

Un cadre axiomatique commun pour la théorie de l'utilité espérée et la théorie de la décision qualitative

Denis Bouyssou¹ Marc Pirlot²

¹CNRS
Paris, France

²FPMs
Mons, Belgique

LFA — Nantes — novembre 2004

Introduction et motivation

Contexte : Décision dans l'incertain

Théorie classique de la décision (Économie, Psychologie)

- Utilité espérée subjective (SEU)
- Variantes : Utilité espérée à la Choquet (CEU)

Modèles demandant une « analyse fine » des préférences

Intelligence Artificielle

- Agents artificiels et/ou agent réels dispersés sur un réseau
- Une analyse détaillée des préférences est souvent impossible

↔ Modèles utilisant des inputs moins riches : « Théorie de la décision qualitative »

Introduction et motivation

Contexte : Décision dans l'incertain

Théorie classique de la décision (Économie, Psychologie)

- Utilité espérée subjective (SEU)
- Variantes : Utilité espérée à la Choquet (CEU)

Modèles demandant une « analyse fine » des préférences

Intelligence Artificielle

- Agents artificiels et/ou agent réels dispersés sur un réseau
- Une analyse détaillée des préférences est souvent impossible

↔ Modèles utilisant des inputs moins riches : « Théorie de la décision qualitative »

Introduction et motivation

Contexte : Décision dans l'incertain

Théorie classique de la décision (Économie, Psychologie)

- Utilité espérée subjective (SEU)
- Variantes : Utilité espérée à la Choquet (CEU)

Modèles demandant une « analyse fine » des préférences

Intelligence Artificielle

- Agents artificiels et/ou agent réels dispersés sur un réseau
- Une analyse détaillée des préférences est souvent impossible

↔ Modèles utilisant des inputs moins riches : « Théorie de la décision qualitative »

Modèle de la Dominance Vraisemblable (LD)

Dubois, Fargier & Prade (1997)

- l'acte a est préféré à l'acte b si le sous-ensemble d'états pour le quel a donne une conséquence meilleure que celle de b est « plus vraisemblable » que le sous-ensemble d'états pour le quel b donne une conséquence meilleure que celle de a

Ce modèle :

- peut être appliqué dès lors que l'on peut comparer les conséquences en terme de préférence et les événements en terme de vraisemblance
- est, en apparence, tout-à-fait différent du modèle SEU
- a un caractère « ordinal » (analogie avec les procédures de vote)
- ne conduit pas à des relations transitives et/ou complète (paradoxe de Condorcet)

Modèle de la Dominance Vraisemblable (LD)

Dubois, Fargier & Prade (1997)

- l'acte a est préféré à l'acte b si le sous-ensemble d'états pour le quel a donne une conséquence meilleure que celle de b est « plus vraisemblable » que le sous-ensemble d'états pour le quel b donne une conséquence meilleure que celle de a

Ce modèle :

- peut être appliqué dès lors que l'on peut comparer les conséquences en terme de préférence et les événements en terme de vraisemblance
- est, en apparence, tout-à-fait différent du modèle SEU
- a un caractère « ordinal » (analogie avec les procédures de vote)
- ne conduit pas à des relations transitives et/ou complète (paradoxe de Condorcet)

Objectifs

Proposer un cadre général pour la décision dans l'incertain :

- simple et intuitif
- non trivial
- ayant une représentation numérique
- tolérant l'incomplétude et l'intransitivité

Au sein de ce cadre :

- caractériser le modèle SEU
- caractériser le modèle LD

Objectifs

Proposer un cadre général pour la décision dans l'incertain :

- simple et intuitif
- non trivial
- ayant une représentation numérique
- tolérant l'incomplétude et l'intransitivité

Au sein de ce cadre :

- caractériser le modèle SEU
- caractériser le modèle LD

Plan

1 Définitions et notations

- Cadre de travail
- SEU
- LD

2 Cadre axiomatique

- Présentation
- Axiomes
- Résultats

3 Applications

- Modèle SEU
- Modèle LD

4 Discussion

Plan

1 Définitions et notations

- Cadre de travail
- SEU
- LD

2 Cadre axiomatique

- Présentation
- Axiomes
- Résultats

3 Applications

- Modèle SEU
- Modèle LD

4 Discussion

Plan

1 Définitions et notations

- Cadre de travail
- SEU
- LD

2 Cadre axiomatique

- Présentation
- Axiomes
- Résultats

3 Applications

- Modèle SEU
- Modèle LD

4 Discussion

Plan

- ① Définitions et notations
 - Cadre de travail
 - SEU
 - LD
- ② Cadre axiomatique
 - Présentation
 - Axiomes
 - Résultats
- ③ Applications
 - Modèle SEU
 - Modèle LD
- ④ Discussion

