanniques et français, il est exclu d'élire un candidat tel que l'unanimité des votants lui en préfère un autre. ◇

Exemple 10 (Voix prépondérante du président)
Imaginons qu'au second tour d'une élection conduite selon le système français les deux candidats en lice reçoivent exactement le même nombre de voix. Si une telle situation a une très faible probabilité d'occurrence lors d'élections nationales (elle créerait, au second tour d'une élection présidentielle en France, un délicat problème de Droit Constitutionnel), elle est en revanche très fréquente lors d'élections faisant intervenir un petit nombre de votants (conseil d'administration, comités divers). Une pratique usuelle consiste alors à donner à l'un des votants le pouvoir de briser à sa guise une éventuelle situation d'égalité : le président a une « voix prépondérante en cas d'égalité ». Cette technique, si elle permet de sortir de l'impasse (d'autres pourraient être envisagées comme un tirage au sort ou un choix fondé sur un critère arbitraire comme le nom ou l'âge des candidats — cette dernière solution créerait une méthode non neutre) conduit à ne plus toujours traiter sur un pied d'égalité les opinions de tous les votants. La méthode ainsi créée n'est pas **anonyme** (contrairement à toutes les méthodes envisagées jusqu'alors). ◇

Face aux difficultés mentionnées plus haut, une attitude naturelle consiste à demander aux votants de fournir une information plus riche que dans un scrutin uninominal. On peut, en particulier, s'intéresser à des systèmes électoraux où chaque votant doit fournir une liste de tous les candidats ordonnée selon ses préférences (préordre complet). Nous examinons à la section suivante les difficultés propres à ces systèmes (d'autres types d'information sont utilisés par certaines techniques comme, par exemple, dans le vote par assentiment, voir Brams et Fishburn, 1982).

2.2 Systèmes par « listes ordonnées »

Le problème de l'agrégation se pose ici de manière sensiblement différente qu'avec les systèmes uninominaux envisagés au 2.1. Il s'agit ici d'agréger des « listes ordonnées » pour déterminer le candidat le mieux soutenu par l'ensemble de ces listes, ou même d'établir un classement global sensé résumer au mieux les préférences exprimées.

Pour révéler l'opinion majoritaire dans un tel scrutin, Condorcet (1785) propose de comparer les candidats par paires en utilisant la méthode suivante :

Méthode de Condorcet (ou méthode majoritaire) un candidat a est préféré à un candidat b si et seulement si le nombre de votants ayant classé a devant b est strictement supérieur au nombre de votants ayant classé b devant a (en cas d'égalité les deux candidats sont jugés indifférents).

Il pose alors le principe suivant :

Principe de Condorcet s'il existe un candidat qui est préféré à chacun des autres candidats en utilisant la méthode majoritaire, c'est ce candidat qu'il faut élire. Ce candidat est le **vainqueur de Condorcet**, il est nécessairement unique.

Il est à noter que ni le système anglais (1 tour) ni le système français (2 tours) ne vérifient ce principe. Pour s'en convaincre, il suffit d'examiner l'exemple 2 où le système anglais conduit à l'élection du candidat a alors que b est le vainqueur de Condorcet, puis l'exemple 3 où le système français conduit à élire b alors que a est le vainqueur de Condorcet.

Le principe de Condorcet semble naturel (même s'il peut faire problème comme le suggère l'exemple 1 où le candidat a est un vainqueur de Condorcet). Il n'est pas toujours opérationnel : dans certaines situations, il n'existe pas de vainqueur de Condorcet ; c'est le *paradoxe de Condorcet*. Ainsi, dans l'exemple 8, le candidat a est préféré au candidat b. Ce dernier est préféré au candidat c. Mais la confrontation de a et de c révèle que c est préféré à a. Chaque candidat est battu par au moins un autre ; il n'existe donc pas de vainqueur de Condorcet. Un tel cas de figure se présentant assez fréquemment (environ 4 fois sur 10 dans des scrutins à 7 candidats avec un grand nombre de votants lorsque l'on ne fait pas de restrictions sur les listes admissibles, voir Fishburn, 1973 ; Gehrlein, 1983). On doit trouver comment procéder lorsqu'il n'y a pas de vainqueur de Condorcet. On peut par exemple exiger de choisir un élément tel qu'aucun autre ne le batte selon la méthode majoritaire (principe faible de Condorcet) mais là encore, un tel candidat n'existe pas toujours (c'est, bien sûr, le cas dans l'exemple 8). Bien des méthodes ont été proposées pour tenter de tirer parti de la relation de préférence bâtie en utilisant la méthode majoritaire ; on en trouvera un bon aperçu dans Fishburn (1977), Nurmi (1987) et Laslier (1997).

Une approche alternative pour traiter de tels scrutins a été proposée par Borda (1781). Elle consiste à associer un score global à chaque candidat en calculant la somme de son rang de classement dans les listes des votants.

Méthode de Borda un candidat a est préféré à un candidat b si la somme des rangs de a dans les listes des votants est strictement inférieure à celle de b (on suppose ici que les listes sont des ordres complets — sans ex æquo — et on attribue le rang 1 au premier de la liste, 2 au second et ainsi de suite ; comme nous le verrons, la méthode se généralise sans difficulté pour traiter les cas d'ex æquo).

Exemple 11 (Méthodes de Borda et Condorcet)
Soit $\{a, b, c, d\}$ l'ensemble des candidats à une élection. Considérons trois votants dont les préférences sont les suivantes :

2	votants ont les préférences	$b \succ a \succ c \succ d,$
1	votant a les préférences	$a \succ c \succ d \succ b.$

En utilisant la méthode de Borda, c'est a qui emporte l'élection avec un score de $2 \times 2 + 1 \times 1 = 5$. Elle conduit au classement a, b, c, d, les candidats recevant respectivement les scores 5, 6, 8 et 11. En utilisant la méthode de Condorcet c'est b qui l'emporte en tant que vainqueur de Condorcet. On constatera ici que la préférence collective donnée par la méthode de Condorcet est transitive et conduit au classement b, a, c, d. Les deux méthodes divergent ; la méthode de Borda ne vérifie pas le principe de Condorcet (à titre de curiosité, on pourra chercher à vérifier que si la méthode de Borda ne conduit pas toujours à élire un vainqueur de Condorcet, elle ne peut conduire — comme le système anglais — à élire un perdant de Condorcet, c'est-à-dire un candidat battu par tous les autres à la majorité absolue). ◇

La méthode de Borda présente un avantage important sur la méthode de Condorcet. Elle permet non seulement de désigner un (ou plusieurs) vainqueur(s) dans tous les cas de figure (candidats dont la somme des rangs est minimale) mais fournit un rangement de tous les candidats du meilleur au pire. Ce n'est pas le cas de la méthode de Condorcet qui conduit parfois à des préférences non transitives ne permettant pas d'ordonner les candidats ni même de choisir un sous-ensemble de « bons » candidats (cf. exemple 8). On vérifiera aisément que la méthode de Borda est neutre, anonyme, séparable, monotone et incite à la participation.

La méthode de Borda possède en revanche une caractéristique qui peut sembler peu naturelle. Pour la mettre en évidence, reprenons l'exemple 11 et supposons que les candidats c et d, estimant que leurs chances de victoire sont trop faibles, retirent leur candidature la veille de l'élection. On constate alors que b devient le vainqueur avec la méthode de Borda comme avec celle de Condorcet. Ainsi, la défection des candidats c et d a inversé les résultats de la méthode de Borda entre a et b. Contrairement à ce que l'on observe pour la méthode de Condorcet, la relation de préférence liant deux candidats a et b avec la méthode de Borda dépend non seulement des positions relatives de a et b dans les classements des votants, mais aussi de leurs situations respectives vis-à-vis de tous les autres candidats. Le fait qu'un candidat a batte un candidat b est donc contingent à l'ensemble des candidats qui se sont présentés. Une telle contingence peut être assez problématique dans la réalité en raison de défections éventuelles ; elle l'est d'autant plus en aide à la décision dans la mesure où l'ensemble des actions à évaluer est rarement « donné » et requiert un travail de modélisation important.

Au vu des exemples qui viennent d'être présentés, on aimerait pouvoir proposer une méthode démocratique qui dispose à la fois des avantages de la méthode de Borda (transitivité du résultat) et de ceux de la méthode de Condorcet (respect du principe de Condorcet et absence de phénomènes de contingence). On verra à la section 3 qu'un tel espoir est largement illusoire.

Mentionnons enfin que nous nous sommes limités dans cette section à des systèmes électoraux tendant à l'élection d'un unique candidat et non d'un ensemble de candidats. On pourrait en conclure à la supériorité des systèmes tendant à l'élection d'une assemblée représentative « à la proportionnelle ». Une telle conclusion serait hâtive pour au moins deux raisons. Tout d'abord, la définition de ce qui est « juste » représentation proportionnelle soulève des problèmes délicats, la plupart des systèmes proportionnels utilisés en pratique donnant lieu à de nombreuses situations paradoxales (voir Balinski et Young, 1982). Remarquons ensuite que la règle de décision au sein de l'assemblée représentative élue à la proportionnelle est le plus souvent du type de celles présentées dans cette section. Il ne faut donc pas chercher dans l'idée de représentation proportionnelle une solution « miracle » aux difficultés mentionnées ici.

3 Quelques résultats théoriques

Les exemples de la section précédente laissent croire que concevoir de « bonnes » procédures d'agrégation de préférences soulève des difficultés sérieuses. Des résultats célèbres en théorie du choix social viennent conforter cette intuition.

