# Théorie des jeux

Tristan Cazenave

Professeur

Tristan.Cazenave@dauphine.fr

# Introduction

- References :
- Robert Marks, UNSW.
- Mike Shor, University of Connecticut.
- A course in game theory, Rubinstein and Osborne.

# Introduction

- La société TarteAuxPommes produit et vend des tartes.
- Chaque jour elle doit choisir entre vendre ses tartes à un prix élevé ou pas.
- Que doit elle considérer pour faire son choix ?

# Introduction

- Choses à considérer :
  - Le prix des tartes des sociétés rivales.
  - Le prix des autres desserts.

- Une façon naïve de résoudre le problème est de fixer son prix en fonction de ce qu'elle croit que vont être les prix des autres.

# Introduction

- Alternative :
  - Essayer de prévoir le prix des autres.
  - Utiliser ses connaissances sur les autres.
  - En particulier le fait que les autres essaient aussi de prévoir les prix de TarteAuxPommes et des autres sociétés concurrentes.
- Utilisation de la théorie des jeux :
  - TarteAuxPommes doit faire un modèle du comportement de ses rivales.
  - Essayer de trouver leurs comportements les plus probables.

# Introduction

- Modèle le plus simple :
  - Tous les acteurs ne joue qu'une seule fois.
  - Tous les acteurs connaissent les technologies et les objectifs des autres acteurs.
- Outils pour analyser l'interaction :
  - Les matrices de gain.
  - Les équilibres de Nash.

# Introduction

- Equilibre de Nash :
  - Aucun des joueurs n'a envie de changer son choix d'action, en supposant que chaque joueur a choisi sa meilleure action.
  - Il peut exister plusieurs équilibres de Nash pour un jeu.
  - Le résultat d'une interaction n'est pas forcément un équilibre de Nash.

# Introduction

- Interactions répétées :
  - Que se passe-t-il si les entreprises jouent plusieurs jours de suite ?
  - L'objectif n'est plus de maximiser le profit sur un jour mais un objectif à plus long terme.
  - Des prix bas peuvent amener des clients à changer de fournisseur et augmenter les parts de marché.
  - Augmenter la production peut améliorer la productivité.

# Introduction

- Baisser les prix peut aussi être dangereux :
  - Les autres entreprises peuvent être influencées par la baisse des prix.
  - Elles peuvent aussi baisser leurs prix.
  - Déclencher une guerre des prix.

# Introduction

- Les jeux sur plusieurs tours peuvent être analysés avec :
  - Des arbres de jeux.
  - L'analyse rétrograde.

# Introduction

- Information complète ou non :

Que se passe-t-il si TarteAuxPommes ne connait pas exactement les gains de ses rivales ?

Est-ce qu'une rivale est intéressée par les parts de marché ou par les profits à court terme ?

Que savent les rivales de TarteAuxPommes ?

==> Jeux à information incomplète

# Introduction

- Apprentissage :

Les rivales peuvent apprendre les informations privées à partir des comportements.

# Introduction

La théorie des jeux est l’étude des comportements rationnels dans les situations où les acteurs sont dépendants les uns des autres.

Ils peuvent avoir des intérêts communs : jeux de coordination

Ils peuvent être en compétition.

Ils sont rationnels : chacun fait du mieux qu'il peut avec ses informations

Comme les joueurs sont interdépendants, les décisions d’un joueur dépendent des décisions des autres  : on cherche à les prévoir.

# Introduction

- Classification des jeux :

  Séquentiels ou simultanés

  Compétition ou coordination

  Joués une seule fois ou répétés

  Information complète ou non

# Jeux à coups simultanés

# Jeux à coups simultanés

- Stratégies discrètes (pas de choix aléatoires entre les actions)
- Les acteurs jouent tous en même temps sans connaître les actions des autres. Information imparfaite.
- Exemples : choix d’un produit ou campagne de publicité

# Jeux à coups simultanés

- Outils utilisés pour analyser les jeux à coups simultanés :
  - La matrice de gain
  - L’équilibre de Nash
  - Le dilemme du prisonnier
  - Méthodes pour trouver l’équilibre de Nash

# Jeux à coups simultanés

- On cherche à prévoir les actions des autres.
- On cherche à prévoir les actions des autres sachant qu'ils essaient de prévoir les actions des autres.
- ...
- Eviter la circularité des raisonnements.
- Pour cela on écrit la matrice de gain et on trouve un choix que personne ne regrette.

# Jeux à coups simultanés

- Equilibre de Nash :
- Une combinaison d'actions pour tous les joueurs pour laquelle aucun des joueurs ne souhaite modifier son action si les autres ne modifient pas non plus leur action.

# Jeux à coups simultanés

- Deux joueurs :
  - Monsieur Ligne choisit la ligne
  - Madame colonne choisit la colonne
- Dans chaque cellule de la matrice on écrit le gain de Ligne suivi du gain de Colonne.