Plan

1 Définitions et notations

- Cadre de travail
- SEU
- LD

2 Cadre axiomatique

- Présentation
- Axiomes
- Résultats

3 Applications

- Modèle SEU
- Modèle LD

4 Discussion

Cadre de travail

Modèle à la Savage avec un nombre fini d'états de la nature. Un *acte* est une fonction associant à chaque *état* une *conséquence*

- $\Gamma = \{\alpha, \beta, \dots\}$: ensemble des conséquences
- $N = \{1, 2, \dots, n\}$: ensemble des états de la nature
- $\mathcal{A} = \Gamma^N = \{a, b, \dots\}$: ensemble des actes
- $\succsim$: relation binaire sur $\mathcal{A}$ « au moins aussi bon que »
- $a \in \mathcal{A}$ associe à chaque état $i \in N$ une conséquence $a(i) \in \Gamma$ parfois notée a_i
- $i \in N, a, b \in \mathcal{A}, \alpha \in \Gamma$: $a_i b$ et $\alpha_i b$ sont des actes
 $a_i b = (b_1 b_2 \dots a_i \dots b_n), \alpha_i b = (b_1 b_2 \dots \alpha_i \dots b_n)$

Cadre de travail

Modèle à la Savage avec un nombre fini d'états de la nature. Un *acte* est une fonction associant à chaque *état* une *conséquence*

- $\Gamma = \{\alpha, \beta, \dots\}$: ensemble des conséquences
- $N = \{1, 2, \dots, n\}$: ensemble des états de la nature
- $\mathcal{A} = \Gamma^N = \{a, b, \dots\}$: ensemble des actes
- $\succsim$: relation binaire sur $\mathcal{A}$ « au moins aussi bon que »
- $a \in \mathcal{A}$ associe à chaque état $i \in N$ une conséquence $a(i) \in \Gamma$ parfois notée a_i
- $i \in N, a, b \in \mathcal{A}, \alpha \in \Gamma$: $a_i b$ et $\alpha_i b$ sont des actes
 $a_i b = (b_1 b_2 \dots a_i \dots b_n), \alpha_i b = (b_1 b_2 \dots \alpha_i \dots b_n)$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2} \right) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$$

- $\mathcal{A} = \Gamma^N = \{a, b, \dots\}$: ensemble des actes
- $\succsim$: relation binaire sur $\mathcal{A}$ « au moins aussi bon que »
- $a \in \mathcal{A}$ associe à chaque état $i \in N$ une conséquence $a(i) \in \Gamma$ parfois notée a_i
- $i \in N, a, b \in \mathcal{A}, \alpha \in \Gamma : a_i b$ et $\alpha_i b$ sont des actes
 $a_i b = (b_1 b_2 \dots a_i \dots b_n), \alpha_i b = (b_1 b_2 \dots \alpha_i \dots b_n)$

Cadre de travail

Modèle à la Savage avec un nombre fini d'états de la nature. Un *acte* est une fonction associant à chaque *état* une *conséquence*

- $\Gamma = \{\alpha, \beta, \dots\}$: ensemble des conséquences
- $N = \{1, 2, \dots, n\}$: ensemble des états de la nature
- $\mathcal{A} = \Gamma^N = \{a, b, \dots\}$: ensemble des actes
- $\succsim$: relation binaire sur $\mathcal{A}$ « au moins aussi bon que »
- $a \in \mathcal{A}$ associe à chaque état $i \in N$ une conséquence $a(i) \in \Gamma$
parfois notée a_i
- $i \in N, a, b \in \mathcal{A}, \alpha \in \Gamma$: $a_i b$ et $\alpha_i b$ sont des actes
 $a_i b = (b_1 b_2 \dots a_i \dots b_n), \alpha_i b = (b_1 b_2 \dots \alpha_i \dots b_n)$