3.1 Le théorème d'Arrow

Le théorème d'Arrow (Arrow, 1963) est central en théorie du choix social. Il concerne les méthodes qui visent à agréger n ($n \geq 3$) préordres complets (classements avec ou sans ex æquo) en un préordre complet synthétique. De même qu'au 2.2, chaque votant fournit donc une « liste » classant par ordre de préférence l'ensemble des candidats (avec possibilité d'ex æquo).

Formalisation
Une relation binaire R sur un ensemble A est un sous-ensemble de $A \times A$. On note souvent $a\ R\ b$ au lieu de $(a, b) \in R$. Un préordre complet sur A est une relation binaire sur A complète (pour tout $a, b \in A$ on a $a\ R\ b$ et/ou $b\ R\ a$) et transitive (pour tout $a, b, c \in A$, $a\ R\ b$ et $b\ R\ c$ impliquent $a\ R\ c$). On note $\mathcal{WO}(A)$ l'ensemble des préordres complets définis sur l'ensemble A. La partie asymétrique de R est la relation binaire P définie par $a\ P\ b \Leftrightarrow [a\ R\ b$ et $Non[b\ R\ a]]$. La partie symétrique de R est la relation binaire I définie par $a\ I\ b \Leftrightarrow [a\ R\ b$ et $b\ R\ a]$.

Notons $N = \{1, 2, \ldots n\}$ l'ensemble des votants et A l'ensemble des candidats. On suppose que le votant $i \in N$ exprime sa préférence pour les candidats en indiquant un préordre complet $R_i \in \mathcal{WO}(A)$ sur l'ensemble A des candidats. On note P_i (resp. I_i) la partie asymétrique (resp. symétrique) de R_i. •

Arrow s'est intéressé aux méthodes d'agrégation vérifiant les conditions suivantes :

Universalité toute configuration de listes est admissible.

Formalisation
On recherche une fonction d'agrégation F donnant un résultat pour tout élément $(R_1, R_2, \ldots, R_n)$ de $\mathcal{WO}(A)^n$. •

Cette condition exclut toute contrainte portant sur l'ensemble des listes votées. Les exemples de la section précédente ont révélé des problèmes dus à des configurations particulières où, par exemple, il n'y avait pas de vainqueur de Condorcet. On pourrait alors vouloir proposer une méthode qui fonctionne seulement pour les configurations « simples ». Imposer des restrictions sur les configurations des listes admissibles à l'entrée de la méthode d'agrégation est parfois naturel. C'est, par exemple, le cas si l'on estime que tous les votants situent de manière identique l'ensemble des candidats sur une échelle gauche-droite et jugent les candidats en calculant leur distance à un « point idéal » sur cette échelle (la position de ce point idéal étant propre à chaque votant). On obtient ainsi des *préférences unimodales* au sens de Black (1958) qui garantissent l'existence d'un vainqueur de Condorcet. De telles restrictions impliquent cependant l'absence de votants atypiques, ce qu'il est difficile d'exclure *a priori*. Avec une méthode d'agrégation non universelle, certains scrutins ne pourraient pas être dépouillés.

Transitivité la méthode doit toujours fournir un classement sous la forme d'un préordre complet.

Formalisation
La fonction d'agrégation recherchée est à valeur dans $\mathcal{WO}(A)$.
Lorsqu'il n'y aura pas d'ambiguïté possible, on notera $R = F(R_1, R_2, \ldots, R_n)$ et P (resp. I) la partie asymétrique (resp. symétrique) de R. •

Cette condition impose la transitivité du résultat quelles que soient les préférences exprimées. Ainsi, lorsque la société préfère a à b et b à c elle doit préférer a à c. Nous avons vu que la méthode de Condorcet ne vérifiait pas cette condition. Elle est suffisante (mais non nécessaire) pour garantir que la méthode permettra, dans tous les cas, d'isoler un ou plusieurs meilleurs candidats (ceux figurant en tête du classement). On verra plus bas que l'affaiblissement de cette condition ne contribue que faiblement à la « résolution » de la difficulté mise à jour par le résultat d'Arrow.

Unanimité le résultat de la méthode ne doit pas contredire un avis unanime des votants.

Formalisation
La fonction d'agrégation F doit être telle que, pour tout $a, b \in A$, si $a\ P_i\ b$ pour tout $i \in N$ alors $a\ P\ b$. •

Si a est classé devant b dans chacune des listes, il doit figurer devant b dans le classement global. Cette condition est très naturelle ; l'exemple 9 nous a cependant montré qu'elle pouvait être violée par certaines méthodes.

Indépendance le résultat de la comparaison entre deux candidats ne dépend que de leur position relative dans les listes ordonnées fournies par les votants.

Formalisation
Pour tout $(R_1, R_2, \ldots, R_n), (R'_1, R'_2, \ldots, R'_n) \in \mathcal{WO}(A)^n$ et pour tout $a, b \in A$, si $a\ R_i\ b \Leftrightarrow a\ R'_i\ b$ et $b\ R_i\ a \Leftrightarrow b\ R'_i\ a$, alors $a\ R\ b \Leftrightarrow a\ R'\ b$. •

Cette condition est plus complexe que les trois précédentes. Elle fait reposer la relation de préférence entre deux candidats sur la seule donnée de la relation liant ces deux candidats dans les listes individuelles. Ceci exclut en particulier :

- la prise en compte d'intensité de préférence dans le traitement des listes individuelles : seules sont prise en compte les relations de préférences,
- la prise en compte de la position de deux candidats vis-à-vis d'un tiers pour mieux les comparer.

Un exemple permettra de mieux comprendre la portée de cette condition.

Exemple 12 (Méthode de Borda et Indépendance)
Soit $\{a, b, c, d\}$ l'ensemble des candidats à une élection. Considérons trois votants dont les préférences sont les suivantes :

$$\begin{array}{ccc} 2 & \text{votants ont les préférences} & c \succ a \succ b \succ d, \\ 1 & \text{votant a les préférences} & a \succ b \succ d \succ c. \end{array}$$

La méthode de Borda conduit alors au classement : a, c, b, d avec des scores respectifs de 5, 6, 8 et 11.

Considérons à présent un scrutin de même type, avec les préférences :

$$\begin{array}{ccc} 2 & \text{votants ont les préférences} & c \succ a \succ b \succ d, \\ 1 & \text{votant a les préférences} & a \succ c \succ b \succ d. \end{array}$$

La méthode de Borda conduit alors au classement : c, a, b, d avec des scores respectifs de 4, 5, 9 et 12.

Notons que dans chacune des listes la position respective de a et de c est restée identique d'un scrutin à l'autre : a est préféré à c par un votant tandis que deux ont la préférence inverse. La condition d'indépendance voudrait alors que la position relative de a et de c soit identique à l'issue des deux scrutins, ce qui n'est pas le cas avec la méthode de Borda. Cette dernière utilise le fait que l'écart entre a et c semble plus grand dans la liste $a \succ b \succ d \succ c$ que dans la liste $a \succ c \succ b \succ d$, puisque b et d viennent s'intercaler entre a et c dans le premier cas. Cette dépendance de la position respective de a et de c par rapport à b et à d est exclue par la condition d'indépendance. Elle exclut de même toute méthode qui utiliserait en plus des listes une information qualifiant la plus ou moins grande intensité de chaque préférence à l'intérieur des listes. ◇

La dernière des conditions utilisées par Arrow stipule qu'aucun des votants ne peut dicter en toutes circonstances ses préférences à la collectivité. Cette condition s'impose de manière évidente pour qui recherche une méthode minimalement démocratique.

Non dictature il n'existe pas de dictateur.

Formalisation
Pour tout $i \in N$ et pour tout $a, b \in A$, il existe un profil $(R_1, R_2, \ldots, R_n) \in \mathcal{WO}(A)^n$ tel que $a\ P_i\ b$ et $b\ R\ a$. •

On peut alors énoncer le célèbre :

Théorème 1 (Arrow, 1963)
Si le nombre de votants est fini, dès lors qu'il y a plus de trois candidats aucune méthode d'agrégation ne peut satisfaire simultanément les conditions d'universalité, de transitivité, d'unanimité, d'indépendance et de non dictature.

DÉMONSTRATION
La démonstration du résultat d'Arrow fait appel aux définitions suivantes. Un sous-ensemble $I \subseteq N$ de votants est *presque décisif* pour le couple de candidats $(a, b) \in A^2$ si, pour tout $(R_1, R_2, \ldots, R_n) \in \mathcal{WO}(A)^n$, $[a\ P_i\ b, \forall i \in I$ et $b\ P_j\ a, \forall j \notin I] \Rightarrow a\ P\ b]$. De même, le sous-ensemble $I \subseteq N$ de votants est *décisif* pour le couple de candidats $(a, b) \in A^2$ si, pour tout $(R_1, R_2, \ldots, R_n) \in \mathcal{WO}(A)^n$, $[a\ P_i\ b, \forall i \in I] \Rightarrow a\ P\ b$.

Montrons tout d'abord que si I est presque décisif pour un couple (a, b) alors I est décisif pour tout couple de candidats.