# Jeux à coups simultanés

- Matrice de gain :

Colonne

Ligne

| | A | B | C |
|---|---|---|---|
| W | 3,1 | 2,3 | 10,2 |
| X | 4,5 | 3,0 | 6,4 |
| Y | 2,2 | 5,4 | 12,3 |
| Z | 5,6 | 4,5 | 9,7 |

- Quel est l'équilibre de Nash ?

# Jeux à coups simultanés

- Matrice de gain :

Colonne

Ligne

| | A | B | C |
|---|---|---|---|
| W | 3,1 | 2,3 | 10,2 |
| X | 4,5 | 3,0 | 6,4 |
| Y | 2,2 | **5,4** | 12,3 |
| Z | 5,6 | 4,5 | 9,7 |

# Jeux à coups simultanés

- Football américain :
- Jeu à somme nulle.
- La somme des gains de chaque cellule est constante.
- On indique seulement le gain de Ligne.
- Le gain de Colonne est l'opposé.
- Gains = nombre de mètres gagnés par l’attaque.

# Jeux à coups simultanés

- Football américain :

| | Run | Pass | Blitz |
|---|---|---|---|
| Run | 2 | 5 | 13 |
| Short pass | 7 | 6 | 10 |
| Medium pass | 6 | 4 | 1 |
| Long pass | 10 | 3 | -2 |

- Quel est l'équilibre de Nash ?

# Jeux à coups simultanés

- Football américain :

| | Run | Pass | Blitz |
|---|---|---|---|
| Run | 2 | 5 | 13 |
| Short pass | 7 | 6 | 10 |
| Medium pass | 6 | 4 | 1 |
| Long pass | 10 | 3 | -2 |

# Jeux à coups simultanés

- Méthodes pour trouver des équilibres de Nash :

  1. Elimination des stratégies dominées.

     Lignes ou colonnes jamais choisies quelle que soit le choix de l'autre joueur.

     Elimination des lignes et colonnes dominées.

  2. Tracer des flèches depuis les cases dominées vers les cases dominantes.

     Equilibre de Nash = case sans flèche sortante

# Jeux à coups simultanés

- Le dilemme du prisonnier :
  - Deux prisonniers sont interrogés séparément par la police et ne peuvent pas communiquer.
  - Chacun a le choix entre dénoncer l'autre ou pas.
  - Les gains sont les années de prison.
  - Si les deux dénoncent ils ont tous les deux 8 ans.
  - Si l'un dénonce et l'autre pas celui qui dénonce est libre et l'autre à 20 ans.
  - Si les deux ne dénoncent pas ils ont tous les deux 1 an.
  - Ecrire la matice de gain et analyser le jeu.

# Jeux à coups simultanés

- Le dilemme du prisonnier :

| | Dénoncer | Ne pas Dénoncer |
|---|---|---|
| Dénoncer | 8,8 | 0,20 |
| Ne pas dénoncer | 20,0 | 1,1 |

- Equilibre de Nash ?

# Jeux à coups simultanés

- Le dilemme du prisonnier :

| | Dénoncer | Ne pas Dénoncer |
|---|---|---|
| Dénoncer | 8,8 | 0,20 |
| Ne pas dénoncer | 20,0 | 1,1 |

- Dénoncer est une stratégie dominante.

# Jeux à coups simultanés

- Le jeu de la publicité :
  - Orange et Free veulent faire des campagnes de publicité.
  - Les deux compagnies doivent choisir si elles investissent beaucoup ou peu dans la publicité.
  - La publicité coûte cher mais si l’une fait beaucoup de publicité et l’autre peu, celle qui en fait beaucoup récupère plus de clients.
  - Si les deux font beaucoup de publicité, Orange gagne 70 et Free 50.
  - Si Orange fait beaucoup de publicité et Free peu, Orange gagne 125 et Free 25 et vice versa.
  - Si les deux font peu de publicité Orange gagne 120 et Free 90.
- Analyser ce jeu.

# Jeux à coups simultanés

- Le jeu de la publicité :

| | Beaucoup | Peu |
|---|---|---|
| Beaucoup | 70,50 | 125,25 |
| Peu | 25,125 | 120,90 |

- Reconnaissez-vous la structure ?

# Jeux à coups simultanés

- Le jeu de la publicité :

| | Beaucoup | Peu |
|---|---|---|
| Beaucoup | 70,50 | 125,25 |
| Peu | 25,125 | 120,90 |

- C'est un dilemme du prisonnier.

# Jeux à coups simultanés

- Avec les stratégies discrètes l'ordre des gains est suffisant :

| | Beaucoup | Peu |
|---|---|---|
| Beaucoup | 3,2 | 6,1 |
| Peu | 1,6 | 5,4 |

# Jeux à coups simultanés

- Le jeu de la capacité de production :

  Joueurs = 2 entreprises A et B

  Trois choix :

  pas d’augmentation de la capacité de production

  une petite augmentation

  une grande augmentation

  Plus grande capacité —> plus de ventes, plus de parts de marché, économies d'échelle —> profits s'il n'y a pas de guerre des prix.