Cadre de travail

Modèle à la Savage avec un nombre fini d'états de la nature. Un *acte* est une fonction associant à chaque *état* une *conséquence*

- $\Gamma = \{\alpha, \beta, \dots\}$: ensemble des conséquences
- $N = \{1, 2, \dots, n\}$: ensemble des états de la nature
- $\mathcal{A} = \Gamma^N = \{a, b, \dots\}$: ensemble des actes
- $\succsim$: relation binaire sur $\mathcal{A}$ « au moins aussi bon que »
- $a \in \mathcal{A}$ associe à chaque état $i \in N$ une conséquence $a(i) \in \Gamma$ parfois notée a_i
- $i \in N, a, b \in \mathcal{A}, \alpha \in \Gamma$: $a_i b$ et $\alpha_i b$ sont des actes
 $a_i b = (b_1 b_2 \dots a_i \dots b_n), \alpha_i b = (b_1 b_2 \dots \alpha_i \dots b_n)$

Modèle SEU

Savage (1954), Wakker (1989)

$$a \succsim b \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n \theta_i u(a_i) \geq \sum_{i=1}^n \theta_i u(b_i) \quad (\text{SEU})$$

- θ_i sont des nombres non négatifs sommant à 1 (probabilités)
- u est une fonction de Γ dans $\mathbb{R}$

Modèle LD

Dubois, Fargier & Prade, (1997)

$$a \succsim b \Leftrightarrow \mathcal{S}(a, b) \supseteq \mathcal{S}(b, a) \quad (\text{LD})$$

avec $\mathcal{S}(a, b) = \{i \in N : a_i \mathcal{S} b_i\}$ et

- $\succsim$ une relation réflexive,
- $\mathcal{S}$ une relation complète sur Γ
- $\supseteq$ une relation sur les sous-ensemble de N ayant N pour union, compatible avec l'inclusion
 $[A \supseteq B, C \supseteq A, B \supseteq D, C \cup D = N] \Rightarrow C \supseteq D$

Plan

① Définitions et notations

- Cadre de travail
- SEU
- LD

② Cadre axiomatique

- Présentation
- Axiomes
- Résultats

③ Applications

- Modèle SEU
- Modèle LD

④ Discussion

Un cadre axiomatique général

Modèle (M)

$$a \succsim b \Leftrightarrow F(p(a_1, b_1), p(a_2, b_2), \dots, p(a_n, b_n)) \geq 0 \quad (\text{M})$$

avec

- p fonction de Γ^2 dans $\mathbb{R}$ antisymétrique ($p(x, y) = -p(y, x)$)
- F fonction de $\prod_{i \in N} p(\Gamma^2)$ dans $\mathbb{R}$ *non décroissante* en chacun de ses arguments et telle que $F(\mathbf{0}) \geq 0$

Interprétation

- p mesure les *différences de préférence* entre conséquences
- F synthétise ces différences mesurées dans chaque état

Un cadre axiomatique général

Modèle (M)

$$a \succsim b \Leftrightarrow F(p(a_1, b_1), p(a_2, b_2), \dots, p(a_n, b_n)) \geq 0 \quad (\text{M})$$

avec

- p fonction de Γ^2 dans $\mathbb{R}$ antisymétrique ($p(x, y) = -p(y, x)$)
- F fonction de $\prod_{i \in N} p(\Gamma^2)$ dans $\mathbb{R}$ *non décroissante* en chacun de ses arguments et telle que $F(\mathbf{0}) \geq 0$

Interprétation

- p mesure les *différences de préférence* entre conséquences
- F synthétise ces différences mesurées dans chaque état

Variantes du modèle (M)

Modèle (M)

$$a \succsim b \Leftrightarrow F(p(a_1, b_1), p(a_2, b_2), \dots, p(a_n, b_n)) \geq 0 \quad (M)$$

avec F non décroissante et p antisymétrique

Variantes

- (M) avec F *impaire* ($F(\mathbf{x}) = -F(-\mathbf{x})$)
- (M) avec F *impaire* et *strictement croissante* en chacun de ses arguments

Variantes du modèle (M)

Modèle (M)

$$a \succsim b \Leftrightarrow F(p(a_1, b_1), p(a_2, b_2), \dots, p(a_n, b_n)) \geq 0 \quad (\text{M})$$

avec F non décroissante et p antisymétrique

Variantes

- (M) avec F *impaire* ($F(\mathbf{x}) = -F(-\mathbf{x})$)
- (M) avec F *impaire* et *strictement croissante* en chacun de ses arguments

