Aide multicritère à la décision et théorie du choix social

Denis Bouyssou

ESSEC
BP 105
F-95021 Cergy-Pontoise Cedex, France
p_bouyssou@edu.essec.fr

Patrice Perny

LIP6, Université Paris 6
4 Place Jussieu
F-75252 Paris Cedex 05, France
perny@poleia.lip6.fr

1. Introduction

La complexité et l'importance des problèmes de gestion rencontrés dans de nombreuses organisations conduisent parfois à rechercher une "préparation scientifique" des décisions, ce que l'on appelle une *aide à la décision*. L'homme d'étude chargé d'une telle préparation est, en pratique, confronté à des tâches nombreuses et variées : identification des acteurs concernés, formulation du problème, élaboration d'une liste d'actions possibles, définition d'un ou plusieurs critères d'évaluation de ces actions, collecte d'informations, analyses de sensibilité, élaboration d'une recommandation, par exemple, sous la forme d'une sélection des "bonnes" actions ou d'un classement de celles-ci, etc. Son travail est souvent compliqué du fait de la volonté ou de la nécessité de prendre en compte des points de vue ou des critères conflictuels pour évaluer les actions mises en évidence ; on parle alors d'*aide multicritère à la décision* (cf. Pomerol et Barba-Romero (1993), Roy (1985), Vincke (1989)). Se pose alors le problème de l'*agrégation des préférences* consistant à tenter de synthétiser les "préférences partielles" modélisées par chaque critère en un tout cohérent, une "préférence globale", pouvant servir de base à l'élaboration d'une recommandation.

Un problème d'agrégation très voisin a été depuis longtemps abordé dans le cadre de la *Théorie des Élections*. Il consiste en la recherche d'un "mécanisme" (on parlera dans la suite de “système électoral” ou de “méthode d’agrégation”) permettant d’agréger de manière “raisonnable” les avis exprimés lors d’une élection par plusieurs “votants” concernant divers “candidats” de façon à déterminer un “vainqueur” (le candidat élu) ou encore à classer par ordre de préférence les divers candidats. Si ce problème a une origine fort ancienne, il est d’usage de faire remonter son analyse moderne aux travaux de Borda (1781) et de Condorcet (1785). La variété des systèmes électoraux utilisés dans le monde montre qu’il est toujours d’actualité. Au cours des années 1950, les travaux de Arrow (1951), May (1952) et Black (1958) sur cette question ont suscité une immense littérature (cf. Kelly (1991)) constituant ce que l'on appelle aujourd'hui la *Théorie du Choix Social*. Son objet est d'étudier les liens devant ou pouvant exister entre les *préférences individuelles* des membres d’un groupe social et les décisions prises par ce groupe, décision reflétant la *préférence collective* du groupe.

Les nombreux résultats obtenus en théorie du choix social sont riches d'enseignements pour l'aide multicritère à la décision. On se convaincra aisément des liens entre ces deux domaines en notant qu’il est aisé de passer de l’un à l’autre en remplaçant respectivement les mots “action”, “critère”, “préférence partielle” et “préférence globale” par “candidat”, “votant”, “préférence individuelle” et “préférence collective” dans ce qui précède (cf. Arrow et Raynaud (1986)).

L’objet de cet article est de présenter de manière simple et non technique quelques résultats importants en théorie de choix social et de discuter leur impact pour l’aide multicritère à la décision. En nous appuyant sur des exemples classiques issus de problèmes de vote (§ 2) nous montrerons quelques difficultés liées à l’agrégation des préférences. Nous présenterons ensuite quelques résultats théoriques permettant de mieux comprendre la nature et l’ampleur de ces difficultés (§ 3). Nous tenterons ensuite d’analyser les conséquences de ces résultats pour l’aide multicritère à la décision (§ 4). Une abondante liste de référence permettra au lecteur d’approfondir ces questions.

2. Exemples

Les choix effectués par un groupe social affectent, en général, l’ensemble des individus qui le compose. Dès lors, il semble naturel de chercher à fonder ces choix sur les préférences de ces individus. Le choix d’un candidat (loi, projet, état social, etc.) dépend alors du résultat d’une “élection” permettant aux individus (on dira les “votants”) d’exprimer leurs préférences. Un “système électoral” (ou “méthode d’agrégation”) permet alors de tirer parti de l’information recueillie lors du scrutin pour déterminer le “candidat élu” ou, plus généralement, la décision prise au niveau du groupe. Comment, dans ces conditions, concevoir un “bon” système électoral ? Le “bon sens” nous incite à penser qu’un tel système doit être “démocratique”, c’est-à-dire permettre de refléter le plus fidèlement possible les préférences individuelles au niveau du groupe. Dans de nombreux pays (collectivités, groupes, comités), la traduction de cet idéal démocratique s'opère en faisant appel à une version ou à une autre d'une méthode de type "majoritaire" : un candidat *a* doit l'emporter sur un candidat *b* si une majorité de votants préfèrent *a* à *b*. Cette règle simple est très naturelle. Dans une situation ne faisant intervenir que deux candidats, elle soulève peu de problèmes (voir May (1952)). On peut l'adapter de bien des façons pour faire face à des situations faisant intervenir au moins trois candidats. Ces adaptations peuvent donner lieu à des phénomènes surprenants. Cette section vise à en donner quelques exemples. On considérera tout d'abord le cas des systèmes dit "uninominaux" dans lesquels "voter" consiste uniquement à désigner le nom d'un candidat (§ 2.1) avant d'aborder celui de systèmes où le vote peut prendre des formes plus complexes (§ 2.2).

Dans tous les exemples qui suivent on supposera que chaque votant est mesure de classer – avec d'éventuels ex aequo – l'ensemble des candidats par ordre de préférence ; on parle alors de préordre complet. On écrira $a\ P\ b\ P\ c$ pour signifier qu'un votant préfère le candidat *a* au candidat *b* qui est lui même préféré au candidat *c* (le candidat *a* étant dès lors préféré au candidat *c*.). Sauf exception, on supposera de plus que les votants sont *sincères*, c'est-à-dire utilisent les possibilités offertes par le système électoral pour révéler leurs "vraies" préférences. Notons enfin que la plupart des exemples que nous présenterons sont classiques. On en trouvera de nombreux autres ainsi que la description et l'analyse de multiples méthodes dans Moulin (1980, 1988), Dummett (1984), Fishburn (1977) ou Nurmi (1987).

2.1 Systèmes uninominaux

Exemple 1. *"Dictature de la majorité"*

Soit $\{a, b, c, ..., z\}$ l'ensemble des 26 candidats à une élection pour laquelle il y a 100 votants dont les préférences sont les suivantes :

51 votants ont les préférences
$$a\ P\ b\ P\ c\ P\ ...\ P\ y\ P\ z$$
49 votants ont les préférences
$$z\ P\ b\ P\ c\ P\ ...\ P\ y\ P\ a$$

Quel que soit le système électoral uninominal envisagé, il est clair, sous l'hypothèse de sincérité des votants, que le candidat *a* recevra 51 voix contre 49 au candidat *z* ; les autres candidats ne reçoivent aucune voix. Le candidat *a* est alors élu à la majorité absolue. On peut s'interroger ici sur la pertinence du résultat dans la mesure où le candidat élu est particulièrement mal perçu par une proportion importante de votants alors que le candidat *b* semble bien perçu par l'ensemble du groupe et pourrait constituer un "bon compromis". Un système majoritaire ainsi conçu laisse place à une possible "dictature de la majorité" et ne favorise pas nécessairement l'émergence de compromis. Il peut y avoir là un argument décisif pour adopter des systèmes électoraux où l'on demande aux votants de révéler une information plus riche que le seul nom du candidat qu'il préfère. On en verra des exemples au § 2.2.

La reconnaissance de l'existence d'une possible "dictature de la majorité" remonte à l'apparition de l'idée démocratique en Grèce. Bien d'autres phénomènes troublants peuvent cependant se produire avec des systèmes électoraux uninominaux de type majoritaire. Nous en donnons ici quelques exemples.