# Jeux à coups simultanés

- Le jeu de la capacité de production :

| | Pas d'expansion | Petite | Grande |
|---|---|---|---|
| Pas d'expansion | 18,18 | 15,20 | 9,18 |
| Petite | 20,15 | 16,16 | 8,12 |
| Grande | 18,9 | 12,8 | 0,0 |

- Analyser ce jeu.

# Jeux à coups simultanés

- Le jeu de la capacité de production :

| | Pas d'expansion | Petite | Grande |
|---|---|---|---|
| Pas d'expansion | 18,18 | 15,20 | 9,18 |
| Petite | 20,15 | 16,16 | 8,12 |
| Grande | 18,9 | 12,8 | 0,0 |

- Equilibre en Petite,Petite.
- Grande est dominée par Petite.

# Jeux à coups simultanés

- Le gouvernement face à la banque centrale :
- Le gouvernement choisit la politique fiscale :

  —> Un budget équilibré ou déficitaire.
- La banque centrale choisit la politique monétaire :

  —> Des taux d'intérêts haut ou bas.

# Jeux à coups simultanés

- Le gouvernement face à la banque centrale :

| | bas | haut |
|---|---|---|
| équilibré | 3,4 | 1,3 |
| déficitaire | 4,1 | 2,2 |

- Analyser ce jeu.

# Jeux à coups simultanés

- Le gouvernement face à la banque centrale :

| | bas | haut |
|---|---|---|
| équilibré | 3,4 | 1,3 |
| déficitaire | 4,1 | 2,2 |

- Déficitaire est une stratégie dominante pour le gouvernement.

# Jeux à coups simultanés

- Elimination de stratégies dominées :

| | A | B | C |
|---|---|---|---|
| W | 3,1 | 2,3 | 10,2 |
| X | 4,5 | 3,0 | 6,4 |
| Y | 2,2 | 5,4 | 12,3 |
| Z | 5,6 | 4,5 | 9,7 |

- Trouver l'équilibre de Nash en éliminant les stratégies dominées.

# Jeux à coups simultanés

- Jeux de coordination :
- Intérêts communs mais choix indépendants.
- Harry et Sally préfèrent être dans le même café que dans des cafés différents.
- Ils ont le choix entre deux cafés : Starbucks et le café du coin.
- Ecrire la matrice de gain et trouver les équilibres de Nash.

# Jeux à coups simultanés

- Harry et Sally :

| | Starbucks | Café du coin |
|---|---|---|
| Starbucks | 1,1 | 0,0 |
| Café du coin | 0,0 | 1,1 |

- Deux équilibres de Nash.

# Jeux à coups simultanés

- La bataille des sexes :
- Exemple : BlueRay vs HD-DVD.
- Deux standards en compétition sur le même marché.
- Deux joueurs amoureux et sont prêts à sacrifier leurs préférences pour sortir avec l’autre.
- Le premier joueur préfère aller au théâtre.
- La deuxième joueuse préfère aller au concert.
- Ils préfèrent être ensemble que sortir seul.
- Ecrire la matrice de gain et trouver les équilibres de Nash.

# Jeux à coups simultanés

- La bataille des sexes :

| | Théâtre | Concert |
|---|---|---|
| Théâtre | 2,1 | 0,0 |
| Concert | -1,-1 | 1,2 |

- Deux équilibres de Nash.

# Jeux à coups simultanés

| | X | Y | Z |
|---|---|---|---|
| A | 60,90 | 80,90 | 0,80 |
| B | 90,0 | 50,50 | 20,80 |
| C | 80 ,10 | 90,0 | 40,40 |

- Trouver les stratégies dominées.
- Trouver les équilibres de Nash.

# Jeux à coups simultanés

- On considère le jeu pour lequel deux athlètes envisagent de se doper :

| | Se doper | Ne pas se doper |
|---|---|---|
| Se doper | 0,0 | 12,-2 |
| Ne pas se doper | -2,12 | 10,10 |

- Quel est le type de ce jeu ?

# Jeux à coups simultanés

- On considère le jeu pour lequel deux athlètes envisagent de se doper :

| | Se doper | Ne pas se doper |
|---|---|---|
| Se doper | 0,0 | 12,-2 |
| Ne pas se doper | -2,12 | 10,10 |

- Un dilemme du prisonnier.

# Jeux à coups simultanés

- Venus contre Serena :

| | Coup Droit | Revers |
|---|---|---|
| Coup Droit | 60 | 80 |
| Revers | 90 | 20 |

- Analyser ce jeu à somme nulle.