Relations comparant les différences de préférence

$$(\alpha, \beta) \succsim^* (\gamma, \delta) \Leftrightarrow [\forall a, b \in \mathcal{A}, \forall i \in N, \gamma_i a \succsim \delta_i b \Rightarrow \alpha_i a \succsim \beta_i b]$$

$$(\alpha, \beta) \succsim^{**} (\gamma, \delta) \Leftrightarrow [(\alpha, \beta) \succsim^* (\gamma, \delta) \text{ et } (\delta, \gamma) \succsim^* (\beta, \alpha)]$$

- $\succsim^*$ et $\succsim^{**}$ sont réflexives et transitives (traces sur les différences de préférence)
- $\succsim^{**}$ est réversible
- $a \succsim b$ et $(c_i, d_i) \succsim^* (a_i, b_i) \Rightarrow c_i a \succsim d_i b$
- $a \succ b$ et $(c_i, d_i) \succsim^{**} (a_i, b_i) \Rightarrow c_i a \succ d_i b$

Relations comparant les différences de préférence

$$(\alpha, \beta) \succsim^* (\gamma, \delta) \Leftrightarrow [\forall a, b \in \mathcal{A}, \forall i \in N, \gamma_i a \succsim \delta_i b \Rightarrow \alpha_i a \succsim \beta_i b]$$

$$(\alpha, \beta) \succsim^{**} (\gamma, \delta) \Leftrightarrow [(\alpha, \beta) \succsim^* (\gamma, \delta) \text{ et } (\delta, \gamma) \succsim^* (\beta, \alpha)]$$

- $\succsim^*$ et $\succsim^{**}$ sont réflexives et transitives (traces sur les différences de préférence)
- $\succsim^{**}$ est réversible
- $a \succsim b$ et $(c_i, d_i) \succsim^* (a_i, b_i) \Rightarrow c_i a \succsim d_i b$
- $a \succ b$ et $(c_i, d_i) \succsim^{**} (a_i, b_i) \Rightarrow c_i a \succ d_i b$

Relations comparant les différences de préférence

$$(\alpha, \beta) \succsim^* (\gamma, \delta) \Leftrightarrow [\forall a, b \in \mathcal{A}, \forall i \in N, \gamma_i a \succsim \delta_i b \Rightarrow \alpha_i a \succsim \beta_i b]$$

$$(\alpha, \beta) \succsim^{**} (\gamma, \delta) \Leftrightarrow [(\alpha, \beta) \succsim^* (\gamma, \delta) \text{ et } (\delta, \gamma) \succsim^* (\beta, \alpha)]$$

- $\succsim^*$ et $\succsim^{**}$ sont réflexives et transitives (traces sur les différences de préférence)
- $\succsim^{**}$ est réversible
- $a \succsim b$ et $(c_i, d_i) \succsim^* (a_i, b_i) \Rightarrow c_i a \succsim d_i b$
- $a \succ b$ et $(c_i, d_i) \succsim^{**} (a_i, b_i) \Rightarrow c_i a \succ d_i b$

Relations comparant les différences de préférence

$$(\alpha, \beta) \succsim^* (\gamma, \delta) \Leftrightarrow [\forall a, b \in \mathcal{A}, \forall i \in N, \gamma_i a \succsim \delta_i b \Rightarrow \alpha_i a \succsim \beta_i b]$$

$$(\alpha, \beta) \succsim^{**} (\gamma, \delta) \Leftrightarrow [(\alpha, \beta) \succsim^* (\gamma, \delta) \text{ et } (\delta, \gamma) \succsim^* (\beta, \alpha)]$$

- $\succsim^*$ et $\succsim^{**}$ sont réflexives et transitives (traces sur les différences de préférence)
- $\succsim^{**}$ est réversible
- $a \succsim b$ et $(c_i, d_i) \succsim^* (a_i, b_i) \Rightarrow c_i a \succsim d_i b$
- $a \succ b$ et $(c_i, d_i) \succsim^{**} (a_i, b_i) \Rightarrow c_i a \succ d_i b$