Considérons un candidat c distinct de a et b (un tel candidat existe toujours puisque, par hypothèse, $n \geq 3$). Soit un profil $(R_1, R_2, \ldots, R_n) \in \mathcal{WO}(A)^n$ tel que $a\ P_i\ c$, $\forall i \in I$. Considérons un profil $(R'_1, R'_2, \ldots, R'_n) \in \mathcal{WO}(A)^n$ tel que :

- $a\ P'_i\ b\ P'_i\ c, \forall i \in I,$
- $b\ P'_j\ a$ et $b\ P'_j\ c, \forall j \notin I.$

Puisque, par hypothèse, I est presque décisif pour le couple (a, b), on a $a\ P'\ b$. L'axiome d'unanimité impose $b\ P'\ c$. L'axiome de transitivité implique alors $a\ P'\ c$. Puisque l'on n'a pas spécifié la relation de préférence liant a et c pour les votants n'appartenant pas à I dans le profil $(R'_1, R'_2, \ldots, R'_n)$, l'axiome d'indépendance implique alors que $a\ P\ c$. On a donc montré que si I est presque décisif pour le couple (a, b) alors I est décisif pour tout couple (a, c)

de candidats avec $c \neq a, b$. Nous laissons le soin au lecteur de généraliser ce raisonnement pour traiter des cas où c est confondu avec a ou avec b.

Montrons à présent qu'il existe toujours un votant $i \in N$ qui est presque décisif pour un couple de candidats. En vertu du résultat précédent, $\{i\}$ sera décisif pour tout couple de candidats et sera donc un dictateur.

En vertu de l'axiome d'unanimité, N est presque décisif pour tout couple de candidats. Puisque N est fini, il existe au moins un sous-ensemble $J \subseteq N$ presque décisif pour le couple (a, b) de cardinalité minimale. Supposons que $|J| > 1$ et considérons un profil $(R_1, R_2, \ldots, R_n) \in \mathcal{WO}(A)^n$ tel que :

- $a\ P_i\ b\ P_i\ c$, pour $i \in J$,
- $c\ P_j\ a\ P_j\ b\ \forall j \in J \setminus \{i\}$,
- $b\ P_k\ c\ P_k\ a\ \forall k \notin J$.

Par hypothèse, puisque J est presque décisif pour le couple (a, b), on a : $a\ P\ b$. Il est impossible que $c\ P\ b$. Ceci impliquerait en effet, en utilisant l'axiome d'indépendance, que $J \setminus \{i\}$ est presque décisif pour le couple (c, b) et, donc, décisif pour tout couple, contrairement à notre hypothèse. On a donc $b\ R\ c$ et l'axiome de transitivité implique que $a\ P\ c$. Ceci implique que $\{i\}$ est presque décisif pour le couple (a, c). $\square$

Ce résultat négatif ne concerne que le cas de plus de trois candidats : on vérifiera facilement que la méthode majoritaire permet de respecter les 5 conditions du théorème avec deux candidats. Le théorème d'Arrow explique en grande partie les difficultés rencontrées (cf. section 2) dans l'élaboration d'une procédure d'agrégation « satisfaisante ». Observons, par exemple, que la méthode de Borda respecte les conditions d'universalité, de transitivité, d'unanimité et de non dictature ; par conséquent elle ne peut satisfaire à la condition d'indépendance, comme nous l'avons vérifié directement à l'exemple 12. La méthode de Condorcet, pour sa part, respecte les conditions d'universalité, d'unanimité, d'indépendance et de non dictature ; elle ne peut donc satisfaire à l'axiome de transitivité ainsi que nous l'avons vu plus haut (cf. exemple 8). Notons que le théorème d'Arrow utilise un petit nombre de conditions parmi celles introduites plus haut. Il est clair qu'en sus des conditions proposées par Arrow, on aurait aimé voir aussi imposé la neutralité, l'anonymat, la monotonie, l'incitation à la participation, le respect du principe de Condorcet, la non manipulabilité ou la séparabilité. La puissance du résultat tient à son économie : un petit nombre de conditions, toutes raisonnables en apparence et très en deçà de ce que l'on aurait envie d'exiger d'une procédure réellement « démocratique », suffit à engendrer un résultat d'impossibilité.

Le théorème d'Arrow a engendré une très vaste littérature dont on trouvera un bon aperçu dans Campbell et Kelly (2002), Kelly (1978), Fishburn (1987) et Sen (1986). On se contentera de mentionner ici que l'affaiblissement de la condition de transitivité ne contribue pas de manière significative à la disparition du problème révélé par le théorème d'Arrow. Par exemple, imposer seulement la quasi-transitivité de la relation collective, c'est-à-dire la transitivité de sa partie asymétrique (préférence stricte), ce qui est toujours suffisant pour pouvoir déterminer dans tous les cas un ou plusieurs vainqueurs, conduit, en présence des conditions d'universalité, d'unanimité et d'indépendance non plus à une dictature mais à une *oligarchie*, c'est-à-dire à l'existence d'un sous-ensemble de votants capable d'imposer leur avis unanime au reste du groupe et disposant chacun d'un pouvoir de veto absolu interdisant au groupe de préférer strictement a à b s'il sont d'avis contraire (voir Gibbard, 1969 ; Mas-Colell et Sonnenschein, 1972).

Exemple 13
Considérons une situation avec 6 votants numérotés de $i = 1$ à 6 et une règle d'agrégation conduisant à une relation $R = F(R_1, R_2, \ldots, R_6)$ en posant :

$$\begin{aligned} x\ P\ y \quad &\Leftrightarrow \sum_{\{i:x P_i y\}} w_i > \lambda, \\ x\ I\ y \quad &\text{sinon}, \end{aligned}$$

avec $w_1 = w_2 = 0,4$, $w_3 = w_3 = w_5 = w_6 = 0,05$ et $\lambda = 0,7$ est oligarchique. En effet, si l'on considère l'ensemble O constitué des votants 1 et 2, on vérifie aisément que, quelque soit le profil de préférences considéré, on a :

$$\begin{aligned} [x\ P_1\ y \text{ et } x\ P_2\ y] &\Rightarrow x\ P\ y, \\ [x\ P_1\ y \text{ ou } x\ P_2\ y] &\Rightarrow \mathit{Non}[y\ P\ x]. \end{aligned} \qquad \diamond$$

L'existence d'une oligarchie est aussi problématique que celle d'un dictateur. En effet, si l'oligarchie comprend la totalité des votants (seule solution pour préserver l'aspect « démocratique » du vote) alors le droit de veto de chaque membre de l'oligarchie impliquera, en général, une relation de préférence collective fort peu discriminante. À l'inverse, une oligarchie ne contenant qu'un seul votant fait de ce dernier un dictateur. Entre ces deux extrêmes, aucune solution n'est vraiment pleinement satisfaisante.

Si l'on affaiblit encore la condition de transitivité en exigeant seulement qu'il n'existe pas de circuit dans la partie asymétrique de la relation de préférence collective (condition nécessaire et suffisante pour pouvoir définir des éléments maximaux dans tout sous-ensemble fini de candidats, voir Sen, 1970), alors on peut mettre en évidence l'existence d'un votant ayant un pouvoir de veto absolu (Mas-Colell et Sonnenschein, 1972) ce qui ne semble guère plus démocratique.

Le théorème d'Arrow et les préférences floues. S'il est impossible d'agréger de façon satisfaisante (c'est-à-dire en respectant les conditions d'Arrow) les préférences des votants, c'est essentiellement pour deux raisons :

- parce que l'information contenue dans les préordres complets décrivant les préférences des votants est trop pauvre : elle est uniquement ordinale. On peut donc espérer, en agrégeant des structures de préférence plus riches, échapper au théorème d'Arrow. En l'occurrence, en représentant les préférences des votants par des relations floues, on peut non seulement parler de la préférence de a sur b mais aussi de l'intensité de la préférence de a sur b. On dispose donc d'une information plus riche.

- parce que la préférence globale doit être un préordre complet et que ceci est une contrainte forte. L'affaiblissement de cette condition nous amène donc à considérer des méthodes d'agrégation conduisant à des préférences sociales qui ne soient pas forcément des préordres complets mais des relations autorisant plus de souplesse, par exemple des relations floues.

Certains auteurs ont étudié si les conséquences négatives du théorème d'Arrow pouvaient être évitées en demandant que le résultat de la méthode d'agrégation soit une relation de préférence floue (voir, par exemple, Barrett, Pattanaik et Salles, 1986, 1992 ; Leclerc, 1984 ; Perny, 1992a), c'est-à-dire une fonction R de A^2 dans $[0;1]$. Leurs conclusions sont, en général, malheureusement négatives. Dès lors que l'on impose à la relation de préférence floue obtenue comme résultat de vérifier des conditions permettant d'en déduire simplement des vainqueurs ou un rangement, on retrouve très vite comme seul résultat possible des méthodes d'agrégation distribuant de façon très inégale le pouvoir entre les divers votants. C'est, par exemple, le cas si l'on impose à la relation de préférence floue de vérifier la min-transitivité, c'est-à-dire, pour tout $a, b, c \in A$:

$$R(a, c) \geq \min(R(a, b), R(b, c)),$$

condition qui assure que la relation R_λ définie par :

$$aR_\lambda b \Leftrightarrow R(a, b) \geq \lambda,$$

est transitive pour toute valeur de λ. À partir d'une relation min-transitive, il n'est donc pas difficile de déterminer un ou plusieurs vainqueurs ou encore de bâtir un rangement des candidats.

On trouve cependant dans la littérature des résultats positifs utilisant des conditions de transitivité plus faibles qui pourraient laisser croire que l'on peut réconcilier les axiomes d'Arrow dans le cas de préférences floues (voir, par exemple, Ovchinnikov, 1991). Ces résultats apparemment positifs reposent sur un malentendu : ils utilisent une notion de transitivité floue si faible qu'elle tolère, par exemple, les effets Condorcet, comme on le montre dans l'exemple qui suit.

