« Suivre les traces »

Représentations numériques non conventionnelles de relations de préférence sur des espaces produits

Denis Bouyssou
CNRS–LAMSADE

Marc Pirlot
Faculté Polytechnique de Mons

ULB – février 2003

Plan

- Introduction et Motivation
- Notations
- Modèles à niveaux
- Modèles à écarts
- Modèles à niveaux et écarts
- Discussion : Extensions, Remarques, Problèmes ouverts

Introduction et Motivation

Contexte : analyse multicritère

2 traditions

- **Théorie de la décision** : mesurage conjoint
- **Empirique** : Dominance (au moins aussi bon que sur tous les critères) + principes additionnels

Peu de communication entre ces deux écoles !

Objectif : Proposer un cadre général englobant ces deux traditions sur la base de représentations numériques

Représentations numériques de relations non nécessairement transitives $\rightarrow$
« Suivre les Traces »

Approche empirique

- Ensemble d'*attributs* $N = \{1, 2, \ldots, n\}$
- Ensemble d'*objets* évalués sur les attributs de N: $Y \subseteq X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$
- *Relation binaire* (complète, transitive) *sur chaque attribut* : R_i sur X_i

Dominance : $x \, \Delta \, y \Leftrightarrow x_i R_i y_i \; \forall i \in N$

(préordre partiel si les R_i sont des préordres complets)

Objectif : Enrichir Δ pour bâtir une relation $\succsim$ sur X permettant d'élaborer une prescription

Exemples

- Méthodes de surclassement : « majorité » de critères avec discordance
- Autres : Choquet, Sugeno, Somme pondérée, Conjonctif, Disjonctif, etc.

Remarque : $\succsim$ pas nécessairement complète ou transitive

Mesurage Conjoint

- Ensemble d'*attributs* $N = \{1, 2, \dots, n\}$
- Ensemble d'*objets* évalués sur les attributs de N: $X = X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$
- *Relation binaire sur l'ensemble des objets* : $\succsim$

Objectif : Étudier/Construire/Axiomatiser des représentations numériques de $\succsim$

Intérêt des représentations numériques

- Manipulation de $\succsim$
- Construction de représentations (preuves constructives)

Intérêt d'une analyse axiomatique

- Tests des modèles
- Compréhension des modèles

Produits cartésiens : $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$

- **Analyse multicritère**
  - x est une *action* évaluée sur plusieurs attributs
- **Décision dans l'incertain**
  - x est un *acte* évalué dans plusieurs état de la nature
- **Économie**
  - x est un *panier de consommation*
- **Décision dynamique**
  - x est une *action* évaluée à divers moment dans le temps
- **Choix social**
  - x est une *distribution* (de revenus) entre plusieurs individus

$x \succsim y$ signifie « x est au moins aussi bonne que y »

Modèle central : Utilité additive

$$x \succsim y \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} u_i(x_i) \geq \sum_{i=1}^{n} u_i(y_i)$$

Exemples:

- Analyse multicritère : Utilité additive (MAUT, UTA, MACBETH), *Goal programming*, *Compromise Programming*
- Décision dans l'incertain : SEU
- Décision dynamique : Actualisation
- Choix social : Mesure d'inégalité à la Atkinson/Sen

Base théorique solide : Debreu 1960, Luce & Tukey 1964

Problèmes

- **Problèmes empiriques**
  - Transitivité de $\sim$ (Luce 1956)
  - Transitivité de $\succ$ (May 1954, Tversky 1969)
  - Conditions additionnelles : Indépendance (EU vs. Choquet EU)

- **Problèmes techniques**
  - Asymétrie : cas « fini » vs. cas « riche »
  - Asymétrie : cas $n = 2$ vs. $n \geq 3$

Envisager des représentations numériques plus souples tolérant l'incomplétude et/ou la non transitivité

$\rightarrow$ **Traces**

Autres modèles

Transitif Décomposable (Krantz et al. 71)

$$x \succsim y \Leftrightarrow F(u_1(x_1), u_2(x_2), \ldots, u_n(x_n)) \geq F(u_1(y_1), u_2(y_2), \ldots, u_n(y_n))$$

Additif non transitif (Bouyssou 86, Fishburn 90, 91, Vind 91)

$$x \succsim y \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} p_i(x_i, y_i) \geq 0$$

Différences additives (Tversky 69, Fishburn 92)

$$x \succsim y \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} \Phi_i(u_i(x_i) - u_i(y_i)) \geq 0$$