Relations comparant les différences de préférence

$$(\alpha, \beta) \succsim^* (\gamma, \delta) \Leftrightarrow [\forall a, b \in \mathcal{A}, \forall i \in N, \gamma_i a \succsim \delta_i b \Rightarrow \alpha_i a \succsim \beta_i b]$$

$$(\alpha, \beta) \succsim^{**} (\gamma, \delta) \Leftrightarrow [(\alpha, \beta) \succsim^* (\gamma, \delta) \text{ et } (\delta, \gamma) \succsim^* (\beta, \alpha)]$$

- $\succsim^*$ et $\succsim^{**}$ sont réflexives et transitives (traces sur les différences de préférence)
- $\succsim^{**}$ est réversible
- $a \succsim b$ et $(c_i, d_i) \succsim^* (a_i, b_i) \Rightarrow c_i a \succsim d_i b$
- $a \succ b$ et $(c_i, d_i) \succsim^{**} (a_i, b_i) \Rightarrow c_i a \succ d_i b$

Axiomes

$$\left. \begin{array}{c} \alpha_i a \succsim \beta_i b \\ \text{et} \\ \gamma_j c \succsim \delta_j d \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} \gamma_i a \succsim \delta_i b \\ \text{ou} \\ \alpha_j c \succsim \beta_j d \end{array} \right. \quad \text{URC1}$$

$$\left. \begin{array}{c} \alpha_i a \succsim \beta_i b \\ \text{et} \\ \beta_j c \succsim \alpha_j d \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} \gamma_i a \succsim \delta_i b \\ \text{ou} \\ \delta_j c \succsim \gamma_j d \end{array} \right. \quad \text{URC2}$$

Interprétation

- $\text{URC1} \Leftrightarrow \succsim^*$ est complète
- $\text{URC1 et URC2} \Leftrightarrow \succsim^{**}$ est complète
- URC1 et URC2 sont des conditions indépendantes

Cardinal Coordinate Independence

Wakker (1984, 1989)

$$\left. \begin{array}{l} \alpha_i a \succsim \beta_i b \\ \text{et} \\ \gamma_i b \succsim \delta_i a \\ \text{et} \\ \delta_j c \succsim \gamma_j d \end{array} \right\} \Rightarrow \alpha_j c \succsim \beta_j d \quad \text{CCI}$$

Si $\succsim$ est *complète* :

- CCI implique URC1 et URC2
- CCI est vérifiée ssi $\succsim^{**}$ est complète et $\succsim$ est strictement monotone par rapport à $\succsim^{**}$ ($a \sim b$ et $(c_i, d_i) \succ^{**} (a_i, b_i) \Rightarrow c_i a \succ d_i b$)

Cardinal Coordinate Independence

Wakker (1984, 1989)

$$\left. \begin{array}{l} \alpha_i a \succsim \beta_i b \\ \text{et} \\ \gamma_i b \succsim \delta_i a \\ \text{et} \\ \delta_j c \succsim \gamma_j d \end{array} \right\} \Rightarrow \alpha_j c \succsim \beta_j d \quad \text{CCI}$$

Si $\succsim$ est *complète* :

- CCI implique URC1 et URC2
- CCI est vérifiée ssi $\succsim^{**}$ est complète et $\succsim$ est strictement monotone par rapport à $\succsim^{**}$ ($a \sim b$ et $(c_i, d_i) \succ^{**} (a_i, b_i) \Rightarrow c_i a \succ d_i b$)

Résultats

Théorème

Lorsque Γ est fini ou infini dénombrable, le modèle (M) est vérifié ssi $\succsim$ est réflexive et satisfait URC1 et URC2

- *Modèle (M) avec F impaire ssi $\succsim$ est complète et vérifie URC1 et URC2*
- *Modèle (M) avec F impaire et strictement croissante ssi $\succsim$ est complète et vérifie CCI*

Résultats

Théorème

Lorsque Γ est fini ou infini dénombrable, le modèle (M) est vérifié ssi $\succsim$ est réflexive et satisfait URC1 et URC2

- *Modèle (M) avec F impaire ssi $\succsim$ est complète et vérifie URC1 et URC2*
- *Modèle (M) avec F impaire et strictement croissante ssi $\succsim$ est complète et vérifie CCI*

Résultats

Théorème

Lorsque Γ est fini ou infini dénombrable, le modèle (M) est vérifié ssi $\succsim$ est réflexive et satisfait URC1 et URC2