Exemple 14
La notion de transitivité considérée dans Ovchinnikov (1991) pour les relations floues revient à poser, pour tout $a, b, c \in A$:

$$R(a,c) \geq R(a,b) + R(b,c) - 1. \tag{1}$$

Or dans un problème admettant n votants, on montre que la relation de préférence floue :

$$R(a,b) = \frac{1}{n}\#\{i \in A : a\ R_i\ b\},$$

vérifie la condition (1). Ainsi, en présence de $3k$ votants dont les préférences sont les suivantes (effet Condorcet):

k	votants ont les préférences	$a \succ b \succ c$,
k	votants ont les préférences	$b \succ c \succ a$,
k	votants ont les préférences	$c \succ a \succ b$,

on obtient : $R(a,b) = 2/3$, $R(b,c) = 2/3$ et $R(c,a) = 2/3$, ce qui est bien compatible avec (1). Cette apparente solution au problème soulevé par le théorème d'Arrow est néanmoins illusoire puisqu'il est loin d'être aisé d'utiliser une relation floue vérifiant la condition (1) pour en déduire des vainqueurs ou un rangement. $\diamond$

Pour résumer, on peut dire que, sauf à considérer une notion de transitivité artificiellement faible et n'ayant donc pas d'intérêt pratique, les procédures d'agrégation conduisant à des relations floues n'échappent pas à la difficulté révélée par le théorème d'Arrow.

3.2 Autres résultats

Le théorème d'Arrow et ses nombreuses extensions sont très loin d'épuiser l'ensemble des résultats en théorie du choix social concernant l'agrégation des préférences. Il est illusoire de vouloir en tenter ici une présentation d'ensemble (on pourra, pour cela, se reporter à Sen, 1986 ; Campbell et Kelly, 2002). On peut schématiquement regrouper ces résultats en trois catégories :

- les résultats de type « impossibilité » qui, dans le veine du théorème d'Arrow, montrent l'existence de contradictions logiques entre certaines conditions. De tels résultats permettent de mieux cerner les limites auxquelles se heurte la recherche d'une méthode d'agrégation « satisfaisante » ;
- les résultats de type « caractérisation » s'attachant à exhiber des conditions telles qu'une méthode d'agrégation donnée soit la seule à les satisfaire simultanément. De tels résultats visent à mettre à jour les caractéristiques essentielles d'une méthode et, ainsi, d'en mieux comprendre les spécificités et de la comparer plus aisément à d'autres ;
- les résultats de type « analyse » s'attachant à confronter une série de méthodes à un ensemble de conditions jugées souhaitables. Ils visent à permettre la mise à jour de méthodes « satisfaisantes », dans les limites indiquées par les résultats de type impossibilité.

Il est clair que cette distinction emporte une part d'arbitraire non négligeable et que ces trois types d'analyse ne sont nullement contradictoires ; idéalement, elles devraient faire appel aux mêmes conditions.

Nous nous contenterons ici de mentionner, de manière informelle, quelques résultats qui nous semblent importants et/ou intéressants pour éclairer certains des phénomènes mis à jour par les exemples de la section 2.

3.2.1 Résultats d'impossibilité

Parmi les très nombreux résultats de ce type disponibles en théorie du choix social, deux nous semblent particulièrement importants :

- le théorème de Gibbard-Satterthwaite (Gibbard, 1973 ; Satterthwaite, 1975). Ce résultat montre l'impossibilité de concevoir des méthodes d'agrégation (conduisant à l'élection d'un unique candidat) vérifiant la condition d'universalité qui soient non manipulables et non dictatoriales dès lors qu'il a plus de trois candidats. Le système électoral français est clairement non dictatorial et vérifie la condition d'universalité. En négligeant les situations d'ex æquo au second tour, le résultat de Gibbard et Satterthwaite nous assure alors qu'il est possible de trouver au moins une situation où un votant peut ne pas avoir intérêt à révéler ses préférences sincèrement. Nous en avons présenté une à l'exemple 4. Notons que ce résultat a donné lieu à une abondante littérature analysant les problèmes de vote en termes de jeux non coopératifs. On trouvera un aperçu de la littérature sur ces questions dans Dummet (1984) ; Moulin (1980, 1988) ; Peleg (1984).

- le théorème de Sen dit de l'« anarchiste parétien » (Sen, 1970). Supposons que les « états sociaux » soumis au vote soient définis de manière telle qu'ils concernent la sphère privée d'un individu. Il est clair qu'il existe des conflits entre le principe majoritaire, pouvant conduire à la « dictature de la majorité » (cf. exemple 1), et le respect, pour cet individu, de sa sphère privée à l'intérieur de laquelle il devrait seul avoir le pouvoir de décider. Le théorème de « l'anarchiste parétien » montre bien davantage puisqu'il énonce l'impossibilité de faire coexister le principe du respect d'une « sphère individuelle » et les conditions d'unanimité et d'universalité. Ce résultat a engendré une abondante littérature dont trouvera un bon aperçu dans Sen (1983, 1992).

3.2.2 Caractérisations

Parmi les très nombreux résultats visant à caractériser telle ou telle méthode d'agrégation, ceux concernant la méthode de Borda présentée à la section 2.2 méritent une attention toute particulière (on trouvera de nombreux autres résultats de ce type dans Sen, 1986). En effet, cette méthode satisfait à la plupart des conditions présentées jusqu'à présent et est particulièrement simple à mettre en œuvre.

Une caractérisation de la méthode de Borda Nous présentons dans ce paragraphe la caractérisation de la méthode de Borda due à Young (1974). Il considère la méthode de Borda comme une procédure de choix, c'est-à-dire une procédure associant à tout profil de préordres sur A un sous-ensemble non vide de l'ensemble A des candidats. La méthode de Borda utilisée dans ce contexte fonctionne comme suit : à chaque candidat a, on associe un score (dit de Borda) $B(a)$ qui est égal à la somme des rangs du candidat a dans les préordres totaux exprimés par les différents votants (en cas d'indifférence, on utilise le rang moyen). L'ensemble de choix est alors constitué du ou des candidats avec le score minimal. Le lecteur pourra se reporter à l'exemple 11 pour une illustration du calcul des scores (notons que, dans l'exemple 11, la méthode de Borda est utilisée pour ranger et non pour choisir mais le calcul du score est le même).

Formalisation
Une procédure de choix est une fonction $f : \mathcal{WO}(A)^n \to 2^A \setminus \varnothing$. À chaque n-uplet de préordres complets, f associe un sous-ensemble non vide de A, interprété comme l'ensemble des meilleurs candidats. La méthode de choix

de Borda est définie par :

$$f(R_1, R_2, \dots, R_n) = \{a \in A : B(a) \leq B(b),\ \forall b \in A\},$$

où $B(a)$ est le score de Borda du candidat a et est défini par :

$$B(a) = \sum_{i=1}^{n} \left[\#\{b \in A : b\ R_i\ a\} - \#\{b \in A : a\ R_i\ b\}\right]. \tag{2}$$

Cette formalisation du score de Borda n'est pas exactement la somme des rangs mais le lecteur vérifiera aisément que $B(a)$, défini par (2), est une transformation affine de la somme des rangs et que, par conséquent, utiliser (2) ou la somme des rangs dans la méthode de Borda revient au même. Nous retenons la formulation (2), plus commode à manipuler que la somme des rangs. •

Pour caractériser la méthode de Borda, Young (1974) utilise quatre conditions.

Neutralité l'ensemble de choix ne dépend que de la position des candidats dans les préférences des votants et pas, par exemple, du nom des candidats ou de leur âge.

Formalisation
Soit $\mathcal{P}$ l'ensemble des permutations de A, π un élément de $\mathcal{P}$ et R une relation binaire sur A. On note $\pi(R)$ la relation binaire telle que $\pi(a)\ \pi(R)\ \pi(b) \Leftrightarrow a\ R\ b$. Une méthode de choix est neutre si et seulement si $f(R_1, \dots, R_n) = \pi(f(\pi(R_1), \dots, \pi(R_n)))$ pour toute permutation π dans $\mathcal{P}$. •

Cette condition impose que tous les candidats soient traités de façon identique. Elle interdit par exemple les méthodes où, en cas d'ex æquo, le candidat le plus âgé l'emporte. De même les méthodes de vote en cascade sont exclues (voir l'exemple 8).

Loyauté s'il n'y a qu'un seul votant, alors l'ensemble de choix doit contenir les candidats figurant en tête des préférences de l'unique votant.

Formalisation
$f(R_1) = \{a \in A : a\ R_1\ b,\ \forall b \in A\}$. •

Cette condition est extrêmement naturelle. S'il n'y a qu'un seul votant, on voit mal pourquoi ses préférences ne seraient pas respectées.

Cohérence Comme à l'exemple 7, imaginons que les votants soient divisés en deux groupes ou deux circonscriptions et que l'on applique la méthode de choix aux deux groupes séparément. Si certains candidats appartiennent aux ensembles de choix des deux groupes, alors eux et eux seuls doivent se retrouver dans l'ensemble de choix obtenu en appliquant la méthode de choix à tous les votants.

Formalisation
$f(R_1, \ldots, R_m) \cap f(R_{m+1}, \ldots, R_n) \neq \varnothing \Rightarrow$
$f(R_1, \ldots, R_n) = f(R_1, \ldots, R_m) \cap f(R_{m+1}, \ldots, R_n)$. •

La cohérence apparaît comme une condition de bon sens. Si deux groupes sont d'accord pour dire que tel candidat est parmi les meilleurs, alors il doit en être de même lorsque les deux groupes sont réunis.

De nombreuses conditions faisant intervenir deux groupes de votants ont été utilisées dans la littérature. Elles sont souvent appelées « séparabilité ». La cohérence fait partie de ces conditions.