Traces

S relation binaire sur A

- **Trace gauche** : aS^+b si $[bSc \Rightarrow aSc]$
  - *Équivalence gauche* : $aS^{\approx +}b$ si $[bSc \Leftrightarrow aSc]$
- **Trace droite** : aS^-b si $[cSa \Rightarrow cSb]$
  - *Équivalence droite* : $aS^{\approx -}b$ si $[cSa \Leftrightarrow cSb]$
- **Trace gauche/droite** : $aS^{\pm}b$ si $[aS^+b$ et $aS^-b]$ $(S^{\pm} = S^+ \cap S^-)$
  - *Équivalence gauche/droite* : $aS^{\approx\pm}b$ si $([bSc \Leftrightarrow aSc]$ et $[cSb \Leftrightarrow cSa])$ $(S^{\approx\pm} = S^{\approx +} \cap S^{\approx -})$

$S^{\approx +}$, $S^{\approx -}$ et $S^{\approx\pm}$ sont toujours réflexives, symétriques et transitives (relations d'équivalence) et sont les parties symétriques de S^+, S^- et $S^{\pm}$

S^+, S^- et $S^{\pm}$ sont toujours réflexives et transitives (préordres partiels)

Que faut-il supposer pour que S^+, S^- et $S^{\pm}$ soient complètes ?

Relations de Ferrers

$$\left.\begin{array}{c} aSb \\ \text{et} \\ cSd \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} aSd \\ \text{ou} \\ cSb \end{array}\right.$$

Ferrers $\Leftrightarrow S^+$ complète $\Leftrightarrow S^-$ complète

Ferrers + réflexivité = Ordre d'intervalle

Représentation numérique : $aSb \Leftrightarrow l(b) \leq r(a)$

l et r représentent les bords gauche et droit des intervalles :

$$\begin{array}{rcl} aS^{\rightarrow +}b & \Rightarrow & l(a) > l(b) \\ aS^{\rightarrow -}b & \Rightarrow & r(a) > r(b) \end{array}$$

Relations Semi-transitives

$$\left.\begin{array}{c} aSb \\ \text{et} \\ bSc \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} aSd \\ \text{ou} \\ dSc \end{array}\right.$$

Semi-transitivité $\Leftrightarrow [aS^+b \text{ ou } bS^-a]$

Ferrers + semi-transitivité $\Leftrightarrow S^\pm = S^+ \cap S^-$ complète (préordre complet)

Ferrers + semi-transitivité + réflexivité = quasi-ordre

Représentation numérique (cas fini) :

$$aSb \Leftrightarrow l(b) \leq r(a) \text{ avec } r(a) = l(a) + k, k \geq 0$$

$$[aS^{\rightarrow\pm}b \Leftrightarrow (aS^{\rightarrow+}b \text{ ou } aS^{\rightarrow-}b)] \Rightarrow l(a) > l(b)$$

Utilisation de la notion de trace

Traces

- Relation de « couverture » : choix à partir d'une relation binaire (éléments maximaux d'une trace) (Laslier 1997)

Traces complètes

- Ordre d'intervalle et Quasi-ordre (Traces complètes)
- Famille de relations binaires et relations valuées (Traces complètes)
  - Représentation numérique associée utilisant le(s) préordre(s) sous-jacent(s)

Idée

- dans le cadre du mesurage conjoint, *définir des traces sur chaque attribut*
- imposer des conditions pour que ces traces soient *complètes*
- étudier les *représentations numériques* associées

Notations

- $N = \{1, 2, \ldots, n\}$: ensemble d'attributs
- $X = \prod_{i=1}^{n} X_i$ avec $n \geq 2$: ensemble *fini ou infini dénombrable* d'actions
- $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in X$
- (x_J, y_{-J}) et $(x_i, y_{-i}) \in X$, $X_{-J} = \prod_{i \notin J} X_i$, $X_{-i} = \prod_{j \neq i} X_j$
- $\succsim$ relation binaire sur X (« au moins aussi bon que »)
- $\succ$ partie *asymétrique* de $\succsim$
- $\sim$ partie *symétrique* de $\succsim$

Remarque : on peut généraliser au cas d'un ensemble X quelconque

Préférences marginales

Préférence marginale sur $i \in N$:

$$x_i \succsim_i y_i \text{ si } (x_i, z_{-i}) \succsim (y_i, z_{-i}), \forall z_{-i} \in X_{-i}$$

Séparabilité faible

$$[\exists b_{-i} \in X_{-i} : (x_i, b_{-i}) \succ (y_i, b_{-i})] \Rightarrow [x_i \succsim_i y_i]$$

$$\succsim_i \text{ complète } \Leftrightarrow \succsim \text{ faiblement séparable et marginalement complète}$$

Indépendance faible, $\forall i \in N$

$$[\exists b_{-i} \in X_{-i} : (x_i, b_{-i}) \succsim (y_i, b_{-i})] \Rightarrow [x_i \succsim_i y_i]$$