- Modèle (M) avec F impaire ssi $\succsim$ est *complète* et vérifie URC1 et URC2
- Modèle (M) avec F impaire et *strictement croissante* ssi $\succsim$ est *complète* et vérifie CCI

Plan

- ① Définitions et notations
 - Cadre de travail
 - SEU
 - LD
- ② Cadre axiomatique
 - Présentation
 - Axiomes
 - Résultats
- ③ Applications
 - Modèle SEU
 - Modèle LD
- ④ Discussion

Modèle SEU

Théorème (Bouyssou & Pirlot, 2004, MSS)

$\succsim$ satisfait le modèle (M) avec F impaire et strictement croissante ssi
 $\succsim$ est complète et vérifie CCI (et une condition d'ordre densité)

Théorème (Wakker, 1989)

Supposons que $n \geq 2$, que Γ soit un espace topologique connexe et munissons $\mathcal{A}$ de la topologie produit. Alors $\succsim$ a une représentation dans le modèle SEU (avec u continue) ssi

- $\succsim$ est complète
- $\succsim$ vérifie CCI
- $\succsim$ est transitive
- $\succsim$ est continue (les ensembles $\{a \in \mathcal{A} : a \succ b\}$ et $\{a \in \mathcal{A} : b \succ a\}$ sont des ouverts)

La fonction u est une échelle d'intervalle et les probabilités θ_i sont uniques.

Modèle SEU

Théorème (Bouyssou & Pirlot, 2004, MSS)

$\succsim$ satisfait le modèle (M) avec F impaire et strictement croissante ssi
 $\succsim$ est complète et vérifie CCI (et une condition d'ordre densité)

Théorème (Wakker, 1989)

Supposons que $n \geq 2$, que Γ soit un espace topologique connexe et munissons $\mathcal{A}$ de la topologie produit. Alors $\succsim$ a une représentation dans le modèle SEU (avec u continue) ssi

- $\succsim$ est complète
- $\succsim$ vérifie CCI
- $\succsim$ est transitive
- $\succsim$ est continue (les ensembles $\{a \in \mathcal{A} : a \succ b\}$ et $\{a \in \mathcal{A} : b \succ a\}$ sont des ouverts)

La fonction u est une échelle d'intervalle et les probabilités θ_i sont uniques.

Modèle LD

Observations :

- si $\succsim$ a une représentation dans le modèle LD, elle vérifie URC1 et URC2
- si $\succsim$ a une représentation dans le modèle (M) dans la quelle la fonction p prend au plus trois valeurs, $(-k, 0, +k)$, elle a un représentation dans le modèle LD

Axiomes

$$\left. \begin{array}{c} \alpha_i a \succsim \beta_i b \\ \text{et} \\ \gamma_j c \succsim \delta_j d \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \beta_i a \succsim \alpha_i b \text{ ou} \\ \delta_i a \succsim \gamma_i b \text{ ou} \\ \alpha_j c \succsim \beta_j d \end{array} \right. \quad \text{UM1}$$

$$\left. \begin{array}{c} \alpha_i a \succsim \beta_i b \\ \text{et} \\ \beta_j c \succsim \alpha_j d \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \beta_i a \succsim \alpha_i b \text{ ou} \\ \gamma_i a \succsim \delta_i b \text{ ou} \\ \gamma_j c \succsim \delta_j d \end{array} \right. \quad \text{UM2}$$

- URC1, URC2, UM2 et UM2 sont des conditions indépendantes

Axiomes

$$\left. \begin{array}{l} \alpha_i a \succsim \beta_i b \\ \text{et} \\ \gamma_j c \succsim \delta_j d \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \beta_i a \succsim \alpha_i b \text{ ou} \\ \delta_i a \succsim \gamma_i b \text{ ou} \\ \alpha_j c \succsim \beta_j d \end{array} \right. \quad \text{UM1}$$

$$\left. \begin{array}{l} \alpha_i a \succsim \beta_i b \\ \text{et} \\ \beta_j c \succsim \alpha_j d \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \beta_i a \succsim \alpha_i b \text{ ou} \\ \gamma_i a \succsim \delta_i b \text{ ou} \\ \gamma_j c \succsim \delta_j d \end{array} \right. \quad \text{UM2}$$