Exemple 2. *Respect de la "majorité" dans le système britannique*

Le système électoral en vigueur au Royaume Uni consiste en un vote uninominal à un tour ("*plurality voting*"). Est alors élu le candidat recevant le plus de suffrages à l'issue de l'unique tour de scrutin. Soit $\{a, b, c\}$ l'ensemble des candidats lors d'une élection comprenant 21 votants (rien n'empêche de multiplier ce chiffre par 10^6 si l'on souhaite davantage de réalisme) dont les préférences sont les suivantes :

10 votants ont les préférences	$a\ P\ b\ P\ c$
6 votants ont les préférences	$b\ P\ c\ P\ a$
5 votants ont les préférences	$c\ P\ b\ P\ a$

En supposant les votants sincères, l'issue du scrutin est facilement prévisible : le candidat a recevra 10 voix contre respectivement 6 et 5 aux candidats b et c. La candidat a est donc élu avec 10 voix sur 21. Il semble néanmoins qu'un tel résultat ne reflète que très imparfaitement les vœux de la majorité des électeurs. On notera en effet qu'une majorité absolue de votants préfère *tous* les autres candidats à celui qui est élu (11 votants sur 21 préfèrent b et c à a) !

Observons ce que donne sur cet exemple le scrutin uninominal à deux tours ("*plurality with runoff*") tel qu'il est pratiqué en France (on supposera qu'au second tour, seuls les deux candidats ayant reçu le plus de suffrages au premier tour restent en lice). Au premier tour a et b arrivent en tête avec respectivement 10 et 6 voix. En supposant que l'élimination du candidat c n'affecte pas les préférences des votants concernant les candidats qui se maintiennent au second tour, on obtient alors la situation suivante :

10 votants ont les préférences	$a\ P\ b$
11 votants ont les préférences	$b\ P\ a$

Le candidat b emporte alors l'élection avec 11 voix sur 21. On constatera aisément ici qu'aucun des deux candidats battus (a et c) n'est préféré à b par une majorité absolue d'électeurs. On ne peut toutefois pas tirer de cet exemple de conclusion générale en faveur du système français comme le montre l'exemple suivant.

Exemple 3. *Respect de la "majorité" dans le système français*

Soit {a, b, c, d} l'ensemble des candidats à une élection pour laquelle il y a 21 votants dont les préférences sont les suivantes :

10 votants ont les préférences	$b\ P\ a\ P\ c\ P\ d$
6 votants ont les préférences	$c\ P\ a\ P\ d\ P\ b$
5 votants ont les préférences	$a\ P\ d\ P\ b\ P\ c$

Avec le système français seuls les candidats b et c restent en lice au second tour et b l'emporte confortablement avec 15 voix sur 21 bien qu'une majorité absolue (11/21) de votants lui préfère à la fois le candidat a et le candidat d (nous laissons le soin au lecteur familier de la vie politique française la tâche, aisée, de mettre des noms à nos quatre candidats et d'imaginer une situation où les préférences présentées sont plausibles).

Les deux exemples précédents montrent donc qu'un scrutin à un ou deux tours fondé sur un principe majoritaire peut donc amener à l'élection d'un candidat alors qu'une majorité absolue de votants en préfère un ou plusieurs autres. Dans ces conditions, il peut être légitime de s'interroger sur l'hypothèse de "sincérité" des votants puisque ceux-ci réaliseront bien vite la possibilité d'occurrence de tels phénomènes. C'est l'idée du "vote utile".

Exemple 4. *"Vote utile" et sincérité des votants.*

Reprenons les données de l'exemple 3 et supposons que les 6 votants dont les préférences sont $c\ P\ a\ P\ d\ P\ b$ choisissent de ne pas être sincères et de se comporter comme si leurs préférences étaient $a\ P\ c\ P\ d\ P\ b$, ce qui traduit un "vote utile" au premier tour en faveur du candidat a. Il est clair qu'alors le candidat a est élu dès le premier tour de scrutin en recevant une majorité absolue de suffrages (11/21). On a vu à l'exemple précédent que si ces 6 votants avaient été sincères, le candidat b aurait été élu. En ne révélant pas leurs vraies préférences, ces 6 votants parviennent à faire élire le candidat a, ce qui leur est favorable puisqu'ils préfèrent a à b. On voit donc qu'un tel système peut ne pas inciter les votants à révéler leurs "vraies préférences". La méthode est dite **manipulable**. Une telle possibilité conduit à ne plus voir dans les élections un mécanisme de révélation des opinions du corps électoral et à donner une "prime à l'astuce", ce qui peut paraître éloignée d'un certain idéal "démocratique".

Le système de vote français laisse place à d'autres phénomènes troublants comme le montrent les trois exemples suivants.

Exemple 5. *Problème de monotonie dans le système français*

Soit $\{a, b, c\}$ l'ensemble des candidats à une élection pour laquelle il y a 17 votants. Suite à une enquête d'opinion publiée avant les élections, le candidat *a* conjecture que les préférences des votants sont les suivantes :

6 votants auraient les préférences	$a \; P \; b \; P \; c$
5 votants auraient les préférences	$c \; P \; a \; P \; b$
4 votants auraient les préférences	$b \; P \; c \; P \; a$
2 votants auraient les préférences	$b \; P \; a \; P \; c$

Avec le système français seuls les candidats *a* et *b* devraient passer le premier tour et *a* devrait gagner l'élection au second tour avec 11 voix sur 17. Ne trouvant pas cette prévision suffisamment confortable, le candidat *a* décide de lancer une campagne électorale active visant à séduire l'électorat de son plus proche concurrent, le candidat *b*. Supposons que l'enquête ait révélé de manière exacte la totalité des préférences des votants et que la campagne électorale ait l'effet recherché sur les deux derniers votants pour lesquels *a* est passé devant *b* (les préférences des autres votants restent inchangées). On obtient alors les préférences suivantes :

8 votants ont les préférences	$a \; P \; b \; P \; c$
5 votants ont les préférences	$c \; P \; a \; P \; b$
4 votants ont les préférences	$b \; P \; c \; P \; a$

Après le premier tour, on peut observer que *b* est effectivement victime de la campagne menée par *a* puisque c'est *a* et *c* qui restent en lice. Cependant, à cette première victime vient s'ajouter une seconde beaucoup plus inattendue. En effet, au second tour *a* perd l'élection devant *c* qui obtient 9 voix sur 17. Avec le système français et dans cette configuration particulière, on peut donc dire que la bonne campagne électorale de *a* lui a été fatale. On dit que la méthode est **non monotone** dans la mesure où l'amélioration de la position d'un candidat dans les préférences individuelles peut se traduire par une dégradation de sa situation à l'issue du scrutin. Avec une telle méthode, les possibilités de manipulations mises à jour à l'exemple 4 n'en deviennent que plus nombreuses : il est clair que l'on peut avoir intérêt à ne pas voter pour le candidat que l'on préfère. Notons d'ailleurs que le système français autorise parfois des "manipulations" très simples comme le fait de ne pas exprimer ses préférences ainsi que le montre l'exemple suivant.