Indépendance, $\forall J \subseteq N$

$$[\exists b_{-J} \in X_{-J} : (x_J, b_{-J}) \succsim (y_J, b_{-J})] \Rightarrow [x_J \succsim_J y_J]$$

Indépendance $\Rightarrow$ Indépendance faible $\Rightarrow$ Séparabilité faible

Traces marginales sur les niveaux

Traces marginales sur $i \in N$:

$$x_i \succsim_i^+ y_i \Leftrightarrow [(y_i, a_{-i}) \succsim z \Rightarrow (x_i, a_{-i}) \succsim z]$$

$$x_i \succsim_i^- y_i \Leftrightarrow [z \succsim (x_i, a_{-i}) \Rightarrow z \succsim (y_i, a_{-i})]$$

$$x_i \succsim_i^\pm y_i \Leftrightarrow [x \succsim_i^+ y \text{ et } x \succsim_i^- y]$$

Traces marginales $\neq$ préférences marginales

$$x \succsim y \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} u_i(x_i) \geq \sum_{i=1}^{n} u_i(y_i) - q$$

Si $\succsim$ est réflexive
$$\begin{aligned} x_i \succsim_i^+ y_i &\quad\Rightarrow\quad x_i \succsim_i y_i \\ x_i \succsim_i^- y_i &\quad\Rightarrow\quad x_i \succsim_i y_i \end{aligned}$$

Représentations numériques triviales

Toute relation binaire $\succsim$ sur X peut se représenter sous la forme :

$$x \succsim y \Leftrightarrow \mathcal{F}(x, y) \geq 0$$

avec $\mathcal{F} : X^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$$\mathcal{F}(x, y) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \succsim y \\ -1 \text{ sinon} \end{cases}$$

Toute relation binaire $\succsim$ sur X peut se représenter sous la forme :

$$x \succsim y \Leftrightarrow F(\langle u_i(x_i) \rangle, \langle u_i(y_i) \rangle) \geq 0$$

avec $F : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$ et $u_i : X_i \rightarrow \mathbb{R}$

$$x_i \sim_i^{\pm} y_i \Leftrightarrow u_i(x_i) = u_i(y_i)$$

$$F(\langle u_i(x_i) \rangle, \langle u_i(y_i) \rangle) = \mathcal{F}(x, y)$$

Variantes

$$x \succsim y \Leftrightarrow F(\langle u_i(x_i)\rangle, \langle u_i(y_i)\rangle) \geq 0$$

- $\succsim$ réflexive $\Leftrightarrow$ on peut choisir F telle que : $F(\langle u_i(x_i)\rangle, \langle u_i(x_i)\rangle) \geq 0$
- $\succsim$ complète $\Leftrightarrow$ on peut choisir F telle que :
  $F(\langle u_i(x_i)\rangle, \langle u_i(y_i)\rangle) = -F(\langle u_i(y_i)\rangle, \langle u_i(x_i)\rangle)$ (« antisymétrie »)

$$F(\langle u_i(x_i)\rangle, \langle u_i(y_i)\rangle) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \succ y \\ 0 \text{ si } x \sim y \\ -1 \text{ sinon} \end{cases}$$

Modèles à niveaux : supposer que F a de « bonnes propriétés »de monotonie (présence de u_i + propriétés de monotonie)

Modèles à niveaux

$$(N) \quad x \succsim y \Leftrightarrow F(\langle u_i(x_i)\rangle, \langle u_i(y_i)\rangle) \geq 0$$

- $(N1) = (N)$ avec $F(\ \approx\nearrow\ ,\ \approx\searrow\ )$ i.e. F est non-décroissante en ses n premières coordonnées et non-croissante en ses n dernières coordonnées
- $(N1') = (N)$ avec $F(\ \nearrow\ ,\ \searrow\ )$
- $(N2) = (N1)$ avec F « antisymétrique »
- $(N2') = (N1')$ avec F « antisymétrique »

Remarque : on peut envisager d'autres modèles : u_i et v_i

Axiomes : $AC1$

$$AC1_i \text{ si } \left.\begin{array}{r} (x_i, a_{-i}) \succsim y \\ \text{et} \\ (z_i, b_{-i}) \succsim w \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} (z_i, a_{-i}) \succsim y \\ \text{ou} \\ (x_i, b_{-i}) \succsim w \end{array}\right.$$

$$AC1_i \Leftrightarrow \succsim_i^+ \text{ complète } \Leftrightarrow \succsim_i^+ \text{ préordre complet}$$

- $AC1_i$ « ressemble » à Ferrers sur un attribut
- Ferrers $\not\Rightarrow AC1$, $AC1 \not\Rightarrow$ Ferrers ($AC1 = AC1_i \ \forall i \in N$)
- $AC1$ + réflexivité $\Rightarrow$ Séparabilité faible