- URC1, URC2, UM2 et UM2 sont des conditions indépendantes

Résultat

Théorème

Une relation $\succsim$ a une représentation dans le modèle LD ssi

- $\succsim$ est réflexive*
- $\succsim$ vérifie URC1 et URC2*
- $\succsim$ vérifie UM1 et UM2*

Conclusion

- le modèle (M) est un cadre approprié pour comprendre et analyser les différences entre le modèle SEU et le modèle LD
- la caractéristique distinctive essentielle du modèle LD tient à la pauvreté de la relation $\succsim^{**}$

Résultat

Théorème

Une relation $\succsim$ a une représentation dans le modèle LD ssi

- $\succsim$ est réflexive*
- $\succsim$ vérifie URC1 et URC2*
- $\succsim$ vérifie UM1 et UM2*

Conclusion

- le modèle (M) est un cadre approprié pour comprendre et analyser les différences entre le modèle SEU et le modèle LD
- la caractéristique distinctive essentielle du modèle LD tient à la pauvreté de la relation $\succsim^{**}$

Plan

- ① Définitions et notations
 - Cadre de travail
 - SEU
 - LD
- ② Cadre axiomatique
 - Présentation
 - Axiomes
 - Résultats
- ③ Applications
 - Modèle SEU
 - Modèle LD
- ④ Discussion

Résumé

Le cadre fourni par le modèle (M) :

- est très flexible tout en étant non trivial
- a une interprétation intuitive en terme de différences de préférence
- a une caractérisation axiomatique simple
- permet d'obtenir les modèles SEU et LD comme cas particuliers (la même chose est vraie pour d'autres modèles, par exemple le modèle SSA de Fishburn)

Discussion

Quid du modèle LD dans lequel $\mathcal{S}$ a de bonnes propriétés de transitivité ?

- ajouter des axiomes
- ces axiomes sont indépendants des précédents
- Saari (1992): l'agrégation ordinale ne prend pas en compte les propriétés de transitivité de ce qui est agrégé
- traduction : pour caractériser le modèle LD, supposer que $\mathcal{S}$ a de bonnes propriétés de transitivité n'est ni nécessaire ni utile

Modèle sous-jacent :

$$a \succsim b \Leftrightarrow F(\varphi(u(a_1), u(b_1)), \dots, \varphi(u(a_n), u(b_n))) > 0 \quad (\text{M}^*)$$

avec F comme dans (M) et φ antisymétrique et non décroissante en son premier argument

Fargier & Perny (1999)

Fargier & Perny (1999) et Dubois et al. (2003)

Caractérisation différente du modèle LD reposant sur une condition d'« invariance ordinale » inspirée des conditions de « neutralité » en théorie du choix social

Résultat plus direct mais ...

- il utilise une condition très forte qui caractérise presque à elle seule le modèle LD
- il ne permet pas de replacer le modèle LD dans un cadre plus général

Objectif différent : adapter les résultats à la Arrow au modèle LD

Message : *si $\succsim$ a de bonnes propriétés de transitivité et a une représentation dans le modèle LD alors la répartition de la vraisemblance entre les états est très inégale*

Fargier & Perny (1999)

Fargier & Perny (1999) et Dubois et al. (2003)

Caractérisation différente du modèle LD reposant sur une condition d'« invariance ordinale » inspirée des conditions de « neutralité » en théorie du choix social

Résultat plus direct mais ...

- il utilise une condition très forte qui caractérise presque à elle seule le modèle LD
- il ne permet pas de replacer le modèle LD dans un cadre plus général

Objectif différent : adapter les résultats à la Arrow au modèle LD

Message : *si $\succsim$ a de bonnes propriétés de transitivité et a une représentation dans le modèle LD alors la répartition de la vraisemblance entre les états est très inégale*

Fargier & Perny (1999)

Fargier & Perny (1999) et Dubois et al. (2003)

Caractérisation différente du modèle LD reposant sur une condition d'« invariance ordinale » inspirée des conditions de « neutralité » en théorie du choix social

Résultat plus direct mais ...

- il utilise une condition très forte qui caractérise presque à elle seule le modèle LD
- il ne permet pas de replacer le modèle LD dans un cadre plus général

Objectif différent : adapter les résultats à la Arrow au modèle LD

Message : *si $\succsim$ a de bonnes propriétés de transitivité et a une représentation dans le modèle LD alors la répartition de la vraisemblance entre les états est très inégale*