Annulation Considérons deux candidats a et b et supposons que le nombre de votants préférant a à b soit égal au nombre de votants préférant b à a. Ceci est une situation assez ordinaire. Supposons maintenant que ceci soit vrai non seulement pour a et b mais pour toutes les paires de candidats, simultanément. Nous avons alors à faire à une situation très particulière. Dans une telle situation, une méthode vérifiant la condition d'annulation mène à un ensemble de choix contenant tous les candidats.

Formalisation
$\forall a, b \in A,\ \#\{i \in N : a\ R_i\ b\} = \#\{i \in N : b\ R_i\ a\} \Rightarrow f(R_1, \ldots, R_n) = A$. •

Des quatre conditions utilisées par Young, l'annulation est sans doute la plus délicate. Dans un certain sens, elle est raisonnable : lorsque, pour chaque paire a, b de candidats, il y a autant de votants en faveur de a qu'en faveur de b, il peut effectivement paraître prudent de déclarer tous les candidats ex æquo. Mais il y a d'autres situations délicates où la prudence recommanderait de déclarer tous les candidats ex æquo. Par exemple, lorsque la relation majoritaire est cyclique (voir supra le paradoxe de Condorcet). Le choix de la condition d'annulation plutôt que d'une condition imposant l'ex æquo en cas de relation majoritaire cyclique ou encore dans une autre situation délicate apparaît donc comme relativement arbitraire.

Le lecteur vérifiera aisément que la méthode de Borda vérifie la neutralité, la loyauté, la cohérence et l'annulation. Le théorème suivant, dû à Young, va beaucoup plus loin.

Théorème 2 (Young, 1974)
Une seule méthode de choix vérifie les conditions de neutralité, loyauté, cohérence et annulation : la méthode de Borda.

La preuve de ce théorème étant assez longue, nous ne la reproduisons pas dans ce texte. Il est à noter qu'une caractérisation très similaire existe pour la méthode Borda utilisée pour ranger et non pour choisir (Nitzan et Rubinstein, 1981). De plus, différentes généralisations ont été obtenues concernant l'agrégation de relations de préférences qui ne sont pas forcément des préordres complets mais toutes sortes de relations binaires et même des relations floues (voir Debord, 1987 ; Marchant, 1996, 1998, 2000 ; Ould-Ali, 2000).

Généralisations de la méthode de Borda La méthode de Borda est un cas particulier d'une classe plus générale de méthodes d'agrégation dites « méthodes de scorage ». Elles consistent à agréger les préférences en associant un nombre à chaque rang dans les listes de préférence fournies par les votants, en faisant la somme de ces nombres pour chaque candidat et en déclarant élu le ou les candidats ayant le total le plus faible. La méthode de Borda est une méthode de scorage particulière où les nombres associés à chaque rang sont également espacés. Le système britannique est également une méthode de scorage où le candidat classé en tête reçoit 1 point tandis que tous les autres en reçoivent, par exemple, 2.

Smith (1973) et Young (1974, 1975) ont montré que les méthodes de scorage étaient essentiellement caractérisées par la conjonction des conditions de neutralité, d'anonymat et de séparabilité (il suffit alors d'ajouter la condition d'annulation pour parvenir à une caractérisation de la méthode de Borda ; pour une vue d'ensemble récente de très nombreux résultats se rapportant aux méthodes de scorage, on pourra consulter Saari, 1994). Le système français n'est pas une méthode de scorage du fait du deuxième tour éventuel. Cette méthode est cependant neutre et anonyme. Il n'est donc pas surprenant de constater qu'elle n'est pas séparable comme l'a montré l'exemple 7. On a noté à la section 2 que ni le système britannique ni la méthode de Borda ne satisfont au principe de Condorcet (cf. exemples 2 et 10). Ceci n'est pas surprenant. En effet, on peut montrer qu'aucune méthode de scorage ne peut satisfaire au principe de Condorcet (voir Moulin, 1988).

Notons enfin que le système français peut se concevoir comme une méthode de scorage avec itération : on utilise une méthode de type britannique au premier tour pour isoler les deux candidats restant en lice au second tour et on applique une méthode de même type sur ces deux candidats. Notons qu'il y a de nombreuses façons d'utiliser une méthode de scorage de façon itérative (on pourrait envisager, par exemple, de recourir à plus de deux tours).

Un résultat dû à Smith (1973) montre qu'aucune méthode de ce type n'est monotone. La non monotonie du système français illustrée à l'exemple 5 n'est qu'une manifestation particulière de ce résultat.

Une caractérisation de la majorité simple Nous présentons dans ce paragraphe la caractérisation de la méthode de la majorité simple due à May (1952) et traitant du cas de deux candidats. Dans ce cas, la distinction entre choix et rangement n'a plus beaucoup de sens mais, pour ne pas introduire un nouveau formalisme, nous adopterons ici, de façon arbitraire, le formalisme du choix. May considère donc une procédure de choix, c'est-à-dire une méthode qui désigne un ou plusieurs candidats gagnants au départ des préférences des votants. Une définition formelle d'une méthode de choix a été donnée plus haut à propos de la méthode de Borda.

Un candidat fait partie de l'ensemble de choix à la majorité simple si le nombre de votants le supportant n'est pas inférieur au nombre de votants supportant son adversaire.

Formalisation
La méthode de choix à la majorité simple est définie par : $a \in f(R_1, \ldots, R_n)$ ssi

$$\#\{i \in N : a\ R_i\ b\} \geq \#\{i \in N : b\ R_i\ a\}. \qquad \bullet$$

Il est à noter que les votants indifférents ne jouent aucun rôle dans le résultat de l'élection. Leur voix sont comptées des deux côtés de l'inégalité et tout se passe donc comme s'ils n'existaient pas. Pour caractériser la méthode de la majorité simple, May (1952) a utilisé trois conditions.

Anonymat l'ensemble de choix ne dépend que des préférences des votants et pas, par exemple, de leur nom ou de leur âge.

Formalisation
Soit $\mathcal{S}$ l'ensemble des permutations de $N = \{1, \ldots, n\}$. Une méthode de choix est anonyme si et seulement si $f(R_1, \ldots, R_n) = f(R_{\sigma(1)}, \ldots, R_{\sigma(n)})$ pour toute permutation σ dans $\mathcal{S}$. $\bullet$

Cette condition interdit par exemple les méthodes où certains votants ont plus de poids que d'autres de même que les méthodes où un votant (généralement le président de l'assemblée) a le pouvoir de trancher en cas d'ex æquo.

Neutralité voir supra.

Monotonie Stricte étant données les préférences des votants, si les candidats a et b sont choisis et si un des votants revoit ses préférences en faveur de a (les autres votants ne changeant rien), alors seul a est encore choisi. Si au départ seul a était choisi, alors a reste seul dans l'ensemble de choix.

Formalisation
Considérons deux préordres R_i et R'_i identiques sauf pour un couple (a, b) de candidats, pour lequel on a :

- $Non[a\ R_i\ b]$ et $a\ R'_i\ b$ ou
- $b\ R_i\ a$ et $Non[b\ R'_i\ a]$.

La monotonie stricte impose alors que :

$$f(R_1, \ldots, R_i, \ldots, R_n) = \{a\} \Rightarrow f(R_1, \ldots, R'_i, \ldots, R_n) = \{a\},$$

et

$$f(R_1, \ldots, R_i, \ldots, R_n) = \{a, b\} \Rightarrow f(R_1, \ldots, R'_i, \ldots, R_n) = \{a\}. \quad \bullet$$

Cette condition impose donc que, en cas d'ex æquo, un seul votant qui changerait d'avis suffise à faire basculer la situation dans un sens ou l'autre.

La méthode de la majorité simple vérifie clairement les conditions énoncées ci-dessus. De plus, elle est la seule à les satisfaire.

Théorème 3 (May, 1952)
Lorsqu'il n'y a que deux candidats, la seule méthode de choix vérifiant les conditions de neutralité, anonymat et monotonie stricte est la méthode de la majorité simple.

Pour comprendre pourquoi ce théorème ne s'applique qu'au cas de deux candidats, il suffit de se rendre compte que de nombreuses méthodes de choix différentes coïncident dans le cas de deux candidats. En l'occurrence, la méthode de Borda et de nombreuses méthodes de scorage donnent toujours le même ensemble de choix que la majorité simple, avec deux candidats. On peut alors se poser la question de l'intérêt de cette caractérisation. En fait, comme on l'a vu plus haut, avec le théorème d'Arrow, la méthode de la majorité simple ne peut pas être étendue à plus de deux candidats (si on veut en conserver l'essence). Sa caractérisation avec deux candidats est donc essentielle.

3.2.3 Analyse

Les quelques méthodes d'agrégation présentées jusqu'à présent sont loin d'épuiser toutes celles qui ont été proposées dans la littérature (en particulier, on n'a pas abordé les nombreuses méthodes cherchant à tirer parti de la préférence collective bâtie par la méthode de Condorcet pour parvenir à un choix ou à un classement). De même les propriétés « souhaitables » introduites pour les analyser ne représentent qu'une très faible part de toutes celles proposées dans la littérature. On trouvera une vue d'ensemble de ces méthodes et propriétés dans De Donder, Le Breton et Truchon (2000), Felsenthal et Moaz (1992), Fishburn (1977), Levin et Nalebuff (1995), Nurmi (1987) et Richelson (1975, 1978a,b, 1981).