# Jeux à coups simultanés

- Venus contre Serena :

| | Coup Droit | Revers |
|---|---|---|
| Coup Droit | 60 | 80 |
| Revers | 90 | 20 |

- Pas d'équilibre en stratégies discrètes.

# Jeux à coups simultanés

- Pierre Feuille Ciseaux :
- Deux joueurs choisissent simultanément Pierre Feuille ou Ciseaux.
- Pierre bat Ciseaux qui bat Feuille qui bat Pierre.
- C'est un jeu à somme nulle.
- Ecrire la matrice de gain et analyser le jeu.

# Jeux à coups simultanés

| | Pierre | Feuille | Ciseaux |
|---|---|---|---|
| Pierre | 0,0 | -1,1 | 1,-1 |
| Feuille | 1,-1 | 0,0 | -1,1 |
| Ciseaux | -1,1 | 1,-1 | 0,0 |

- Pas d'équilibre de Nash en stratégies discrètes.

# Jeux à coups simultanés

- Chicken :
- Deux joueurs en voiture se font face sur une route trop étroite pour les deux.
- Ils ont le choix entre aller tout droit ou tourner.
- Analyser ce jeu.

# Jeux à coups simultanés

- Chicken :

| | Tourner | Tout droit |
|---|---|---|
| Tourner | 0,0 | 0,100 |
| Tout droit | 100,0 | -1000,-1000 |

- Equilibres ?

# Jeux à coups simultanés

- Chicken :

| | Tourner | Tout droit |
|---|---|---|
| Tourner | 0,0 | 0,100 |
| Tout droit | 100,0 | -1000,-1000 |

- Deux équilibres en stratégies discrètes.

# Jeux à coups simultanés

- Qu'a-t-on appris :

1. Quel est le problème stratégique ?
2. Qui sont les joueurs ?
3. Quels sont les objectifs stratégiques des joueurs ?
4. Quelles sont les actions ?
5. Structure du jeu :

    simultané ou séquentiel

    répété ou pas

6. Préférences sur les résultats d’interactions possibles

# Jeux à coups simultanés

- Qu'a-t-on appris :
- Prévoir et raisonner à partir des prévisions.
- Si une stratégie dominante existe alors l'utiliser.
- Eliminer les stratégies dominées itérativement.
- Cherche un équilibre : une paire de stratégies pour lesquelles chaque action est la meilleure réponse à celle de l'autre.

# Jeux à coups simultanés

- Bataille de la mer de Bismarck :
- Deux acteurs :

  Amiral Imamura, il doit transporter les troupes japonaises à travers la mer de Bismarck

  Amiral Kenney, cherche à bombarder les troupes d'Imamura.
- Actions :

  Imamura choisit entre une route au nord qui lui prend 2 jours et une route au sud qui prend 3 jours.

  Kenney choisit d'envoyer ses avions soit au nord soit au sud et s'il se trompe, il perd un jour de bombardement.
- Des navires sont bombardés dans toutes les configurations.
- Jeu à somme nulle.
- Analyser ce jeu.

# Jeux à coups simultanés

- Bataille de la mer de Bismarck :

| | Nord | Sud |
|---|---|---|
| Nord | 2,-2 | 2,-2 |
| Sud | 1,-1 | 3,-3 |

Imamura a une stratégie faiblement dominante : Nord.

Kenney le sait et choisit aussi Nord.

# Jeux à coups simultanés

- Bataille des chaînes de télévision :
- Deux chaines de télévision ABC et XYZ se battent pour des parts d’audience.
- Plus d’audience signifie plus de profits publicitaires.
- Chaque chaine peut choisir soit un sitcom soit du sport.
- ABC a l’avance sur les sitcoms.
- Si les deux choisissent sitcom, ABC a 55% et XYZ 45%.
- XYZ a l’avantage pour le sport : 55%, 45%.
- ABC sport, XYZ sitcom : 50/50
- ABC sitcom, XYZ sport, 52/48
- Analyser ce jeu.

# Jeux à coups simultanés

- Bataille des chaînes de télévision :

| | Sitcom | Sport |
|---|---|---|
| Sitcom | 55,45 | 52,48 |
| Sport | 50,50 | 45,55 |

Equilibre de Nash ?

# Jeux à coups simultanés

- Bataille des chaînes de télévision :

| | Sitcom | Sport |
|---|---|---|
| Sitcom | 55,45 | 52,48 |
| Sport | 50,50 | 45,55 |

# Jeux à coups simultanés

- Les vendeurs de glaces :
- Deux vendeurs de glace sont chacun à une extrémité d’une plage.
- Ils ont le choix entre se déplacer au centre de la plage ou rester à leur place.
- Il y a 80 personnes sur la plage uniformément réparties.
- Chaque personne achète une glace au vendeur de glace le plus proche.
- Ecrire la matrice de gain et analyser le jeu.