Axiomes : $AC2$

$$AC2_i \text{ si } \left.\begin{array}{r} y \succsim (x_i, a_{-i}) \\ \text{et} \\ w \succsim (z_i, b_{-i}) \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} y \succsim (z_i, a_{-i}) \\ \text{ou} \\ w \succsim (x_i, b_{-i}) \end{array}\right.$$

$$AC2_i \Leftrightarrow \succsim_i^- \text{ complète } \Leftrightarrow \succsim_i^- \text{ préordre complet}$$

- $AC2_i$ « ressemble » à Ferrers sur un attribut
- Ferrers $\not\Rightarrow AC2$, $AC2 \not\Rightarrow$ Ferrers
- $AC2 \not\Rightarrow AC1$, $AC1 \not\Rightarrow AC2$
- $AC2$ + réflexivité $\Rightarrow$ Séparabilité faible

Axiomes : $AC3$

$$AC3_i \text{ si } \left.\begin{array}{r}(x_i, a_{-i}) \succsim y \\ \text{et} \\ w \succsim (x_i, b_{-i})\end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}(z_i, a_{-i}) \succsim y \\ \text{ou} \\ w \succsim (z_i, b_{-i})\end{array}\right.$$

$$AC3_i \Leftrightarrow [Non[x_i \succsim_i^+ y_i] \Rightarrow y_i \succsim_i^- x_i] \Leftrightarrow [Non[x_i \succsim_i^- y_i] \Rightarrow y_i \succsim_i^+ x_i]$$

$$AC123_i \Leftrightarrow \succsim_i^{\pm} \text{ complète } \Leftrightarrow \succsim_i^{\pm} \text{ préordre complet}$$

- $AC3_i$ « ressemble » à semi-transitivité sur un attribut
- Semi-transitivité $\not\Rightarrow$ $AC3$, $AC3 \not\Rightarrow$ Semi-transitivité
- Ferrers + Semi-transitivité $\not\Rightarrow$ $AC123$, $AC123 \not\Rightarrow$ Ferrers + Semi-transitivité

Résultats

$$(N1) \quad x \succsim y \Leftrightarrow F(\langle u_i(x_i)\rangle, \langle u_i(y_i)\rangle) \geq 0$$

F non décroissante, non croissante

$$\Leftrightarrow$$

$$(N1') \quad x \succsim y \Leftrightarrow F(\langle u_i(x_i)\rangle, \langle u_i(y_i)\rangle) \geq 0$$

F croissante, décroissante

$$\Leftrightarrow$$

$\succsim$ vérifie $AC123$

Idée de la preuve

- $AC123 \Leftrightarrow \succsim_i^{\pm}$ est un préordre complet
- choisir une représentation $u_i(x_i)$ de $\succsim_i^{\pm}$:

$$x_i \succsim_i^{\pm} y_i \quad \Leftrightarrow \quad u_i(x_i) \geq u_i(y_i)$$

- $F = \begin{cases} \exp(\sum_i u_i(x_i) - \sum_i u_i(y_i)) \text{ si } x \succsim y \\ -\exp -(\sum_i u_i(x_i) - \sum_i u_i(y_i)) \text{ sinon} \end{cases}$

F définie ainsi est strictement monotone et donc $(N1) \Leftrightarrow (N1')$

Résultats

$$(N2) \quad x \succsim y \Leftrightarrow F(\langle u_i(x_i)\rangle, \langle u_i(y_i)\rangle) \geq 0$$

F non décroissante, non croissante, antisymétrique

$$\Leftrightarrow$$

$\succsim$ est complète et vérifie $AC123$

$$F(\langle u_i(x_i)\rangle; \langle u_i(y_i)\rangle) = \begin{cases} \exp(\sum_{i=1}^n (u_i(x_i) - u_i(y_i))) \text{ si } x \succ y, \\ 0 \text{ si } x \sim y, \\ -\exp -(\sum_{i=1}^n (u_i(x_i) - u_i(y_i))) \text{ sinon.} \end{cases}$$

Résultats

$$(N2') \quad x \succsim y \Leftrightarrow F(\langle u_i(x_i)\rangle, \langle u_i(y_i)\rangle) \geq 0$$

F croissante, décroissante, antisymétrique

$$\Leftrightarrow$$

$\succsim$ est complète et vérifie $AC1, AC2, AC3^+$

$AC3_i^+$ si

$\succsim$ vérifie $AC3_i$ et lorsque l'une des conclusions de $AC3_i$ est fausse l'autre est vérifiée avec $\succ$ au lieu de $\succsim$