Exemple 6. *Paradoxe du "pêcheur à la ligne"*

Soit $\{a, b, c\}$ l'ensemble des candidats à une élection pour laquelle il y a 11 électeurs dont les préférences se répartissent comme suit :

4 votants ont les préférences	$a\ P\ b\ P\ c$
4 votants ont les préférences	$c\ P\ b\ P\ a$
3 votants ont les préférences	$b\ P\ c\ P\ a$

Avec le système français seuls les candidats *a* et c devraient passer le premier tour et *c* devrait gagner l'élection au second tour avec 7 voix sur 11. Supposons toutefois que 2 parmi les 4 premiers électeurs, particulièrement peu intéressés par l'élection de *c* qui est donné largement favori, décident d'aller "pêcher à la ligne" plutôt que d'aller voter. On se retrouve donc devant une population de 9 votants dont les préférences se répartissent comme suit :

2 votants ont les préférences	$a\ P\ b\ P\ c$
4 votants ont les préférences	$c\ P\ b\ P\ a$
3 votants ont les préférences	$b\ P\ c\ P\ a$

A leur retour à la maison nos deux pêcheurs ne peuvent que se féliciter de leur décision puisque non seulement ils ont profité d'une belle journée de pêche, mais ils peuvent constater que leur abstention à causé la défaite du candidat *c* puisque le candidat *b* est élu au second tour avec une majorité de 5 voix sur 9 suffrages exprimés. L'abstention de deux votants potentiellement hostiles à *c* a entraîné sa défaite. Une telle méthode **n'incite pas à la participation**.

Exemple 7. *Vote en sous-comités*

Soit $\{a, b, c\}$ l'ensemble des candidats à une élection pour laquelle il y a 26 électeurs. Les 13 votants situés dans des zones urbaines ont des préférences réparties comme suit :

4 votants ont les préférences	$a\ P\ b\ P\ c$
3 votants ont les préférences	$b\ P\ a\ P\ c$
3 votants ont les préférences	$c\ P\ a\ P\ b$
3 votants ont les préférences	$c\ P\ b\ P\ a$

Les 13 votants situés dans des zones rurales ont eux des préférences réparties comme suit :

4 votants ont les préférences	$a\ P\ b\ P\ c$
3 votants ont les préférences	$c\ P\ a\ P\ b$
3 votants ont les préférences	$b\ P\ c\ P\ a$

3 votants ont les préférences $b \; P \; a \; P \; c$

Imaginons qu'un scrutin se déroule en zone urbaine. Il est facile de constater que *a* et *c* seront confrontés au second tour et que *a* l'emportera avec 7 voix contre 6. De même pour un scrutin en zone rurale, *a* et *b* subsisteront au second tour et *a* l'emportera avec 7 voix contre 6. On constate que *a* l'emporte à la fois en zone urbaine et en zone rurale. Il serait donc naturel de penser que *a* devrait l'emporter lors du scrutin national. Il est facile de constater qu'il n'en va pas ainsi puisqu'au niveau national *a* est éliminé dès le premier tour, *b* l'emportant au second face à *c* avec 17 voix contre 9. On dit qu'une telle méthode n'est pas **séparable**.

Lorsqu'il y a plus de deux candidats, les exemples qui précèdent montrent qu'il n'est pas simple de vouloir bâtir un système électoral répondant, dans toutes les situations, à ce que l'on pourrait en attendre. Notons que le système britannique (vote uninominal à un tour) ne pose aucun des problèmes mentionnés ci-dessus, dès lors qu'il n'y a que deux candidats (voir May (1952)). On pourrait donc imaginer qu'il suffit donc de traiter un problème de vote à n candidats ($n > 2$) comme une séquence de $n - 1$ problèmes de votes à deux candidats. On commence par choisir arbitrairement deux candidats que l'on confronte dans un vote à la majorité, le vainqueur est opposé à un troisième candidat dans un second vote, et ainsi de suite jusqu'au dernier des n candidats. Malheureusement cette façon d'enchaîner les vote majoritaires “en cascade” comporte également des inconvénients comme le montrent les deux exemples suivants.

Exemple 8. *Influence de l'ordre du jour dans un vote majoritaire en cascade*

Soit $\{a, b, c\}$ l'ensemble des candidats à une élection. Considérons trois votants dont les préférences sont les suivantes :

1 votant a les préférences $a \; P \; b \; P \; c$
1 votant a les préférences $b \; P \; c \; P \; a$
1 votant a les préférences $c \; P \; a \; P \; b$

Si l'ordre du jour consiste à considérer les candidats dans l'ordre *a*, *b*, *c*, on oppose d'abord les candidats *a* et *b* et *a* l'emporte à la majorité absolue (deux voix contre une). On confronte alors les candidats *a* et *c* ce qui conduit à la victoire de *c* par deux voix contre une. Le candidat *c* remporte donc l'élection. Avec un ordre du jour *b*, *c*, *a*, on oppose d'abord les candidats *b* et *c*. Le candidat *b* l'emporte par deux voix contre une. Il est alors confronté au candidat *a* qui l'emporte avec deux voix contre une et est donc élu. On constatera sans difficulté qu'avec un ordre du jour *c*, *a*, *b*, le candidat *b* est élu.

On remarque dans cet exemple que chacun des candidats est susceptible de gagner l'élection et que la victoire de l'un ou de l'autre ne dépend que du choix arbitraire de l'ordre du jour (on notera que cette méthode est fréquemment employée dans les assemblées législatives pour examiner un projet de loi : les amendements sont examinés successivement selon un certain ordre du jour et le projet amendé fait ensuite l'objet d'un vote l'opposant au statu quo). Le choix d'un ordre du jour particulier favorise tel ou tel candidat. Ceux-ci ne sont plus alors traités de manière "symétrique" : plus un candidat entre en lice "tôt" moins il est avantagé. Une telle méthode n'est pas **neutre**. On notera que les systèmes britanniques et français sont, eux, clairement neutres puisqu'il n'ont tendance à favoriser ou à défavoriser systématiquement aucun candidat.

Exemple 9. *Violation de l'unanimité dans un vote majoritaire en cascade*

Soit $\{a, b, c, d\}$ l'ensemble des candidats à une élection. Considérons trois votants dont les préférences sont les suivantes :

1 votant a les préférences	$b\ P\ a\ P\ d\ P\ c$
1 votant a les préférences	$c\ P\ b\ P\ a\ P\ d$
1 votant a les préférences	$a\ P\ d\ P\ c\ P\ b$

Si l'ordre du jour est a, b, c, d alors le candidat d emporte l'élection alors que la totalité des votants lui préfèrent a, candidat qui est éliminé face à b dès la première confrontation. Une telle méthode ne respecte pas le principe d'**unanimité** voulant qu'une procédure de vote respecte un avis partagé par l'ensemble de tous les votants. On notera que dans les systèmes britanniques et français, il est exclu d'élire un candidat tel que l'unanimité des votants lui en préfère un autre.

Exemple 10. *Voix prépondérante du président*

Imaginons qu'au second tour d'une élection conduite selon le système français les deux candidats en lice reçoivent exactement le même nombre de voix. Si une telle situation a une très faible probabilité d'occurrence lors d'élections nationales (elle créerait, au second tour d'une élection présidentielle en France, un délicat problème de Droit Constitutionnel), elle est en revanche très fréquente lors d'élections faisant intervenir un petit nombre de votants (conseil d'administration, comités divers). Une pratique usuelle consiste alors à donner à l'un des votants le pouvoir de briser à sa guise une éventuelle situation d'égalité : le "président" a une "voix prépondérante en cas d'égalité". Cette technique, si elle permet de sortir de l'impasse (d'autres pourraient être envisagées comme un tirage au sort ou un choix fondé sur un critère arbitraire comme le nom ou l'age des candidats – cette dernière solution créerait une méthode non neutre) conduit à ne plus toujours traiter sur un pied d'égalité les opinions de tous les votants. La méthode ainsi crée n’est pas **anonyme** (contrairement à toutes les méthodes envisagées jusqu’alors).

Face aux difficultés mentionnées plus haut, une attitude naturelle consiste à demander aux votants de fournir une information plus riche que dans un scrutin uninominal. On peut, en particulier, s’intéresser à des systèmes électoraux où chaque votant doit fournir une liste de tous les candidats ordonnée selon ses préférences (préordre complet). Nous examinons au § 2.2 les difficultés propres à ces systèmes (d’autres types d’information sont utilisés par certaines techniques comme, par exemple, dans le “vote par approbation”, Brams et Fishburn (1983)).