4 Aide multicritère à la décision et théorie du choix social

4.1 Intérêt et limites des résultats de type choix social en aide multicritère à la décision

On a observé en section 1 que les problèmes d'agrégation en aide multicritère à la décision étaient formellement très proches de ceux rencontrés en théorie du choix social. Or, il ressort des exemples de la section 2 et des résultats de la section 3 qu'en ce domaine, la conception d'une méthode d'agrégation « satisfaisante » se heurte à des problèmes sérieux. Certains (voir, par exemple Gargaillo, 1982) ont cru pouvoir en conclure à la vanité de l'analyse multicritère. Des raisons de place nous empêchent ici de répondre de manière détaillée à une telle objection (voir Roy et Bouyssou, 1993). Il nous faut néanmoins mentionner :

- qu'une telle conclusion relève d'une interprétation biaisée et trop radicale des principaux résultats disponibles en théorie du choix social. Si certains résultats d'impossibilité existent, ils ne signifient pas autant que vouloir recourir à une méthode d'agrégation pour tenter de dégager une décision collective est un exercice futile. C'est un exercice difficile qui demande de réaliser des compromis entre divers types d'exigences qu'il n'est pas, en général, possible de satisfaire simultanément. Ces résultats quand ils sont combinés à ceux de type « caractérisation » et « analyse » fournissent une base très riche pour raisonner le choix d'une méthode. Il n'y a pas de « méthode idéale », mais il existe peut-être des méthodes plus satisfaisantes (ou moins mauvaises) que d'autres.

On pourra par exemple se référer à Saari (1994)pour une défense fort convaincante de la méthode de Borda ou à Brams et Fishburn (1982) pour celle du vote par assentiment ;

- qu'il serait mal venu de confondre une proximité formelle avec une identité entre les deux types de problème d'agrégation. Notons, en particulier, que :
  - la pratique de l'aide multicritère à la décision amène souvent à vouloir bâtir des recommandations de nature plus variée que le seul choix d'une et d'une seule action, comme c'est souvent, naturellement, le cas en théorie du choix social (voir Roy, 1985),
  - certaines conditions ou hypothèses naturelles en théorie du choix social le sont beaucoup moins en aide multicritère à la décision et vice versa. À titre d'exemple, mentionnons que la condition d'anonymat n'a pas lieu d'être en analyse multicritère dès lors que l'on souhaite prendre en compte l'importance relative des critères. Inversement, mentionnons que l'ensemble des actions potentielles qu'il s'agit d'évaluer peut rarement être considéré comme une « donnée » en analyse multicritère, contrairement au cas d'une élection où l'ensemble des candidats est, en général, bien défini. Les conditions portant sur les réactions d'une méthode d'agrégation à l'apparition ou à la disparition d'actions peuvent alors se révéler d'importance beaucoup plus grande en analyse multicritère qu'en théorie du choix social,
  - les préférences qu'il s'agit d'agréger en analyse multicritère sont le résultat d'un long travail de modélisation de chacun des critères (voir Bouyssou, 1990). Ce travail peut parfois amener à agréger une information moins « riche » qu'une liste ordonnée comme, par exemple, des structures de préférences incomplètes, floues et/ou dans lesquelles la relation d'indifférence n'est pas transitive (sur ces questions voir Fodor et Roubens, 1994 ; Perny et Roubens, 1998 ; Perny et Roy, 1992 ; Roubens et Vincke, 1985). Au contraire, dans certaines circonstances, on sera à même de modéliser finement des « intensités de préférences » sur un critère donné voire de comparer des écarts de préférences exprimés selon divers critères (voir Keeney et Raiffa, 1976 ; von Winterfeldt et Edwards, 1986). Mentionnons enfin que le traitement de l'incertitude, de l'imprécision ou de la mauvaise détermination est souvent essentiel pour parvenir à élaborer une recommandation probante

en analyse multicritère (Bouyssou, 1989), contrairement à ce qui est le cas en théorie du choix social.

– en aide multicritère à la décision, contrairement au choix social, il n'est pas toujours nécessaire de construire totalement la préférence globale. En effet, il peut arriver que le décideur puisse exprimer avec plus ou moins de certitude ses préférences globales quant à certaines paires d'alternatives. Par exemple, un décideur serait capable de dire qu'il préfère x à z et y à z mais il hésiterait entre x et y. S'il utilise alors une méthode d'agrégation, c'est uniquement pour construire une préférence entre x et y et non pas sur l'ensemble des alternatives. Bien entendu, cette préférence construite sur certaines paires d'alternatives doit être fondée sur les préférences unicritères du décideur mais aussi sur ses préférences globales déclarées. On dispose donc en aide multicritère à la décision d'un élément tout à fait neuf par rapport à la théorie du choix social : les préférences globales du décideur. Celles-ci sont évidemment incomplètes et même souvent très incomplètes mais peuvent néanmoins aider à construire la préférence globale. Il est d'ailleurs bon de remarquer que, dans la pratique, ces préférences globales sont souvent utilisées par les analystes afin de fixer certains paramètres de la méthode d'agrégation qu'ils utilisent. Par exemple, avec les méthodes de type théorie de l'utilité multi-attribut (MAUT), le décideur doit comparer des alternatives (souvent mais pas nécessairement) fictives afin de déterminer la forme des fonctions d'utilité. L'existence de ces préférences globales, totalement absentes en théorie du choix social, brise la symétrie entre l'aide multicritère à la décision et la théorie du choix social. Peu de résultats théoriques ont jusqu'à présent pris en compte les préférences globales du décideur. Il y a là un vaste champ de recherches encore inexploré (voir cependant Marchant, 2003).

S'il existe une proximité formelle entre les deux domaines et si certaines conditions classiques utilisées en théorie du choix social se retrouvent « naturellement » en multicritère (unanimité, monotonie, neutralité par exemple), il faut donc se garder de transpositions trop brutales tant l'agrégation multicritère présente de caractères spécifiques.

Il ne faut pas en conclure pour autant que ces deux domaines soient sans liens et que les exemples et résultats présentés aux sections 2 et 3 soient sans conséquence pour l'analyse multicritère. Ainsi que l'a clairement montré Vansnick (1986a), il est possible et utile de voir les méthodes d'agrégation multicritère au travers du filtre de la théorie du choix social. Mentionnons ici, par exemple, que la différence de philosophie entre les méthodes de Condorcet et de Borda se retrouve en analyse multicritère où coexistent des méthodes de nature plutôt ordinales (les méthodes de surclassement, voir Roy, 1991 ; Roy et Bouyssou, 1993) et des méthodes plutôt cardinales où l'idée d'écart de préférence est centrale (méthodes fondées sur la théorie de l'utilité multi-attribut, voir Keeney et Raiffa, 1976 ; von Winterfeldt et Edwards, 1986). Au vu du théorème d'Arrow, on ne sera pas étonné du fait que les méthodes du premier type conduisent souvent à des relations de préférence globales ne se prêtant pas de manière immédiate à l'élaboration d'une recommandation (Vanderpooten, 1990).

Beaucoup reste à faire pour adapter et/ou étendre les résultats disponibles en théorie du choix social pour les rendre pertinents en analyse multicritère. Un effort a été entrepris dans ce sens depuis quelques années. On mentionnera en particulier :

- des résultats d'« impossibilité » (voir Arrow et Raynaud, 1986 ; Bouyssou, 1992a ; Perny, 1992b),
- des résultats de « caractérisation » (voir Bouyssou, 1992b ; Bouyssou et Vansnick, 1986 ; Bouyssou et Perny, 1992 ; Marchant, 1996 ; Pirlot, 1995, 1997) et
- des résultats d'« analyse » (voir Bouyssou et Vincke, 1997 ; Lansdowne, 1996, 1997 ; Pérez, 1994 ; Pérez et Barba-Romero, 1995 ; Pirlot, 1997 ; Vincke, 1992).

Il reste cependant beaucoup à faire (voir Bouyssou, Perny, Pirlot, Tsoukiàs et Vincke, 1993).

4.2 Quelques résultats en rapport direct avec des méthodes d'aide multicritère à la décision

Jusqu'ici, nous avons tenté de donner un aperçu global de la théorie du choix social, de montrer les liens entre cette théorie et l'aide multicritère à la décision ainsi que les limites de cette analogie. Dans cette dernière section, nous nous attachons à signaler des résultats de la théorie du choix social ayant un rapport direct avec des méthodes populaires d'aide multicritère à la décision.

TACTIC (Vansnick, 1986b) Le premier résultat en rapport avec la méthode TACTIC est le résultat de May (1952) présenté plus haut. Ce résultat caractérise la méthode de la majorité simple lorsqu'elle est appliquée à un ensemble de deux alternatives. Or la méthode de la majorité simple peut être vue comme un cas particulier de la méthode TACTIC, avec un seuil de concordance égal à 1, sans poids et sans discordance. Concernant également un ensemble de deux alternatives, un résultat de Fishburn (1973) caractérisant la méthode de la majorité simple avec des poids attachés à chaque critère.

Un autre article à mentionner ici est Marchant (2003). Il caractérise de deux façons la méthode de la majorité simple pondérée appliquée à un nombre quelconque d'alternatives. Il s'agit donc de résultats légèrement plus généraux que ceux de May et de Fishburn. Il correspond à un cas particulier de la méthode TACTIC, avec un seuil de concordance égal à 1 et sans discordance.