$AC1_i$, $AC2_i$ et $AC3_i^+ \Rightarrow$

$[x \succsim y$ et $z_i \succ_i^{\pm} x_i] \Rightarrow (z_i, x_{-i}) \succ y$

$[x \succsim y$ et $y_i \succ_i^{\pm} w_i] \Rightarrow x \succ (w_i, y_{-i})$

Préférences marginales et Traces marginales

- si $\succsim$ est réflexive et vérifie $AC1_i$ ou $AC2_i$ alors $\succsim_i$ est un *ordre d'intervalle*
- si de plus $\succsim$ vérifie $AC3_i$ alors $\succsim_i$ est un *quasi-ordre*
- si $\succsim$ est réflexive et vérifie $AC1_i$, $AC2_i$ et $AC3_i^+$ alors $\succsim_i$ est un *préordre complet* et $\succsim_i = \succsim_i^{\pm}$

- $AC1$, $AC2$ et $AC3(^+)$ sont indépendantes dans l'ensemble des quasi-ordres

Cas des préordres complets

Tout préordre complet $\succsim$ sur X peut se représenter sous la forme :

$$x \succsim y \Leftrightarrow \mathcal{G}(x) \geq \mathcal{G}(y)$$

avec $\mathcal{G} : X^2 \to \mathbb{R}$

Tout préordre complet $\succsim$ sur X peut se représenter sous la forme :

$$x \succsim y \Leftrightarrow G(\langle u_i(x_i)\rangle) \geq G(\langle u_i(y_i)\rangle)$$

avec $G : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ et $u_i : X_i \to \mathbb{R}$

$$x_i \sim_i^{\pm} y_i \Leftrightarrow u_i(x_i) = u_i(y_i)$$

$$G(\langle u_i(x_i)\rangle) = \mathcal{G}(x)$$

Préordres complets

$$x \succsim y \Leftrightarrow G(\langle u_i(x_i)\rangle) \geq G(\langle u_i(y_i)\rangle)$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\succsim \text{ préordre complet}$$

De plus :

- $AC1 \Leftrightarrow AC2 \Leftrightarrow AC3 \Leftrightarrow \succsim$ est faiblement séparable $\Leftrightarrow G$ peut être choisie *non décroissante* en tous ses arguments.
- $AC3^+ \Leftrightarrow \succsim$ est faiblement indépendante $\Leftrightarrow G$ peut être choisie *croissante* en tous ses arguments.

Résumé : Modèles à niveaux

Propriétés	– (*)	complète	préordre complet
$x \succsim y \Leftrightarrow$	$F(x,y) \geq 0$	$F(x,y) = -F(y,x)$	$F(x,y) = G(x) - G(y)$
$F(\approx\nearrow, \approx\searrow)$	$AC123$	compl. + $AC123$	p.c. + f. séparable
$F(\nearrow, \searrow)$	$AC123$	compl. + $AC123^+$	p.c. + f. indép

(*) Si $\succsim$ réflexive, on peut toujours choisir F telle que $F(x,x) \geq 0$

Modèles à niveaux : u_i + monotonie

$$x \succsim y \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} u_i(x_i) \geq \sum_{i=1}^{n} u_i(y_i)$$

$$x \succsim y \Leftrightarrow F(u_i(x_i)) \geq F(u_i(y_i))$$

$$x \succsim y \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} \Phi_i(u_i(x_i) - u_i(y_i)) \geq 0$$

$$x \succsim y \Leftrightarrow F(u_i(x_i), u(y_i)) \geq 0$$

Modélisation des écarts : $u_i(x_i) - u_i(y_i)$

Indépendance vs. Séparabilité faible

Transitivité

Traces marginales sur les écarts

Relations binaires $\succsim_i^*$ et $\succsim_i^{**}$ sur X_i^2

$$(x_i, y_i) \succsim_i^* (z_i, w_i) \Leftrightarrow [(z_i, a_{-i}) \succsim (w_i, b_{-i}) \Rightarrow (x_i, a_{-i}) \succsim (y_i, b_{-i})]$$

(ne prend en compte que $\succsim$ (et pas $\succ$) et ne lie pas (x_i, y_i) et (y_i, x_i))

$$(x_i, y_i) \succsim_i^{**} (z_i, w_i) \Leftrightarrow [(x_i, y_i) \succsim_i^* (z_i, w_i) \text{ et } (w_i, z_i) \succsim_i^* (y_i, x_i)]$$

$\succsim_i^*$ et $\succsim_i^{**}$ sont toujours réflexives et transitives

- $(x_i, y_i) \sim_i^* (z_i, w_i) \Leftrightarrow [(z_i, a_{-i}) \succsim (w_i, b_{-i}) \Leftrightarrow (x_i, a_{-i}) \succsim (y_i, b_{-i})]$
- $(x_i, y_i) \sim_i^{**} (z_i, w_i) \Leftrightarrow [(x_i, y_i) \sim_i^* (z_i, w_i) \text{ et } (w_i, z_i) \sim_i^* (y_i, x_i)]$