# Jeux à coups simultanés

- Les vendeurs de glaces :

| | Rester sur Place | Se déplacer |
|---|---|---|
| Rester sur Place | 40,40 | 20,60 |
| Se déplacer | 60,20 | 40,40 |

Se déplacer est une stratégie dominante.

# Jeux à coups simultanés

- Les vendeurs de glace est analogue, a un éventail de produit où les extrêmes sont des niches particulières et où le centre correspond au produit le plus populaire.
- Avec ce modèle simple on écarte les extrêmes.
- Exemples :
- la convergence des modes
- l’uniformité des programmes de radio et de télévision
- les programmes des partis politiques
- la planification des vols des compagnies aériennes
- Que se passe-t-il si le centre est trop loin de certains baigneurs ?
- Enlève la tendance à se déplacer et permet une diversification des produits.

# Jeux à coups simultanés

- Deux entreprises développent deux produits similaires avec des technologies différentes. La compatibilité des produits est importante. Si les deux entreprises choisissent la même technologie elles gagnent chacune 300, sinon elles gagnent 0. Evoluer vers la technologie concurrente coûte 200 à la première et 350 à la deuxième entreprise. Les deux entreprises choisissent simultanément. Quelle est la matrice de gain ? Quel est l'équilibre ?

# Jeux à coups simultanés

- La compatibilité des technologies :

| | Changer | Ne pas changer |
|---|---|---|
| Changer | -200,-350 | 100,300 |
| Ne pas changer | 300,-50 | 0,0 |

Equilibre Changer, Ne pas Changer.

# Jeux à coups simultanés

- Dans le film « Un homme d'exception », John Nash et trois de ses amis se trouvent dans un bar face à un dilemme. Ils ont le choix entre approcher quatre brunes et une blonde.
- Chaque jeune homme veut approcher et attirer l'attention d'une jeune femme.
- Le gain d'approcher la jeune femme blonde et de 10, le gain d'approcher une jeune femme brune est de 5 et le gain de ne pas approcher est de 0.

# Jeux à coups simultanés

- Si deux hommes ou plus approchent la jeune femme blonde elle les rejette tous et les brunes les rejettent aussi car elles ne veulent pas être des seconds choix.
- Ecrire la matrice de gain et trouver les équilibres pour deux hommes, une blonde et deux brunes.

# Jeux à coups simultanés

- Deux joueurs :

| | blonde | brune |
|---|---|---|
| blonde | 0,0 | 10,5 |
| brune | 5,10 | 5,5 |

# Jeux à coups simultanés

- Ecrire la matrice de gain en trois dimension pour trois hommes (une blonde et trois brunes).
- Généraliser l'analyse pour 4 hommes ou plus.

# Jeux à coups simultanés

- Trois joueurs :
- Joueur 1 blonde :

| | blonde | brune |
|---|---|---|
| blonde | 0,0,0 | 0,0,5 |
| brune | 0,5,0 | 10,5,5 |

- Joueur 1 brune :

| | blonde | brune |
|---|---|---|
| blonde | 5,0,0 | 5,10,5 |
| brune | 5,5,10 | 5,5,5 |

# Jeux à coups simultanés

- Trois joueurs :
- Joueur 1 blonde :

| | blonde | brune |
|---|---|---|
| blonde | 0,0,0 | 0,0,5 |
| brune | 0,5,0 | 10,5,5 |

- Joueur 1 brune :

| | blonde | brune |
|---|---|---|
| blonde | 5,0,0 | 5,10,5 |
| brune | 5,5,10 | 5,5,5 |

# Jeux à coups simultanés

- Soit un jeu pour lequel il y a un prix de 30. Il y a trois joueurs A, B et C. Chacun peut acheter un ticket de 15, de 30 ou ne pas acheter de ticket. Ils font leurs choix simultanément et indépendamment. Si personne n'a acheté de ticket le prix n'est pas distribué. Sinon le prix est partagé entre ceux qui ont acheté le ticket le plus cher. Modéliser ce jeu sous forme stratégique et trouver les équilibres de Nash.

# Jeux à coups simultanés

- A choisit 0 :

| | 0 | 15 | 30 |
|---|---|---|---|
| 0 | 0,0,0 | 0,0,15 | 0,0,0 |
| 15 | 0,15,0 | 0,0,0 | 0,-15,0 |
| 30 | 0,0,0 | 0,0,-15 | 0,-15,-15 |

- A choisit 15 :

- A choisit 30 :

# Jeux à coups simultanés

- A choisit 0 :

| | 0 | 15 | 30 |
|---|---|---|---|
| 0 | 0,0,0 | 0,0,15 | 0,0,0 |
| 15 | 0,15,0 | 0,0,0 | 0,-15,0 |
| 30 | 0,0,0 | 0,0,-15 | 0,-15,-15 |

- A choisit 15 :

| | 0 | 15 | 30 |
|---|---|---|---|
| 0 | 15,0,0 | 0,0,0 | -15,0,0 |
| 15 | 0,0,0 | -5,-5,-5 | -15,-15,0 |
| 30 | -15,0,0 | -15,0,-15 | -15,-15,-15 |