2.2 Systèmes par “listes ordonnées”

Le problème d'agrégation se pose ici de manière sensiblement différente qu’avec les systèmes uninominaux envisagés au § 2.1. Il s'agit ici d'agréger des “listes ordonnées” pour déterminer le candidat le mieux soutenu par l'ensemble de ces “listes”, ou même d'établir un classement global sensé résumer au mieux les préférences exprimées.

Pour révéler l'opinion majoritaire dans un tel scrutin, Condorcet propose de comparer les candidats par paires en utilisant la méthode suivante :

Méthode de Condorcet (ou méthode majoritaire) **:** un candidat *a* est préféré à un candidat *b* si et seulement si le nombre de votants ayant classé *a* devant *b* est strictement supérieur au nombre de votants ayant classé *b* devant *a* (en cas d’égalité les deux candidats sont jugés indifférents).

Il pose alors le principe suivant :

Principe de Condorcet : s'il existe un candidat qui est préféré à chacun des autres candidats en utilisant la méthode majoritaire, c'est ce candidat qu'il faut élire. Ce candidat est le **vainqueur de Condorcet**, il est nécessairement unique.

Il est à noter que ni le système anglais (1 tour) ni le système français (2 tours) ne vérifient ce principe. Pour s'en convaincre, il suffit d'examiner l'exemple 2 où le système anglais conduit à l'élection du candidat *a* alors que *b* est le vainqueur de Condorcet, puis l'exemple 3 où le système français conduit à élire *b* alors que *a* est le vainqueur de Condorcet.

Le principe de Condorcet semble naturel (même s’il peut faire problème comme le suggère l’exemple 1 où le candidat *a* est un vainqueur de Condorcet). Il n'est pas toujours opérationnel : dans certaines situations, il n'existe pas de vainqueur de Condorcet ; c’est le “paradoxe de Condorcet”. Dans l’exemple 8, le candidat *a* est préféré au candidat *b*. Ce dernier est préféré au candidat *c*. Mais la confrontation de *a* et de *c* révèle que *c* est préféré à *a*. Chaque candidat est battu par au moins un autre ; il n’existe donc pas de vainqueur de Condorcet. Un tel cas de figure se présentant assez fréquemment (environ 4 fois sur 10 dans des scrutins à 7 candidats avec un grand nombre de votants lorsque l'on ne fait pas de restrictions sur les listes admissibles, voir Fishburn (1973)) on doit trouver comment procéder lorsqu'il n'y a pas de vainqueur de Condorcet. On peut par exemple exiger de choisir un élément tel qu'aucun autre ne le batte selon la méthode majoritaire (principe faible de Condorcet) mais là encore, un tel candidat n'existe pas toujours (c’est, bien sûr, le cas dans l’exemple 8). Bien des méthodes ont été proposées pour tenter de tirer parti de la relation de préférence bâtie en utilisant la méthode majoritaire ; on en trouvera un bon aperçu dans Fishburn (1977) ou Nurmi (1987).

Une approche alternative pour traiter de tels scrutins a été proposée par Borda. Elle consiste à associer un score global à chaque candidat en fonction de son rang moyen de classement dans les listes des votants.

Méthode de Borda : un candidat *a* est préféré à un candidat *b* si la somme des rangs de *a* dans les listes des votants est strictement inférieure à celle de *b* (on suppose ici que les listes sont des ordres complets – sans ex aequo – et on attribue le rang 1 au premier de la liste, 2 au second et ainsi de suite ; la méthode se généralise sans difficulté pour traiter les cas d’ex aequo).

Exemple 11. *Illustration et comparaison des méthodes de Borda et Condorcet*

Soit $\{a, b, c, d\}$ l'ensemble des candidats à une élection. Considérons trois votants dont les préférences sont les suivantes :

2 votants ont les préférences	$b\ P\ a\ P\ c\ P\ d$
1 votant a les préférences	$a\ P\ c\ P\ d\ P\ b$

En utilisant la méthode de Borda, c'est *a* qui emporte l'élection avec un score de 2x2+1x1 = 5. Elle conduit au classement *a* , *b*, *c* , *d*, les candidats recevant respectivement les scores 5, 6, 8 et 11. En utilisant la méthode de Condorcet c'est *b* qui l'emporte en tant que vainqueur de Condorcet. On constatera ici que la préférence collective donnée par la méthode de Condorcet est transitive et conduit au classement *b*, *a*, *c*, *d*. Les deux méthodes divergent ; la méthode de Borda ne vérifie pas le principe de Condorcet (à titre de curiosité, on pourra chercher à vérifier que si la méthode de Borda ne conduit pas toujours à élire un vainqueur de Condorcet, elle ne peut conduire – comme le système anglais – à élire un perdant de Condorcet, c’est-à-dire un candidat battu par tout les autres à la majorité absolue).

La méthode de Borda présente cependant un avantage important sur la méthode de Condorcet. Elle permet non seulement de désigner un (ou plusieurs) vainqueur(s) dans tous les cas de figure (candidats dont la somme des rangs est minimale) mais fournit un rangement de tous les candidats du meilleur au pire. Ce n'est pas le cas de la méthode de Condorcet qui conduit parfois à des préférences non transitives ne permettant pas d'ordonner les candidats ni même de choisir un sous-ensemble de “bons” candidats (cf. exemple 8). On vérifiera aisément que la méthode de Borda est neutre, anonyme, séparable, monotone et incite à la participation.

La méthode de Borda possède en revanche une caractéristique qui peut sembler peu naturelle. Pour la mettre en évidence, supposons, dans l’exemple 11, que les candidats *c* et *d*, estimant que leurs chances de victoire sont trop faibles, retirent leur candidature la veille de l'élection. On constate alors que *b* devient le vainqueur avec la méthode de Borda comme avec celle de Condorcet. Ainsi, la défection des candidats *c* et *d* a inversé les résultats de la méthode de Borda entre *a* et *b*. Contrairement à ce que l'on observe pour la méthode de Condorcet, la relation de préférence liant deux candidats *a* et *b* avec la méthode de Borda dépend non seulement des positions relatives de *a* et *b* dans les classements des votants, mais aussi de leurs situations respectives vis-à-vis de tous les autres candidats. Le fait qu'un candidat *a* batte un candidat *b* est donc contingent à l'ensemble des candidats qui se sont présentés. Une telle contingence peut être assez problématique dans la réalité en raison de défections éventuelles ; elle l’est d’autant plus en aide à la décision dans la mesure où l’ensemble des actions à évaluer est rarement “donné” et requiert un travail de modélisation important.

Au vu des exemples qui viennent d’être présentés, on aimerait pouvoir proposer une méthode démocratique qui dispose à la fois des avantages de la méthode de Borda (transitivité du résultat) et de ceux de la méthode de Condorcet (respect du principe de Condorcet et absence de phénomènes de contingence). On verra au § 3 qu’un tel espoir est illusoire.

Mentionnons enfin que nous nous sommes limités dans cette section à des systèmes électoraux tendant à l’élection d’un unique candidat et non d’un ensemble de candidats. On pourrait en conclure à la supériorité des systèmes tendant à l’élection d’une assemblée représentative “à la proportionnelle”. Une telle conclusion serait hâtive pour au moins deux raisons. Tout d’abord, la définition de ce qui est “juste représentation proportionnelle” soulève des problèmes délicats, la plupart des systèmes proportionnels utilisés en pratique donnant lieu à de nombreuses situations paradoxales (cf. Balinski et Young (1982)). Remarquons ensuite que la règle de décision au sein de l’assemblée représentative élue “à la proportionnelle” est le plus souvent du type de celles présentées dans cette section. Il ne faut donc pas chercher dans l’idée de représentation proportionnelle une “solution miracle” aux difficultés mentionnées ici.