$\sim_i^*$ et $\sim_i^{**}$ sont toujours réflexives, symétriques et transitives (parties symétriques de $\succsim_i^*$ et $\succsim_i^{**}$)

Représentations numériques triviales

Toute relation binaire $\succsim$ sur X peut se représenter sous la forme :

$$x \succsim y \Leftrightarrow \mathcal{F}(x, y) \geq 0$$

avec $\mathcal{F} : X^2 \rightarrow \mathbb{R}$

Toute relation binaire $\succsim$ sur X peut se représenter sous la forme :

$$x \succsim y \Leftrightarrow F(\langle p_i(x_i, y_i) \rangle) \geq 0$$

avec $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ et $p_i : X_i^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$$(x_i, y_i) \sim_i^* (z_i, w_i) \Leftrightarrow p_i(x_i, y_i) = p_i(z_i, w_i)$$

$$F(\langle p_i(x_i, y_i) \rangle) = \mathcal{F}(x, y)$$

Modèles à écarts

(E) $\quad x \succsim y \Leftrightarrow F(p_1(x_1, y_1), \ldots, p_n(x_n, y_n)) \geq 0$ $\quad$ (Trivial)

$(E0)$ $\quad (E)$ avec $p_i(x_i, x_i) = 0$ et $F(0) \geq 0$

$(E1)$ $\quad (E0)$ avec F non décroissante en tous ses arguments

$(E1')$ $\quad (E0)$ avec F croissante en tous ses arguments

$(E2)$ $\quad (E1)$ avec p_i antisymétrique $(p_i(x_i, y_i) = -p_i(y_i, x_i))$

$(E2')$ $\quad (E1')$ avec p_i antisymétrique

$(E3)$ $\quad (E2)$ avec F impaire $(F(\mathbf{x}) = -F(-\mathbf{x}))$

$(E3')$ $\quad (E2')$ avec F impaire

- $(Ek') \Rightarrow (E(k-1)')$, $(Ek) \Rightarrow (E(k-1))$
- tous les modèles sont des cas particuliers de $(E0)$

Intuition

$$x \succsim y \Leftrightarrow F(p_1(x_1, y_1), \ldots, p_n(x_n, y_n)) \geq 0$$

- p_i modélise les « écarts de préférence » entre couples de X_i
- F combine les écarts de manière adéquate
- Antisymétrie de p_i : l'écart (x_i, y_i) est lié à l'écart opposé (y_i, x_i) (« rapproche » p_i d'une soustraction)
- Imposer F croissante et impaire « rapproche » F d'une addition

Axiomes : $RC1$

$$RC1_i : \left.\begin{array}{c} (x_i, a_{-i}) \succsim (y_i, b_{-i}) \\ \text{et} \\ (z_i, c_{-i}) \succsim (w_i, d_{-i}) \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} (z_i, a_{-i}) \succsim (w_i, b_{-i}) \\ \text{ou} \\ (x_i, c_{-i}) \succsim (y_i, d_{-i}) \end{array}\right.$$

Interprétation : l'écart (x_i, y_i) est soit plus grand soit plus petit que l'écart (z_i, w_i)

Conséquences

$(x_i, y_i) \succsim_i^* (z_i, w_i) \Leftrightarrow [(z_i, a_{-i}) \succsim (w_i, b_{-i}) \Rightarrow (x_i, a_{-i}) \succsim (y_i, b_{-i})]$

est complète (et donc préordre complet)

$RC1$ et $\succsim$ marginalement complète $\Rightarrow$ Séparabilité faible

Axiomes : $RC2$

$$RC2_i : \left.\begin{array}{c}(x_i, a_{-i}) \succsim (y_i, b_{-i}) \\ \text{et} \\ (y_i, c_{-i}) \succsim (x_i, d_{-i})\end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{c}(z_i, a_{-i}) \succsim (w_i, b_{-i}) \\ \text{ou} \\ (w_i, c_{-i}) \succsim (z_i, d_{-i})\end{array}\right.$$

Interprétation l'écart (x_i, y_i) est lié à l'écart opposé (y_i, x_i)

Conséquences

$Non[(x_i, y_i) \succsim_i^* (z_i, w_i)] \Rightarrow (y_i, x_i) \succsim_i^* (w_i, z_i)$

$[RC1$, $RC2] \Leftrightarrow \succsim_i^{**}$ est complète (et donc préordre complet)

$RC2 \Rightarrow$ Indépendance

Axiomes : TC

$$TC_i : \left.\begin{array}{c}(x_i, a_{-i}) \succsim (y_i, b_{-i}) \\ \text{et} \\ (z_i, b_{-i}) \succsim (w_i, a_{-i}) \\ \text{et} \\ (w_i, c_{-i}) \succsim (z_i, d_{-i})\end{array}\right\} \Rightarrow (x_i, c_{-i}) \succsim (y_i, d_{-i})$$