- A choisit 30 :

| | 0 | 15 | 30 |
|---|---|---|---|
| 0 | 0,0,0 | 0,0,-15 | -15,0,-15 |
| 15 | 0,-15,0 | 0,-15,-15 | -15,-15,-15 |
| 30 | -15,-15,0 | -15,-15,-15 | -20,-20,-20 |

# Jeux à coups simultanés

- A choisit 0 :

| | 0 | 15 | 30 |
|---|---|---|---|
| 0 | 0,0,0 | 0,0,15 | 0,0,0 |
| 15 | 0,15,0 | 0,0,0 | 0,-15,0 |
| 30 | 0,0,0 | 0,0,-15 | 0,-15,-15 |

- A choisit 15 :

| | 0 | 15 | 30 |
|---|---|---|---|
| 0 | 15,0,0 | 0,0,0 | -15,0,0 |
| 15 | 0,0,0 | -5,-5,-5 | -15,-15,0 |
| 30 | -15,0,0 | -15,0,-15 | -15,-15,-15 |

- A choisit 30 :

| | 0 | 15 | 30 |
|---|---|---|---|
| 0 | 0,0,0 | 0,0,-15 | -15,0,-15 |
| 15 | 0,-15,0 | 0,-15,-15 | -15,-15,-15 |
| 30 | -15,-15,0 | -15,-15,-15 | -20,-20,-20 |

# Jeux séquentiels

# Jeux séquentiels

- Arbre de jeu :
- Les joueurs jouent les uns après les autres.
- Le premier joueur est à la racine de l'arbre.
- Les joueurs sont aux nœuds de l'arbre.
- Les branches sont les actions du joueur.
- Les gains sont aux feuilles de l'arbre.

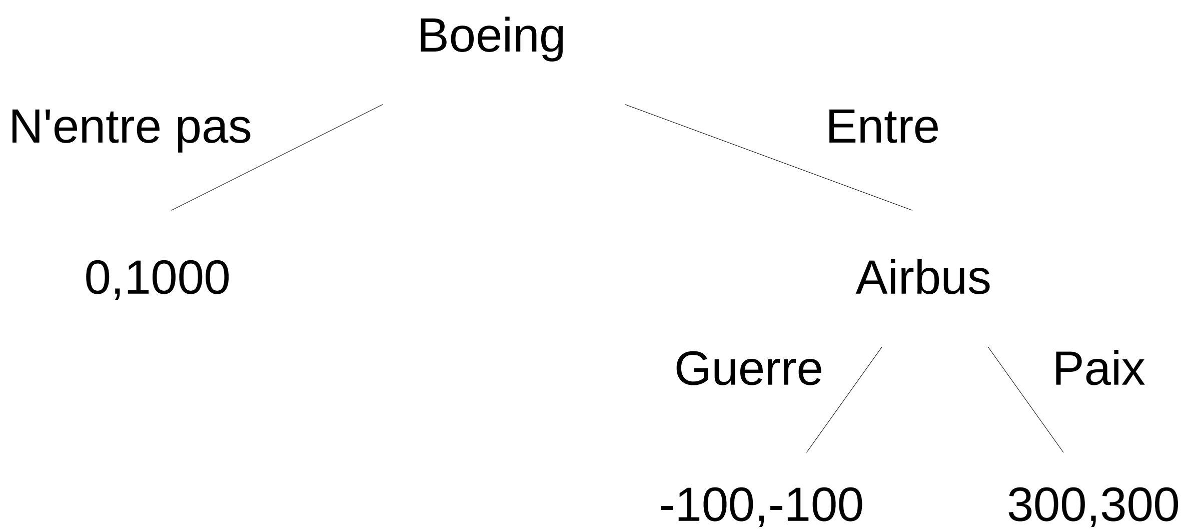
# Jeux séquentiels

- Analyse rétrograde :
- On remonte les gains des feuilles vers la racine.
- Chaque nœud est associé à des gains pour chaque joueur.
- Chaque joueur choisit la branche qui maximise ses gains et remonte les gains associés.