3. Quelques résultats théoriques

3.1 Le théorème d’Arrow

Le théorème d’Arrow (1951) est central en théorie du choix social. Il concerne les méthodes qui visent à agréger n ($n \geq 3$) préordres complets (classements avec ou sans ex aequo) en un préordre complet synthétique. De même qu’au § 2.2, chaque votant fournit donc une “liste” classant par ordre de préférence l’ensemble des candidats (avec possibilité d’ex aequo). K.J. Arrow s’est intéressé aux méthodes d’agrégation vérifiant les conditions suivantes :

Universalité : *toute configuration de listes est admissible.*

Cette condition exclut toute contrainte portant sur l'ensemble des listes votées. Les exemples de la section précédente ont révélé des problèmes dus à des configurations particulières où, par exemple, il n’y avait pas de vainqueur de Condorcet. On pourrait alors vouloir proposer une méthode qui fonctionne seulement pour les configurations "simples". Imposer des restrictions sur les configurations des listes admissibles à l’entrée de la méthode d’agrégation est parfois naturel. C’est, par exemple, le cas si l’on estime que tous les votants situent de manière identique l’ensemble des candidats sur une échelle “gauche-droite” et jugent les candidats en calculant leur “distance” à un “point idéal” sur cette échelle (la position de ce point idéal étant propre à chaque votant). On obtient ainsi des “préférences unimodales” au sens de Black (1958) qui garantissent l’existence d’un vainqueur de Condorcet. De telles restrictions impliquent cependant l’absence de votants “atypiques”, ce qu’il difficile d’exclure a priori. Avec une méthode d’agrégation non universelle, certains scrutins ne pourraient pas être dépouillés.

Transitivité *: la méthode doit toujours fournir un classement sous la forme d'un préordre complet.*

Cette condition impose la transitivité du résultat quelles que soient les préférences exprimées. Ainsi, lorsque la société préfère a à b et b à c elle doit préférer a à c. Nous avons vu que la méthode de Condorcet ne vérifiait pas cette condition. Elle est suffisante (mais non nécessaire) pour garantir que la méthode permettra, dans tous les cas, d’isoler un ou plusieurs “meilleurs” candidats (ceux figurant en tête du classement). On verra plus bas que l’affaiblissement de cette condition ne contribue que faiblement à la “résolution” de la difficulté mise à jour par le résultat d’Arrow.

Unanimité : *le résultat de la méthode ne doit pas contredire un avis unanime des votants.*

Plus précisément, si a est classé devant b dans chacune des listes, il doit figurer devant b dans le classement global. Cette condition est très naturelle ; l'exemple 9 nous a cependant montré qu'elle pouvait être violée par certaines méthodes.

Indépendance : *le résultat de la comparaison entre deux candidats ne dépend que de leur position relative dans les listes ordonnées fournies par les votants.*

Cette condition est plus complexe que les trois précédentes. Elle fait reposer la relation de préférence entre deux candidats sur la seule donnée de la relation liant ces deux candidats dans les listes individuelles. Ceci exclut en particulier :
- la prise en compte d'"intensité de préférence" dans le traitement des listes individuelles : seules sont prise en compte les relations de préférences,
- la prise en compte de la position de deux candidats vis-à-vis d'un tiers pour mieux les comparer.

Un exemple permettra de mieux comprendre la portée de cette condition.

Exemple 12. *Méthode de Borda et Indépendance*

Soit $\{a, b, c, d\}$ l'ensemble des candidats à une élection. Considérons trois votants dont les préférences sont les suivantes :

2 votants ont les préférences	$c\ P\ a\ P\ b\ P\ d$
1 votant a les préférences	$a\ P\ b\ P\ c\ P\ d$

La méthode de Borda conduit alors au classement : a, c, b, d avec des scores respectifs de 5, 6, 7 et 11.

Considérons à présent un scrutin de même type, avec les préférences :

2 votants ont les préférences	$c\ P\ a\ P\ b\ P\ d$
1 votant a les préférences	$a\ P\ c\ P\ b\ P\ d$

La méthode de Borda conduit alors au classement : c, a, b, d avec des scores respectifs de 4, 5, 9 et 12.

Notons que dans chacune des listes la position respective de a et de c est restée identique d'un scrutin à l'autre : a est préféré à c par un votant tandis que deux ont la préférence inverse. La condition d'indépendance voudrait alors que la position relative de a et de c soit identique à l'issue des deux scrutins, ce qui n'est pas le cas avec la méthode de Borda. Cette dernière utilise le fait que l'écart entre a et c semble "plus grand" dans la liste $a\ P\ b\ P\ c\ P\ d$ que dans la liste $a\ P\ c\ P\ b\ P\ d$, puisque b vient s'intercaler entre a et c dans le premier cas. Cette dépendance de la position respective de a et de c par rapport à b est exclue par la condition d'indépendance. Elle exclut de même toute méthode qui utiliserait en plus des listes une information qualifiant la plus ou moins grande intensité de chaque préférence à l'intérieur des listes.

Non dictature : *il n'existe pas de dictateur.*

Aucun des votants ne peut dicter en toutes circonstances ses préférences à la collectivité. Cette condition s'impose de manière évidente pour qui recherche une méthode minimalement "démocratique".

On peut alors énoncer le célèbre

Théorème d'Arrow. *Dès lors qu'il y a plus de trois candidats, aucune méthode d'agrégation ne peut satisfaire les conditions d'universalité, de transitivité, d'unanimité, d'indépendance et de non dictature.*

Ce résultat négatif ne concerne que le cas de plus de trois candidats : on vérifiera facilement que la méthode majoritaire permet de respecter les 5 conditions du théorème avec deux candidats. Le théorème d'Arrow explique en grande partie les difficultés rencontrées (cf. § 2) dans l'élaboration d'une procédure d'agrégation "satisfaisante". Observons par exemple que la méthode de Borda respecte les conditions d'universalité, de transitivité, d'unanimité et de non dictature ; par conséquent elle ne peut satisfaire à la condition d'indépendance, comme nous l'avons vérifié directement à l'exemple 12. La méthode de Condorcet, pour sa part, respecte les conditions d'universalité, d'unanimité, d'indépendance et de non dictature ; elle ne peut donc satisfaire à l'axiome de transitivité ainsi que nous l'avons vu plus haut (cf. exemple 8). Notons que le théorème d'Arrow utilise un petit nombre de conditions parmi celles introduites plus haut. Il est clair qu'en sus des conditions proposées par Arrow, on aurait aimé voir aussi imposé la neutralité, l'anonymat, la monotonie, l'incitation à la participation, le respect du principe de Condorcet, la non manipulabilité ou la séparabilité. La puissance du résultat tient à son économie : un petit nombre de conditions, toutes raisonnables en apparence et très en deçà de ce que l'on aurait envie d'exiger d'une procédure réellement "démocratique", suffit à engendrer un résultat d'impossibilité.

Le théorème d'Arrow a engendré une très vaste littérature dont on trouvera un bon aperçu dans Kelly (1978), Fishburn (1987), Sen (1986). On se contentera de mentionner ici que l'affaiblissement de la condition de transitivité ne contribue pas de manière significative à la disparition du problème révélé par le théorème d'Arrow. Par exemple, imposer seulement la *semi-transitivité* de la relation collective, c'est-à-dire la transitivité de sa partie asymétrique (préférence stricte), ce qui est toujours suffisant pour pouvoir déterminer dans tous les cas un ou plusieurs “vainqueurs”, conduit, en présence des conditions d’universalité, d’unanimité et d’indépendance non plus à une dictature mais à une *oligarchie*, c'est-à-dire à l’existence d'un sous-ensemble de votants capable d’imposer leur avis unanime au reste du groupe et disposant chacun d’un pouvoir de veto absolu interdisant au groupe de préférer a à b s’il sont d’avis contraire (cf. Gibbard (1969), Mas-Colell et Sonnenschein (1972)). L'existence d'une oligarchie est aussi problématique que celle d'un dictateur. En effet, si l'oligarchie comprend la totalité des votants (seule solution pour préserver l'aspect “démocratique” du vote) alors le droit de veto de chaque membre de l’oligarchie impliquera, en général, une relation de préférence collective fort peu discriminante. A l’inverse, une oligarchie ne contenant qu’un seul votant fait de ce dernier un dictateur. Entre ces deux extrêmes, aucune solution n'est vraiment pleinement satisfaisante. Si l'on affaiblit encore la condition de transitivité en exigeant seulement qu'il n'existe pas de circuit dans la partie asymétrique de la relation de préférence collective (condition nécessaire et suffisante pour pouvoir définir des éléments maximaux sur tout sous-ensemble de candidats, cf. Sen (1970a)), alors on peut mettre en évidence l'existence d'un votant ayant un pouvoir de veto absolu (voir Mas-Colell et Sonnenschein (1972)), ce qui ne semble guère “démocratique”.