- TC et $\succsim$ réflexive $\Rightarrow$ Indépendance
- TC et $\succsim$ complète $\Rightarrow$ $RC1$ et $RC2$
- TC et $\succsim$ complète $\Rightarrow [x \succsim y$ et $(z_i, w_i) \succ_i^{**} (x_i, y_i)] \Rightarrow (z_i, x_{-i}) \succ (w_i, y_{-i})$

Résultats

Si X est fini ou infini dénombrable alors :

$$
\begin{array}{lcc}
(E0) & \Leftrightarrow & \text{réflexivité, indépendance} \\
(E1') & \Leftrightarrow & \text{réflexivité, indépendance, } RC1 \\
(E2') & \Leftrightarrow & \text{réflexivité, } RC1\text{, } RC2 \\
(E3) & \Leftrightarrow & \text{complétude, } RC1\text{, } RC2 \\
(E3') & \Leftrightarrow & \text{complétude, } TC
\end{array}
$$

- $(E1) \Leftrightarrow (E1')$, $(E2) \Leftrightarrow (E2')$
- conditions indépendantes

Cas général : ajouter une condition d'« ordre-densité » garantissant que $\succsim_i^*$ (et donc $\succsim_i^{**}$) a une représentation dans $\mathbb{R}$

Modèles à écarts : $p_i(x_i, y_i)$ + monotonie

$$x \succsim y \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} u_i(x_i) \geq \sum_{i=1}^{n} u_i(y_i)$$

$$x \succsim y \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} \Phi_i(u_i(x_i) - u_i(y_i)) \geq 0$$

$$x \succsim y \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} p_i(x_i, y_i) \geq 0$$

$$x \succsim y \Leftrightarrow F(p_i(x_i, y_i)) \geq 0$$

Modélisation des niveaux : $u_i(x_i) - u_i(y_i)$

Indépendance vs. Séparabilité faible

Transitivité

Modèles à écarts et niveaux : $u_i(x_i)$ et $p_i(x_i, y_i)$ + Monotonie

$$x \succsim y \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} u_i(x_i) \geq \sum_{i=1}^{n} u_i(y_i)$$

$$x \succsim y \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} \Phi_i(u_i(x_i) - u_i(y_i)) \geq 0$$

Autres modèles ?

$$x \succsim y \Leftrightarrow F(\langle \phi_i(u_i(x_i), u_i(y_i)) \rangle) \geq 0$$

Modèles à écarts et à niveaux

Toute relation binaire $\succsim$ sur X peut se représenter sous la forme :

$$x \succsim y \Leftrightarrow F(\langle \phi_i(u_i(x_i), u_i(y_i)) \rangle) \geq 0$$

avec $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\phi_i : X_i^2 \to \mathbb{R}$, $u_i : X_i \to \mathbb{R}$

$$(x_i, y_i) \sim_i^* (z_i, w_i) \Leftrightarrow p_i(x_i, y_i) = p_i(z_i, w_i)$$

$$F(\langle p_i(x_i, y_i) \rangle)$$

$$x_i \sim_i^{\pm} y_i \Leftrightarrow u_i(x_i) = u_i(y_i)$$

$$\phi_i(u_i(x_i), u_i(y_i)) = p_i(x_i, y_i)$$

$$F(\langle \phi_i(u_i(x_i), u_i(y_i)) \rangle) = F(\langle p_i(x_i, y_i) \rangle)$$

Ajouter des conditions de monotonie sur F et ϕ_i

Modèles à écarts et niveaux

(E1′) $x \succsim y \Leftrightarrow F(p_1(x_1, y_1), \ldots, p_n(x_n, y_n)) \geq 0$

avec $p_i(x_i, x_i) = 0$, $F(0) \geq 0$ et F croissante en tous ses arguments

(E2′) $(E1')$ avec p_i antisymétrique

(E3) $(E2)$ avec F impaire

(E3′) $(E2')$ avec F impaire

combinés avec :

(Niv) $p_i(x_i, y_i) = \phi_i(u_i(x_i), u_i(y_i))$ avec ϕ_i non décroissante, non croissante

(Niv′) (Niv) avec ϕ_i croissante, décroissante

Résultats

$$\begin{array}{rcl}
(\mathrm{Niv}') + (E1') & \Leftrightarrow & \succsim \text{ réflexive, indépendante, } RC1,\ AC123 \\
(\mathrm{Niv}') + (E2') & \Leftrightarrow & \succsim \text{ réflexive, } RC1,\ RC2,\ AC123 \\
(\mathrm{Niv}') + (E3) & \Leftrightarrow & \succsim \text{ complète, } RC1,\ RC2,\ AC123 \\
(\mathrm{Niv}) + (E3') & \Leftrightarrow & \succsim \text{ complète, } TC,\ AC123 \\
(\mathrm{Niv}') + (E3') & \Leftrightarrow & \succsim \text{ complète, } TC,\ AC123^+
\end{array}$$