Théorie de l'utilité multi-attribut (MAUT) (Keeney et Raiffa, 1976 ; von Winterfeldt et Edwards, 1986) Les méthodes de cette famille ont généralement été étudiées dans le cadre de la théorie du mesurage (Krantz, Luce, Suppes et Tversky, 1971 ; Wakker, 1989). Il existe cependant des résultats pertinents en théorie du choix social pour décrire ces méthodes. Il s'agit en particulier de résultats dits de « choix social cardinal ». Dans cette partie de la théorie du choix social, l'information à agréger n'est pas ordinale (des rangements) mais cardinale : on désire agréger des utilités. Un article particulièrement intéressant à cet égard est celui de Roberts (1980). Jusqu'à présent, aucun de ces résultats n'a été transposé, à notre connaissance, en aide multicritère à la décision. Un travail important reste donc à accomplir.

Somme pondérée La somme pondérée étant un cas particulier des méthodes de type MAUT, nous renvoyons le lecteur au paragraphe précédent. Un résultat particulier à épingler à ce propos est le théorème 2 dans Roberts (1980) qui caractérise la somme pondérée (voir aussi Blackwell et Girshik, 1954 ; d'Aspremont et Gevers, 1977).

ELECTRE et PROMETHEE (Roy, 1991 ; Roy et Bouyssou, 1993 ; Vincke, 1989) Les méthodes ELECTRE et PROMETHEE permettent de comparer des solutions potentielles à un problème de décision, en présence de plusieurs critères. Chaque solution potentielle est représentée par un vecteur de $\mathbb{R}^n$, $x = (x_1, \ldots, x_n)$ où x_i représentant la performance de x sur le critère i (on suppose ici que les critères sont à maximiser).

La première étape de la méthode PROMETHEE consiste à choisir, pour chaque critère i, une fonction de préférence f_i (Mareschal et Brans, 1988) qui permet de calculer, pour chaque paire d'alternatives x, y, un nombre compris entre 0 et 1 traduisant un degré de préférence de x sur y noté $P_i(x, y)$ et défini par $P_i(x, y) = f_i(x_i, y_i)$.

On dispose donc à la fin de la première étape d'autant de relations de préférence floues qu'il y a de critères, P_i étant la relation floue associée au critère i et $P_i(x, y)$ la valeur de cette relation pour le couple x, y. Les étapes suivantes de la méthode PROMETHEE peuvent en fait être vues comme l'agrégation de relations floues à l'aide d'une généralisation de la méthode de Borda. Cette généralisation permettant d'agréger des relations floues a été caractérisée dans Marchant (1996). Des variantes de cette caractérisations sont proposées dans Marchant (1998, 2000) at Ould-Ali (2000).

Les méthodes ELECTRE utilisent une construction analogue mais autorisent en plus des phénomènes de veto (voir Roy, 1991 ; Roy et Bouyssou, 1993). La relation de préférence construite à l'issue de l'étape d'agrégation utilise des fonctions f_i et g_i à valeur dans $[0; 1]$ pour définir d'une part des indices de concordance $C_i(x, y) = f_i(x_i, y_i)$ qui représentent le degré avec lequel x_i est au moins aussi bon que y_i et d'autre part des indices de discordance $D_i(x, y) = g_i(x_i, y_i)$ qui évaluent dans quelle mesure la différence $y_i - x_i$ est compatible avec une préférence globale de x sur y. Lorsque $y_i - x_i$ dépasse un certain seuil dit *seuil de veto*, $D_i(x, y)$ prend la valeur 1 (on dit que le critère oppose son veto) et la règle d'agrégation utilisée interdit alors la préférence de x sur y (pour plus de détail sur l'agrégation des relations floues C_i et D_i voir Perny et Roy (1992)).

Les méthodes ELECTRE et PROMETHEE utilisent donc des procédures d'agrégation multicritères fondées sur la construction puis l'agrégation de relation floues. À cet égard, elles n'échappent pas aux résultats d'impossibilité évoqués en section 3.1, au sujet de l'agrégation de relations floues (pour plus de détails voir Perny, 1992b). Ce constat explique la nécessite d'une phase d'exploitation (voir par exemple Roy et Bouyssou, 1993 ; Vanderpooten, 1990), utilisée au sortir de l'agrégation pour proposer une prescription au décideur. Cette phase d'exploitation est souvent délicate et les problèmes rencontrés peuvent également être analysés à la lumière des résultats axiomatiques sur l'agrégation ordinale de préférences. Ainsi certains phénomènes de non monotonie observés sur des procédures d'exploitation reposant sur l'itération d'une fonction de choix (voir Fodor, Orlovski, Perny et Roubens, 1998 ; Perny, 1992a) s'expliquent par le théorème de Smith évoqué au paragraphe 3.2.2 ou par des développements axiomatiques plus récents menés dans la même veine (voir Bouyssou, 2004 ; Juret, 2003).

Mentionnons enfin que Bouyssou (1996) a étendu au cas des méthodes ELECTRE et PROMETHEE les résultats classiques de McGarvey (1953) concernant la méthode de la majorité simple.

Références

Arrow, K. J. (1963), *Social choice and individual values*, 2^{e} édition, Wiley, New York.

Arrow, K. J. et Raynaud, H. (1986), *Social choice and multicriterion decision-making*, MIT Press, Cambridge.

Balinski, M. L. et Young, H. P. (1982), *Fair representation*, Yale University Press, New Haven.

Barrett, C. R., Pattanaik, P. K. et Salles, M. (1986), On the structure of fuzzy social welfare functions, *Fuzzy Sets and Systems* **19**, 1–10.

Barrett, C. R., Pattanaik, P. K. et Salles, M. (1992), Rationality and aggregation of preferences in an ordinally fuzzy framework, *Fuzzy Sets and Systems* **49**, 9–13.

Black, D. (1958), *The theory of committees and elections*, Cambridge University Press.

Blackwell, D. et Girshik, M. A. (1954), *Theory of games and statistal decisions*, Wiley, New York.

Borda, J.-Ch. de. (1781), *Mémoire sur les élections au scrutin*, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences. Traduction anglaise par Alfred de Grazia "Mathematical derivation of an election system", *Isis*, Vol. **44**, 1953, pp. 42–51.

Bouyssou, D. (1989), Modelling inaccurate determination, uncertainty, imprecision using multiple criteria, *in* A. G. Lockett et G. Islei (Eds), *Improving Decision Making in Organisations*, Springer-Verlag, Heidelberg, pp. 78–87.

Bouyssou, D. (1990), Building criteria: A prerequisite for MCDA, *in* C. A. Bana e Costa (Ed.), *Readings in multiple criteria decision aid*, Springer-Verlag, pp. 58–80.

Bouyssou, D. (1992a), On some properties of outranking relations based on a concordance-discordance principle, *in* L. Duckstein, A. Goicoechea et S. Zionts (Eds), *Multiple criteria decision making*, Springer-Verlag, pp. 93–106.

Bouyssou, D. (1992b), Ranking methods based on valued preference relations: A characterization of the net flow method, *European Journal of Operational Research* **60**, 61–67.

Bouyssou, D. (1996), Outranking relations: do they have special properties ?, *Journal of Multiple Criteria Decision Analysis* **5**, 99–111.

Bouyssou, D. (2004), Monotonicity of 'ranking by choosing' procedures: A progress report, *Social Choice and Welfare* **23**(2), 249–273.

Bouyssou, D. et Perny, P. (1992), Ranking methods for valued preference relations: A characterization of a method based on entering and leaving flows, *European Journal of Operational Research* **61**, 186–194.

Bouyssou, D., Perny, P., Pirlot, M., Tsoukiàs, A. et Vincke, Ph. (1993), The manifesto of the new MCDA era, *Journal of Multi-Criteria Decision Analysis* **2**, 125–127.

Bouyssou, D. et Vansnick, J.-C. (1986), Noncompensatory and generalized noncompensatory preference structures, *Theory and Decision* **21**, 251–266.

Bouyssou, D. et Vincke, Ph. (1997), Ranking alternatives on the basis of preference relations: a progress report with special emphasis on outranking relations, *Journal of Multi-Criteria Decision Analysis* **6**, 77–85.

Brams, S. J. et Fishburn, P. C. (1982), *Approval voting*, Birkhäuser, Basel.

Campbell, D. E. et Kelly, J. S. (2002), Impossibility theorems in the Arrovian framework, *in* K. J. Arrow, A. K. Sen et K. Suzumura (Eds), *Handbook of social choice and welfare*, Vol. 1, North-Holland, Amsterdam, pp. 35–94.

Condorcet, J. A. N. Caritat, marquis de. (1785), *Essai sur l'application de l'analyse à la probabilité des décisions rendues à la pluralité des voix*, Imprimerie Royale, Paris.

d'Aspremont, C. et Gevers, L. (1977), Equity and the informational basis of collective choice, *Review of Economic Studies* **44**, 199–209.

De Donder, Ph., Le Breton, M. et Truchon, M. (2000), Choosing from a weighted tournament, *Mathematical Social Sciences* **40**, 85–109.

Debord, B. (1987), *Axiomatisation de procédures d'agrégation de préférences*, Thèse de doctorat, Université Scientifique, Technique et Médicale de Grenoble.

Dummet, M. (1984), *Voting Procedures*, Oxford University Press, Oxford.

Felsenthal, D. S. et Moaz, Z. (1992), Normative properties of four single-stage multi-winner electoral procedures, *Behavioral Science* **37**, 109–127.

Fishburn, P. C. (1973), *The Theory of Social Choice*, Princeton University Press, Princeton, New-Jersey.

Fishburn, P. C. (1977), Condorcet social choice functions, *SIAM Journal on Applied Mathematics* **33**, 469–489.

Fishburn, P. C. (1987), *Interprofile Conditions and Impossibility*, Harwood Academic Publishers, Chur.