3.2 Autres résultats

Le théorème d’Arrow et ses nombreuses extensions sont très loin d’épuiser l’ensemble des résultats en théorie du choix social concernant l’agrégation des préférences. Il est illusoire de vouloir en tenter ici une présentation d’ensemble (on se reportera pour cela à Sen (1986)). On peut schématiquement les regrouper en trois catégories :

- les résultats de type “impossibilité” qui, dans le veine du théorème d’Arrow, montrent l’existence de contradictions logiques entre certaines conditions. De tels résultats permettent de mieux cerner les limites auxquelles se heurte la recherche d’une méthode d’agrégation “satisfaisante” ;
- les résultats de type “caractérisation” s’attachant à exhiber des conditions telles qu’une méthode d’agrégation donnée soit la seule à les satisfaire simultanément. De tels résultats visent à mettre à jour les caractéristiques essentielles d’une méthode et, ainsi, d’en mieux comprendre les spécificités et de la comparer plus aisément à d’autres ;
- les résultats de type “analyse” s’attachant à confronter une série de méthodes à un ensemble de conditions jugées “souhaitables”. Ils visent à permettre la mise à jour de méthodes “satisfaisantes”, dans les limites indiquées par les résultats de type “impossibilité”.

Il est clair que cette distinction emporte une part d'arbitraire non négligeable et que ces trois types d'analyse ne sont nullement contradictoires ; idéalement, elles devraient faire appel aux mêmes conditions.

Nous nous contenterons ici de mentionner, de manière informelle, quelques résultats qui nous semblent importants et/ou intéressants pour éclairer quelques uns des phénomènes mis à jour par les exemples du § 2.

a) Résultats d'impossibilité

Parmi les très nombreux résultats de ce type disponibles en théorie du choix social, deux nous semblent particulièrement importants :

– le théorème de Gibbard-Satterthwaite (cf. Gibbard (1973), Satterthwaite (1975)). Ce résultat montre l'impossibilité de concevoir des méthodes d'agrégation (conduisant à l'élection d'un unique candidat) vérifiant la condition d'universalité qui soient non manipulable et non dictatoriale dès lors qu'il a plus de trois candidats. Le système électoral français est clairement non dictatorial et vérifie la condition d'universalité. En négligeant les situations d'ex aequo au second tour, le résultat de A. Gibbard et M.A. Satterthwaite nous assure alors qu'il est possible de trouver au moins une situation où un votant peut ne pas avoir intérêt à révéler ses préférences sincèrement. Nous en avons présenté une à l'exemple 4. Notons que ce résultat a donné lieu a une abondante littérature analysant les problèmes de vote en termes de "jeux non coopératifs". On trouvera un aperçu de la littérature sur ces questions dans Moulin (1980, 1988), Peleg (1984) ou Dummett (1984).
– le théorème de Sen dit de "l'anarchiste parétien" (Sen (1970b)). Supposons que les "états sociaux" soumis au vote sont définis de manière telle qu'ils concernent la sphère privée d'un individu. Il est clair qu'il existe des conflits entre le principe majoritaire, pouvant conduire à la "dictature de la majorité" (cf. exemple 1), et le respect, pour cet individu, de sa sphère privée à l'intérieur de laquelle il devrait seul avoir le pouvoir de décider. Le théorème de "l'anarchiste parétien" montre bien davantage puisqu'il énonce l'impossibilité de faire coexister le principe du respect d'une "sphère individuelle" et les conditions d'unanimité et d'universalité. Ce résultat a engendré une abondante littérature dont trouvera un bon aperçu dans Sen (1983, 1992).

b) Caractérisation

Parmi les très nombreux résultats visant à caractériser telle ou telle méthode d'agrégation, ceux concernant la méthode de Borda présentée au § 2.2 méritent une attention toute particulière (on trouvera de nombreux autres résultats de ce type dans Sen (1986)). En effet, elle satisfait à la plupart des conditions présentées jusqu'à présent et est particulièrement simple à mettre en oeuvre. La méthode de Borda est un cas particulier d'une classe plus générales de méthodes d'agrégation dites "méthodes de scorage". Elles consistent à agréger les préférences en associant un nombre à chaque rang dans les listes de préférence fournies par les votants, en faisant la somme de ces nombres pour chaque candidat et en déclarant élu le ou les candidats ayant le total le plus faible. La méthode de Borda est une méthode de scorage particulière où les nombres associés à chaque rang sont également espacés. Le système britannique est également une méthode de scorage où le candidat classé en tête reçoit 1 point tandis que tous les autres en reçoivent, par exemple, 2.

Smith (1973) et Young (1975) ont montré que les méthodes de scorage étaient essentiellement caractérisées par les conditions de neutralité, d'anonymat et de séparabilité. Il suffit alors d'ajouter quelques conditions pour parvenir à une caractérisation de la méthode de Borda (voir Young (1974)) ; pour une vue d'ensemble récente de très nombreux résultats se rapportant aux méthodes de scorage, on pourra consulter Saari (1994)). Le système français n'est pas une méthode de scorage du fait du deuxième tour éventuel. Elle est cependant neutre et anonyme. Il n'est donc pas surprenant de constater qu'elle n'est pas séparable comme l'a montré l'exemple 7. On a noté à la section 2 que ni le système britannique ni la méthode de Borda ne satisfont au principe de Condorcet (cf. exemples 2 et 10). Ceci n'est pas surprenant. En effet, on peut montrer qu'aucune méthode de scorage ne peut satisfaire au principe de Condorcet (voir Moulin (1988)).

Notons enfin que le système français peut se concevoir comme une méthode de scorage avec itération : on utilise une méthode de type britannique au premier tour pour isoler les deux candidats restant en lice au second tour et on applique une méthode de même type sur ces deux candidats. Notons qu'il y a de nombreuses façons d'utiliser une méthode de scorage de façon itérative (on pourrait envisager, par exemple, de recourir à plus de deux tours). Un résultat dû à Smith (1973) montre qu'aucune méthode de ce type n'est monotone. La non monotonie du système français illustrée à l'exemple 5 n'est qu'une manifestation particulière de ce résultat.

c) Analyse

Les quelques méthodes d'agrégation présentées jusqu'à présent sont loin d'épuiser toutes celles qui ont été proposées dans la littérature (en particulier, on n'a pas abordé les nombreuses méthodes cherchant à tirer parti de la préférence collective bâtie par la méthode de Condorcet pour parvenir à un choix ou à un classement). De même les propriétés "souhaitables" introduites pour les analyser ne représentent qu'une très faible part de toutes celles proposées dans la littérature. On trouvera une vue d'ensemble de ces méthodes et propriétés dans De Donder *et al.* (1996), Felsenthal et Moaz (1992), Fishburn (1977), Levin et Nalebuff (1995), Nurmi(1987), Richelson (1975, 1978a, b, 1981).