- (Niv) $\Leftrightarrow$ (Niv$'$) avec $(E1')$, $(E2')$ et $(E3)$
- $AC123^+$ et TC indépendantes dans l'ensemble des relations complètes
- Orthogonalité Niveaux $\leftrightarrow$ Écarts

Idée de la preuve

$x_i \succsim_i^+ y_i \Leftrightarrow [(x_i, w_i) \succsim_i^* (y_i, w_i), \forall w_i \in X_i]$

$x_i \succsim_i^- y_i \Leftrightarrow [(w_i, y_i) \succsim_i^* (w_i, x_i), \forall w_i \in X_i]$

$x_i \succsim_i^\pm y_i \Leftrightarrow [(x_i, w_i) \succsim_i^{**} (y_i, w_i), \forall w_i \in X_i]$

$[AC123_i] \Leftrightarrow \succsim_i^*$ est fortement linéaire $\Leftrightarrow \succsim_i^{**}$ est fortement linéaire

$\succsim_i^{**}$ est fortement linéaire $\Leftrightarrow$

$[Non((y_i, z_i) \succsim_i^{**} (x_i, z_i))$ ou $Non((z_i, x_i) \succsim_i^{**} (z_i, y_i))] \Rightarrow$

$[(x_i, w_i) \succsim_i^{**} (y_i, w_i)$ et $(w_i, y_i) \succsim_i^{**} (w_i, x_i)]$

Non décroissant, non croissant : classique (Doignon et al. 86)

Croissant, décroissant : + subtil (utiliser le fait que p_i peut raffiner $\succsim_i^{**}$)

Résumé : Transitivité, Niveaux, Écarts

$$x \succsim y \Leftrightarrow F(x,y) \geq 0$$
$$\overline{\mathbf{T}}, \overline{\mathbf{N}}, \overline{\mathbf{E}}$$

$$x \succsim y \Leftrightarrow U(x) \geq U(y)$$
$$\mathbf{T}, \overline{\mathbf{N}}, \overline{\mathbf{E}}$$

$$x \succsim y \Leftrightarrow F(u_i(x_i), u_i(y_i)) \geq 0$$
$$\overline{\mathbf{T}}, \mathbf{N}, \overline{\mathbf{E}}$$

$$x \succsim y \Leftrightarrow F(p_i(x_i, y_i)) \geq 0$$
$$\overline{\mathbf{T}}, \overline{\mathbf{N}}, \mathbf{E}$$

$$x \succsim y \Leftrightarrow F(u_i(x_i)) \geq F(u_i(y_i))$$
$$\mathbf{T}, \mathbf{N}, \overline{\mathbf{E}}$$

$$x \succsim y \Leftrightarrow F(\langle \phi_i(u_i(x_i), u_i(y_i)) \rangle) \geq 0$$
$$\overline{\mathbf{T}}, \mathbf{N}, \mathbf{E}$$

$$x \succsim y \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} u_i(x_i) \geq \sum_{i=1}^{n} u_i(y_i)$$
$$\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{E}$$

$\mathbf{T}, \overline{\mathbf{N}}, \mathbf{E}$ n'existe pas ($RC12 \Rightarrow$ Indépendance, $\succsim_i$ préordre $\Rightarrow$ Traces sur les niveaux)

Applications

- Modèles à écarts
  - Caractérisation des structures de préférence non compensatoires (3 classes de $\succsim_i^{**}$)
  - Liens avec les modèles classiques : axiomatique, test
- Modèles à niveaux
  - Caractérisation des structures de préférence compatibles avec la dominance
  - Familles cohérentes de critères

Extensions

- Cas non dénombrable (ajout de conditions d'ordre-densité)
- Autres modèles possibles : $p_i(x_i, y_i) = \varphi_i(\underline{u_i}(x_i), \underline{v_i}(y_i))$
- Relations valuées : $F(p_i(x_i, y_i)) = \Phi(R(x, y))$
- Relations de similarité $(R(x, y) = R(y, x) \geq R(x, x))$
- Décision dans l'incertain $X = Y^n$

Voies de recherche

Modèles mixtes (Décomposables/additifs) :

- $x \succsim y$ ssi $\sum_{i=1}^{n} \varphi_i(u_i(x_i), u_i(y_i)) \geq 0$
- $x \succsim y$ iff $F(\langle u_i(x_i) - u_i(y_i) \rangle) \geq 0$

Forme fonctionnelle particulière pour F :

- $\sum$, max, min, Choquet, Sugeno, etc.