Fodor, J., Orlovski, S., Perny, P. et Roubens, M. (1998), The use of fuzzy preference models in multiple criteria choice, ranking and sorting, *in* R. Słowiński (Ed.), *Fuzzy sets in decision analysis, operations research and statistics*, Kluwer, Dordrecht, pp. 69–101.

Fodor, J. et Roubens, M. (1994), *Fuzzy preference modelling and multiple criteria decision support*, Kluwer, Dordrecht.

Gargaillo, L. (1982), Réponse à l'article « Le plan d'extension du métro en banlieue parisienne, un cas type de l'analyse multicritère », *Les Cahiers Scientifiques de la Revue Transports* **7**, 52–57.

Gehrlein, W. V. (1983), Condorcet's paradox, *Theory and Decision* **15**, 161–197.

Gibbard, A. (1969), Intransitive social indifference and the Arrow dilemma. Mimeographed.

Gibbard, A. (1973), Manipulation of voting schemes: A general result, *Econometrica* **41**, 587–601.

Hudry, O. (2003), Votes et paradoxes : les élections ne sont pas monotones, *Mathématiques et Sciences Humaines* (163), 9–39.

Juret, X. (2003), Conditions suffisantes de monotonie des procédures de rangement itératives, *Mathématiques et Sciences Humaines* (161), 59–76.

Keeney, R. L. et Raiffa, H. (1976), *Decisions with multiple objectives: Preferences and value tradeoffs*, Wiley, New York.

Kelly, J. S. (1978), *Arrow impossibility theorems*, Academic Press, New York.

Kelly, J. S. (1991), Social choice bibliography, *Social Choice and Welfare* **8**, 97–169. Voir aussi `www.maxwell.syr.edu/maxpages/faculty/jskelly/0.htm`.

Krantz, D. H., Luce, R. D., Suppes, P. et Tversky, A. (1971), *Foundations of measurement,* vol. 1: *Additive and polynomial representations*, Academic Press, New-York.

Lansdowne, Z. L. (1996), Ordinal ranking methods for multicriterion decision making, *Naval Research Logistics Quarterly* **43**, 613–627.

Lansdowne, Z. L. (1997), Outranking methods for multicriterion decision making: Arrow's and Raynaud's conjecture, *Social Choice and Welfare* **14**, 125–128.

Laslier, J.-F. (1997), *Tournament solutions and majority voting*, Springer-Verlag, Berlin.

Leclerc, B. (1984), Efficient and binary consensus functions on transitively valued relations, *Mathematical Social Sciences* **8**, 45–61.

Levin, J. et Nalebuff, B. (1995), An introduction to vote-counting schemes, *Journal of Economic Perspectives* **9**, 3–26.

Marchant, Th. (1996), Valued relations aggregation with the Borda method, *Journal of Multi-Criteria Analysis* **5**, 127–132.

Marchant, Th. (1998), Cardinality and the Borda score, *European Journal of Operational Research* **108**, 464–472.

Marchant, Th. (2000), Does the Borda rule provide more than a ranking ?, *Social Choice and Welfare* **17**, 381–391.

Marchant, Th. (2003), Towards a theory of MCDM; stepping away from social choice theory, *Mathematical Social Sciences* **45**, 343–363.

Mareschal, B. et Brans, J.-P. (1988), Geometrical representations for MCDA, *European Journal of Operational Research* **34**, 69–77.

Mas-Colell, A. et Sonnenschein, H. F. (1972), General possibility theorems for group decisions, *Review of Economic Studies* **39**, 185–192.

May, K. O. (1952), A set of independent necessary and sufficient conditions for simple majority decisions, *Econometrica* **20**, 680–684.

McGarvey, D. C. (1953), A theorem on the construction of voting paradoxes, *Econometrica* **21**, 608–610.

Moulin, H. (1980), *La stratégie du vote*, Monographie du séminaire d'économétrie n°14, Éditions du CNRS, Paris.

Moulin, H. (1988), *Axioms of cooperative decision making*, Cambridge University Press, Cambridge.

Nitzan, S. et Rubinstein, A. (1981), A further characterization of Borda ranking method, *Public Choice* **36**(1), 153–158.

Nurmi, H. (1987), *Comparing voting systems*, D. Reidel, Dordrecht.

Ould-Ali, S. (2000), *Variations autour de la méthode de Borda : une approche axiomatisée*, Thèse de doctorat, Université Joseph Fourier, Grenoble.

Ovchinnikov, S. (1991), Social choice and Łukasiewicz logic, *Fuzzy Sets and Systems* **43**, 275–289.

Peleg, B. (1984), *Game theoretic analysis of voting in committees*, Cambridge University Press, Cambridge.

Pérez, J. (1994), Theoretical elements of comparison among ordinal discrete multicriteria methods, *Journal of Multi-Criteria Decision Analysis* **3**, 157–176.

Pérez, J. et Barba-Romero, S. (1995), Three practical criteria of comparison among ordinal preference aggregating rules, *European Journal of Operational Research* **85**, 473–487.

Perny, P. (1992a), *Modélisation, agrégation et exploitation de préférences floues dans une problématique de rangement*, Thèse de doctorat, Université Paris Dauphine.

Perny, P. (1992b), Sur le non-respect de l'axiome d'indépendance dans les méthodes de type ELECTRE, *Cahiers du CERO* **34**, 211–232.

Perny, P. et Roubens, M. (1998), Fuzzy preference modelling, *in* R. Słowiński (Ed.), *Fuzzy sets in decision analysis, operations research and statistics*, Kluwer, Dordrecht, pp. 3–30.

Perny, P. et Roy, B. (1992), The use of fuzzy outranking relations in preference modelling, *Fuzzy Sets and Systems* **49**, 33–53.

Pirlot, M. (1995), A characterization of "min" as a procedure for exploiting valued preference relations and related results, *Journal of Multi-Criteria Decision Analysis* **4**, 37–56.

Pirlot, M. (1997), A common framework for describing some outranking procedures, *Journal of Multi-Criteria Decision Analysis* **6**, 86–93.

Pomerol, J.-Ch. et Barba-Romero, S. (1993), *Choix multicritère dans l'entreprise*, Hermès. Traduction anglaise : Multicriterion Decision in Management, Principles and Practice, Kluwer, Dordrecht, 2000.

Richelson, J. T. (1975), A comparative analysis of social choice functions, *Behavioral Science* **20**, 331–337.

Richelson, J. T. (1978a), A comparative analysis of social choice functions II, *Behavioral Science* **23**, 38–44.

Richelson, J. T. (1978b), A comparative analysis of social choice functions III, *Behavioral Science* **23**, 169–176.

Richelson, J. T. (1981), A comparative analysis of social choice functions IV, *Behavioral Science* **35**, 346–353.

Roberts, K. W. S. (1980), Interpersonal comparability and social choice theory, *Review of Economic Studies* **47**, 421–439.

Roubens, M. et Vincke, Ph. (1985), *Preference modelling*, Springer-Verlag, Berlin.

Roy, B. (1985), *Méthodologie multicritère d'aide à la décision*, Economica, Paris. Traduction anglaise : Multicriteria methodology for decision aiding, Kluwer, Dordrecht, 1996.

Roy, B. (1991), The outranking approach and the foundations of ELECTRE methods, *Theory and Decision* **31**, 49–73.

Roy, B. et Bouyssou, D. (1993), *Aide multicritère à la décision : Méthodes et cas*, Economica, Paris.

Saari, D. G. (1994), *Geometry of voting*, Springer-Verlag, Heidelberg.

Satterthwaite, M. A. (1975), Strategyproofness and Arrow's conditions: existence and correspondence theorems for voting procedures and social welfare functions, *Journal of Economic Theory* **10**, 187–217.

Sen, A. K. (1970), The impossibility of a paretian liberal, *Journal of Political Economy* **72**, 152–157.

Sen, A. K. (1983), Liberty and social choice, *Journal of Philosophy* **80**, 5–28.

Sen, A. K. (1986), Social choice theory, *in* K. J. Arrow et M. D. Intriligator (Eds), *Handbook of mathematical economics*, Vol. 3, North-Holland, Amsterdam, pp. 1073–1181.

Sen, A. K. (1992), Minimal liberty, *Economica* **59**, 139–159.

Smith, J. H. (1973), Aggregation of preferences with a variable electorate, *Econometrica* **41**, 1027–1041.

Vanderpooten, D. (1990), The construction of prescriptions in outranking methods, *in* C. A. Bana e Costa (Ed.), *Readings in Multiple Criteria Decision Aid*, Springer-Verlag, pp. 184–215.

Vansnick, J.-C. (1986a), De Borda et Condorcet à l'agrégation multicritère, *Ricerca Operativa* (40), 7–44.

Vansnick, J.-C. (1986b), On the problem of weights in multiple criteria decision making: the noncompensatory approach, *European Journal of Operational Research* **24**, 288–294.

Vincke, Ph. (1989), *L'aide multicritère à la décision*, Éditions de l'Université de Bruxelles - Éditions Ellipses, Bruxelles-Paris. Traduction anglaise : Multi-criteria decision aid, Wiley, New York, 1992.

Vincke, Ph. (1992), Exploitation of a crisp relation in a ranking problem, *Theory and Decision* **32**, 221–240.

von Winterfeldt, D. et Edwards, W. (1986), *Decision analysis and behavorial research*, Cambridge University Press, Cambridge.

Wakker, P. P. (1989), *Additive representations of preferences: A new foundation of decision analysis*, Kluwer, Dordrecht.

Young, H. P. (1974), An axiomatization of Borda's rule, *Journal of Economic Theory* **9**, 43–52.

Young, H. P. (1975), Social choice scoring functions, *SIAM Journal on Applied Mathematics* **28**, 824–838.