4. Aide multicritère à la décision et théorie du choix social

On a observé au § 1 que les problèmes d'agrégation en aide multicritère à la décision étaient formellement très proches de ceux rencontrés en théorie du choix social. Or, il ressort des exemples du § 2 et des résultats du § 3 qu'en ce domaine, la conception d'une méthode d'agrégation "satisfaisante" se heurte à des problèmes sérieux. Certains (voir, par exemple Gargaillo (1982)) ont cru pouvoir en conclure à la vanité de l'analyse multicritère. Des raisons de place nous empêchent ici de répondre de manière détaillée à une telle objection (voir Roy et Bouyssou (1993)). Il nous faut néanmoins mentionner :

i- qu'une telle conclusion relève d'une interprétation biaisée et trop radicale des principaux résultats disponibles en théorie du choix social. Si certains résultats d'impossibilité existent, il ne signifient pas autant que vouloir recourir à une méthode d'agrégation pour tenter de dégager une décision collective est un exercice futile. C'est un exercice difficile qui demande de réaliser des compromis entre divers types d'exigences qu'il n'est pas, en général, possible de satisfaire simultanément. Ces résultats quand ils sont combinés à ceux de type "caractérisation" et "analyse" fournissent une base très riche pour raisonner le choix d'une méthode. Il n'y a pas de "méthode idéale", mais il existe peut-être des méthodes plus satisfaisantes (ou moins mauvaises) que d'autres. On pourra par exemple se référer à Saari (1994) pour une défense fort convaincante de la méthode de Borda ou à Brams et Fishburn (1983) pour celle du vote par approbation ;

ii- qu'il serait mal venu de confondre une proximité formelle avec une identité entre les deux types de problème d'agrégation. Notons, en particulier, que :

- la pratique de l'aide multicritère à la décision amène souvent à vouloir bâtir des recommandations de nature plus variée que le seul choix d'une et d'une seule action, comme c'est souvent, naturellement, le cas en théorie du choix social (voir Roy (1985)),
- certaines conditions ou hypothèses naturelles en théorie du choix social le sont beaucoup moins en aide multicritère à la décision et *vice versa*. A titre d'exemple, mentionnons que la condition d'anonymat n'a pas lieu d'être en analyse multicritère dès lors que l'on souhaite prendre en compte l'importance relative des critères. Inversement, mentionnons que l'ensemble des actions potentielles qu'il s'agit d'évaluer peut rarement être considéré comme une "donnée" en analyse multicritère, contrairement au cas d'une élection où l'ensemble des candidats est, en général, bien défini. Les conditions portant sur les réactions d'une méthode d'agrégation à l'apparition ou à la disparition d'actions peuvent alors se révéler d'importance beaucoup plus grande en analyse multicritère qu'en théorie du choix social,
- les préférences qu'il s'agir d'agréger en analyse multicritère sont le résultat d'un long travail de modélisation de chacun des critères (voir Bouyssou (1990)). Ce

travail peut parfois amener à agréger une information moins “riche” qu’une liste ordonnée comme, par exemple, des structures de préférences incomplètes, floues et/ou dans lesquelles la relation d’indifférence n’est pas transitive (sur ces questions voir Fodor et Roubens (1994), Perny (1992a), Roubens et Vincke (1985)). Au contraire, dans certaines circonstances, on sera à même de modéliser finement des “intensités de préférences” sur un critère donné voire de comparer des écarts de préférences exprimés selon divers critères (voir Keeney et Raiffa (1976)). Mentionnons enfin que le traitement de l’incertitude, de l’imprécision ou de la mauvaise détermination est souvent essentiel pour parvenir à élaborer une recommandation probante en analyse multicritère (voir Bouyssou (1989)), contrairement à ce qui est le cas en théorie du choix social.

S’il existe une proximité formelle entre les deux domaines et si certaines conditions classiques utilisées en théorie du choix social se retrouvent “naturellement” en multicritère (unanimité, monotonie, neutralité par exemple), il faut donc se garder de transpositions trop brutales tant l'agrégation multicritère présente de caractères spécifiques.

Il ne faut pas en conclure pour autant que ces deux domaines sont sans liens et que les exemples et résultats présentés aux § 2 et 3 sont sans conséquence pour l’analyse multicritère. Ainsi que l’a clairement montré Vansnick (1986), il est possible et utile de voir les méthodes d’agrégation multicritère au travers du filtre de la théorie du choix social. Mentionnons ici, par exemple, que la différence de philosophie entre les méthodes de Condorcet et de Borda se retrouve en analyse multicritère où coexistent des méthodes de nature plutôt ordinales (les méthodes de surclassement, cf. Roy (1991)) et des méthodes plutôt cardinales où l’idée d’écart de préférence est centrale (méthodes fondés sur la théorie de l’utilité multi-attribut, cf. Keeney et Raiffa (1976)). Au vu du théorème d’Arrow, on ne sera pas étonné du fait que les méthodes du premier type conduisent souvent à des relations de préférence globales ne se prêtant de manière immédiate à l’élaboration d’une recommandation (voir Vanderpooten (1990)). Beaucoup reste à faire pour adapter et/ou étendre les résultats disponibles en théorie du choix social pour les rendre pertinents en analyse multicritère. Un effort a été entrepris dans ce sens depuis quelques années. On mentionnera en particulier :

– des résultats d’“impossibilité” : Arrow et Raynaud (1986), Bouyssou (1992a), Perny (1990, 1992a, b),
– des résultats de “caractérisation” : Bouyssou (1992b, 1996), Bouyssou et Vansnick (1986), Bouyssou et Perny (1992), Marchant (1996), Pirlot (1995) et
– des résultats d’“analyse” : Bouyssou et Vincke (1997), Landsdowne (1996, 1997), Pérez, (1994), Pérez et Barba-Romero (1995), Pirlot (1997), Vincke (1992).

Il reste cependant beaucoup à faire (cf. Bouyssou *et al.* (1993)). Nous espérons que ce bref survol des problèmes d'agrégation en théorie du choix social aura permis au lecteur de mesurer tout l'intérêt et la difficulté de la question.

Références

Arrow, K.J. (1951), *Social Choice and Individual Values*, Cowles Foundations and Wiley, N.Y.

Arrow, K.J. et Raynaud, H. (1986), *Social Choice and Multicriterion Decision Making*, MIT Press, Cambridge.

Balinski, M et Young, H.P. (1982), *Fair representation*, Yale University Press, New Haven.

Black, D. (1958), *The theory of Committees and Elections*, Cambridge University Press.

Borda, J.-Ch. (1781), *Mémoire sur les élections au scrutin*, Mémoires de l'Académie des Sciences, Paris.

Bouyssou, D. (1989), Modelling inaccurate determination, uncertainty, imprecision using multiple criteria, in A.G. Lockett, G. Islei (eds.), *Improving Decision Making in Organisations*, 78–87, Springer Verlag, Heidelberg.

Bouyssou, D. (1990), Building criteria: A prerequisite for MCDA, in C.A. Bana e Costa (ed.), *Readings in Multiple Criteria Decision Aid*, Springer-Verlag, 58-80.

Bouyssou, D. (1992a), On some properties of outranking relations based on a concordance-discordance principle, in A. Goicoechea, L. Duckstein, S. Zionts (eds.), *Multiple Criteria Decision Making*, Springer-Verlag, 93-106.

Bouyssou, D. (1992b), Ranking methods based on valued preference relations: A characterization of the net flow network, *European Journal of Operational Research*, **60**, 61-67.

Bouyssou, D (1996), Outranking relations: do they have special properties ?. *Journal of Multiple Criteria Decision Analysis*, **5**, 99-111.

Bouyssou, D. et Perny, P. (1992), Ranking method for valued preference relations: A characterization of a method based on leaving and entering flows, *European Journal of Operational Research*, **61**, 186-194.

Bouyssou, D., Perny, P., Pirlot, M., Tsoukias, A. et Vincke, Ph. (1993), A Manifesto for the New MCDM Era, *Journal of Multi-Criteria Decision Analysis*, **2**, 125-127.

Bouyssou, D. et Vansnick, J.-C. (1986), Noncompensatory and generalized noncompensatory preference structures, *Theory and Decision*, **21**, 251-266.

Bouyssou, D. et Vincke, Ph. (1997), Ranking alternatives on the basis of preference relations: a progress report with special emphasis on outranking relations", *Journal of Multiple Criteria Decision Analysis*, **6**, 77-85.