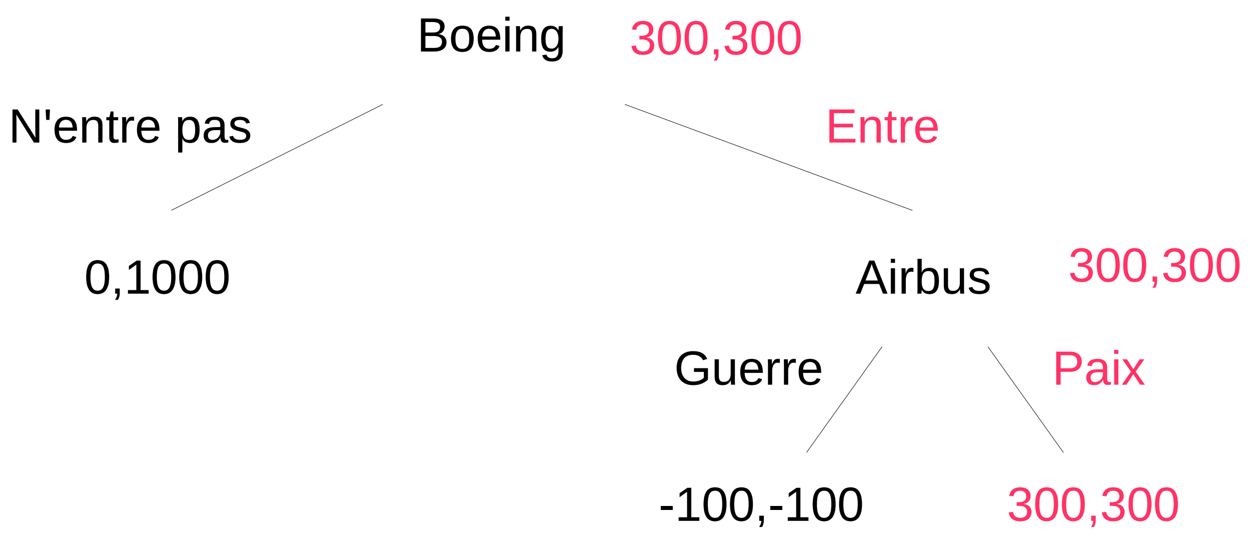
# Jeux séquentiels

- Boeing et Airbus :
- Airbus et Boeing veulent développer un nouvel avion commercial.
- Airbus est en avance et Boeing se demande s’il entre sur le marché.
- Si Boeing n’entre pas, il gagne 0 et Airbus a le monopole et gagne 1 milliard.
- Si Boeing entre, Airbus a le choix entre être pacifique ou déclencher une guerre des prix.
- Si on a une guerre des prix, chacun perd 100 millions.
- Sinon chacun gagne 300 millions.
- Représenter l’interaction avec un arbre et analyser le jeu.

# Jeux Séquentiels



# Jeux Séquentiels

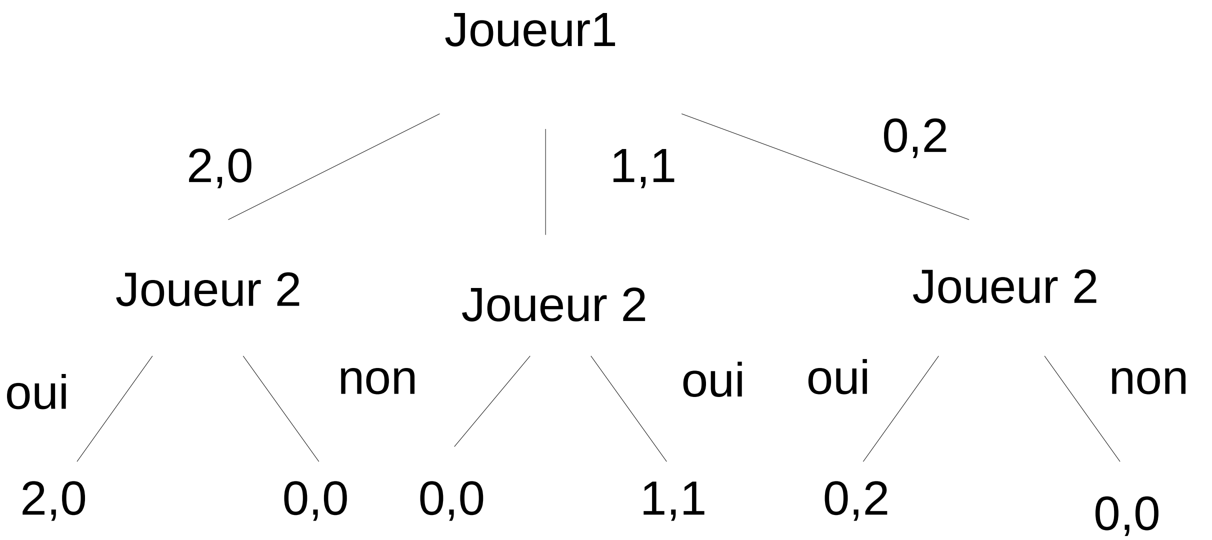


# Jeux Séquentiels

- Deux joueurs se partagent deux objets identiques avec la procédure suivante :
- Le premier joueur propose une allocation.
- Le deuxième joueur accepte ou refuse.
- En cas de refus personne n'a aucun objet.
- Chaque joueur n'est intéréssé que par le nombre d'objets qu'il obtient.
- Analyser cette interaction.