Brams, S.J. et Fishburn, P.C. (1983), *Approval voting*, Birkhauser, Boston.

Condorcet, J.A.M. Caritat, Marquis De, (1785), *Essai sur l'application de l'analyse à la probabilité des décisions rendues à la pluralité des voix*, Imprimerie Royale, Paris.

De Donder, Ph., Le Breton, M. et Truchon, M. (1996), *A set-theoretical comparison of C2 social choice correspondences*, Working Paper, Université Laval, Québec, Canada.

Dummett, M. (1984), *Comparing voting systems*, Clarendon Press, Oxford.

Felsenthal, D.S. et Moaz, Z. (1992), Normative properties of four single-stage multi-winner electoral procedures, *Behavioral Science*, **37**, 109-127.

Fishburn, P.C. (1973), *The Theory of Social Choice*, Princeton University Press, Princeton, New-Jersey.

Fishburn, P.C. (1977), Condorcet social choice functions, *SIAM Journal on Applied Mathematics*, **33**, 469-489.

Fishburn, P.C. (1987), *Interprofile Conditions and Impossibility*, Harwood Academic Publi-shers, Chur.

Fodor, J. et Roubens, M. (1994), *Fuzzy preference modelling and multiple criteria decision support*, Kluwer, Dordrecht.

Gargaillo, L. (1982), Réponse à l'article "Le plan d'extension du métro en banlieue parisienne, un cas type de l'analyse multicritère", *Les Cahiers Scientifiques de la Revue Transports*, **7**, 52-57.

Gibbard, A. (1969), *Intransitive Social Indifference and the Arrow Dilemma*, Mimeographed.

Gibbard, A. (1973), Manipulation of voting schemes: A general result, *Econometrica*, **41**, 587-601.

Keeney, R.L. et Raiffa, H. (1976), *Decisions with Multiple Objectives, Preferences and Value Tradeoffs*, Wiley, New-York.

Kelly, J.S. (1978), *Arrow impossibility theorems*, Academic Press, New-York.

Kelly, J.S. (1991), Social Choice Bibliography, *Social Choice and Welfare*, **8**, 97-169.

Lansdowne, Z.L. (1996), Ordinal ranking methods for multicriterion decision making, *Naval Research Logistics*, **43**, 613-627.

Lansdowne, Z.L. (1997), Outranking methods for multicriterion decision making: Arrow's and Raynaud's conjecture, *Social Choice and Welfare*, **14**, 125-128.

Levin, J. et Nalebuff, B. (1995), An introduction to vote-counting schemes, *Journal of Economic Perspectives*, **9**, 3-26

Marchant, Th. (1996), Valued relations aggregation xith the Borda method, *Journal of Multiple Criteria Decision Analysis*, **5**, 127-132.

Mas-Colell, A. et Sonnenschein, H.F. (1972), General possibility theorems for group decisions, *Review of Economic Studies,* **39**, 185-192.

May, K.O. (1952), A set of independent necessary and sufficient conditions for simple majority decisions, *Econometrica*, **20**, 680-684.

Moulin, H. (1980), *La stratégie du vote*, Monographie du séminaire d'économétrie n°14, Éditions du CNRS, Paris.

Moulin, H. (1988), *Axioms of Cooperative Decision Making*, Econometric Society Mon-ograph n° 15, Cambridge University Press, Cambridge.

Nurmi, H. (1987), *Comparing voting systems*, D. Reidel, Dordrecht.

Peleg, B. (1984), *Game theoretic analysis of voting in committees*, Cambridge University Press, Cambridge.

Pérez, J. (1994), Theoretical elements of comparison among ordinal discrete multicriteria methods, *Journal of Multiple Criteria Decision Analysis*, **3**, 157-176.

Pérez, J., Barba-Romero, S. (1995), Three practical criteria of comparison amon ordinal preference aggregating rules, *European Journal of Operational Research*, **85**, 473-487.

Perny, P. (1990), Construction et exploitation de systèmes relationnels de préférences floues, in Extended Abstracts of the Third International Conference "*Information Processing and Management of Uncertainty in Knowledge-Based Systems*", Paris, 431-433.

Perny, P. (1992a), *Modélisation, agrégation et exploitation des préférences floues dans une problématique de rangement : Bases axiomatiques, procédures et logiciels*, Thèse de Doctorat, Université de Paris-Dauphine, Paris, France.

Perny, P. (1992b), Sur le non respect de l'axiome d'indépendance dans les méthodes de type Electre, *Cahiers du CERO*, **34**, 211-232.

Pirlot, M. (1995), A characterization of min as a procedure for exploiting valued preference relations and related results, *Journal of Multiple Criteria Decision Analysis*, **4**, 37-56.

Pirlot, M. (1997), A common framework for describing some outranking relations, *Journal of Multiple Criteria Decision Analysis*, **6**, 86-92.

Pomerol, J.-Ch. et Barba-Romero, S. (1993), Choix multicritère dans l'entreprise, Hermès, Paris.

Richelson, J.T. (1975), A comparative analysis a social choice functions, *Behavioral Science*, **20**, 331-337.

Richelson, J.T. (1978a), A comparative analysis a social choice functions II, *Behavioral Science*, **23**, 38-44

Richelson, J.T. (1978b), A comparative analysis a social choice functions III, *Behavioral Science*, **23**, 169-176

Richelson, J.T. (1981), A comparative analysis a social choice functions IV, *Behavioral Science*, **35**, 346-353.

Roy, B. (1985), *Méthodolgie Multicritère d'Aide à la Décision*, Economica, Paris.

Roy, B. (1991), The outranking approach and the foundations of ELECTRE methods, *Theory and Decision*, **31**, 49–73.

Roy, B. et Bouyssou, D. (1993), *Aide Multicritère à la Décision, Méthodes et Cas*, Economica, Paris.

Roubens, M. et Vincke, Ph. (1985), *Preference Modelling*, Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems n° 250, Springer Verlag, Berlin

Saari, D.G. (1994), *Geometry of voting*, Springer Verlag, Heidelberg.

Satterthwaite, M.A. (1975), Strategyproofness and Arrow’s conditions: existence and correspondence theorems for voting procedures and social welfare functions, *Journal of Economic Theory*, **10**, 187-217.

Sen, A.K. (1970a), *Collective Choice and Welfare,* San Fransisco, Holden-Day.

Sen, A.K. (1970b), The impossibility of a paretian liberal, *Journal of Political Economy*, **72**, 152-157.

Sen, A.K. (1983), Liberty and social choice, *Journal of Philosophy*, **80**, 5-28.

Sen, A.K. (1992), Minimal liberty, *Economica*, **59**, 139-159.

Sen, A.K. (1986), Social Choice Theory in K. J. Arrow, M. D. Intriligator (Eds.), *Handbook of Mathematical Economics vol. III,* Elsevier Sciences Publishers B. V., North-Holland, 1073-1181.

Smith, J.H. (1973), Aggregation of preference with a variable electorate, *Econometrica*, **41**, 1027-1041

Vansnick, J.-C. (1986), *De Borda et Condorcet à l'agrégation multicritère*, Cahier du LAMSADE #70, Université de Paris Dauphine, Paris, France.

Vanderpooten, D. (1990), The construction of prescriptions in outranking methods, in C.A. Bana e Costa (Ed.), *Readings in Multiple Criteria Decision Aid*, Springer Verlag, 184-215.

Vincke, Ph. (1989), *L'aide multicritère à la décision*, Ellipses, Paris.

Vincke, Ph. (1992), Exploitation of a crisp relation in a ranking problem, *Theory and Decision*, **32**, 221-240.

Young, H.P. (1974), An axiomatization of Borda's rule, *Journal of Economic Theory*, **9**, 43-52.

Young, H.P (1975). Social choice scoring functions, *SIAM Journal on Applied Mathematics*, **28**, 824-838