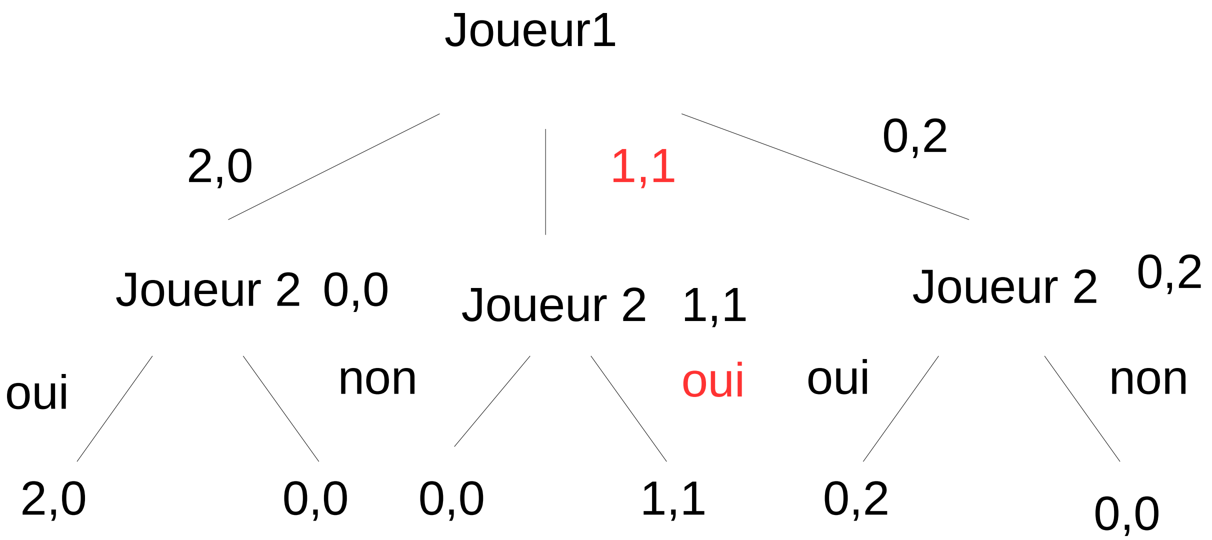
# Jeux Séquentiels

- Partage de deux objets :



# Jeux Séquentiels

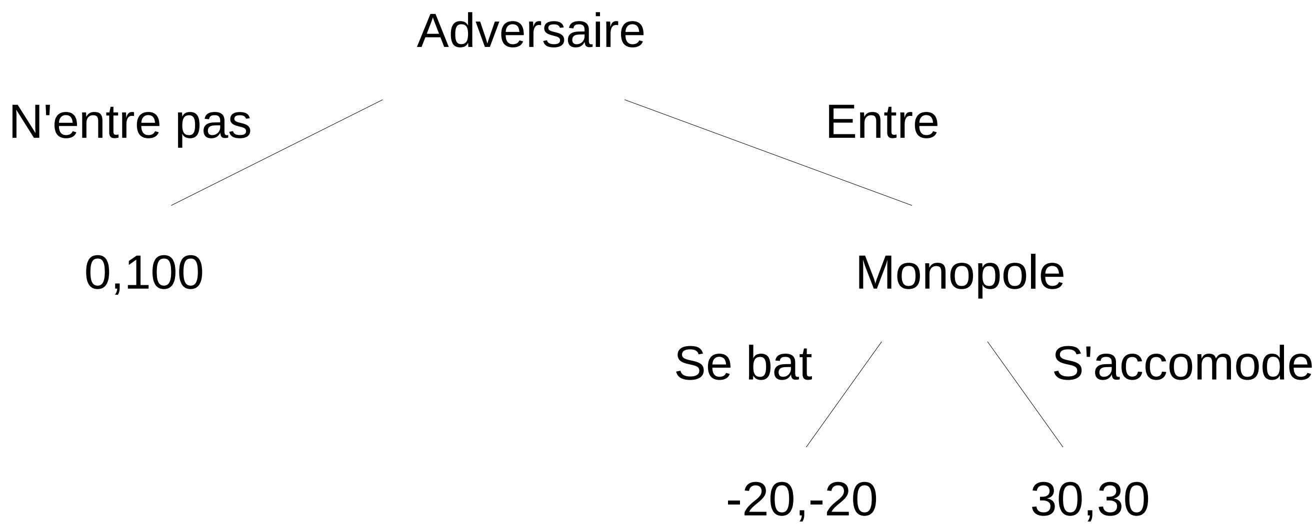
- Partage de deux objets :



# Jeux Séquentiels

- Une entreprise a un monopole qui lui fait gagner 100. Un adversaire choisit d'entrer sur le marché ou non. S'il entre, le monopole a le choix entre s'accomoder ou se battre. S'il s'accomode les deux entreprises gagnent 30. Si elles se battent elles perdent toutes les deux 20.
- Quel est l'équilibre ?

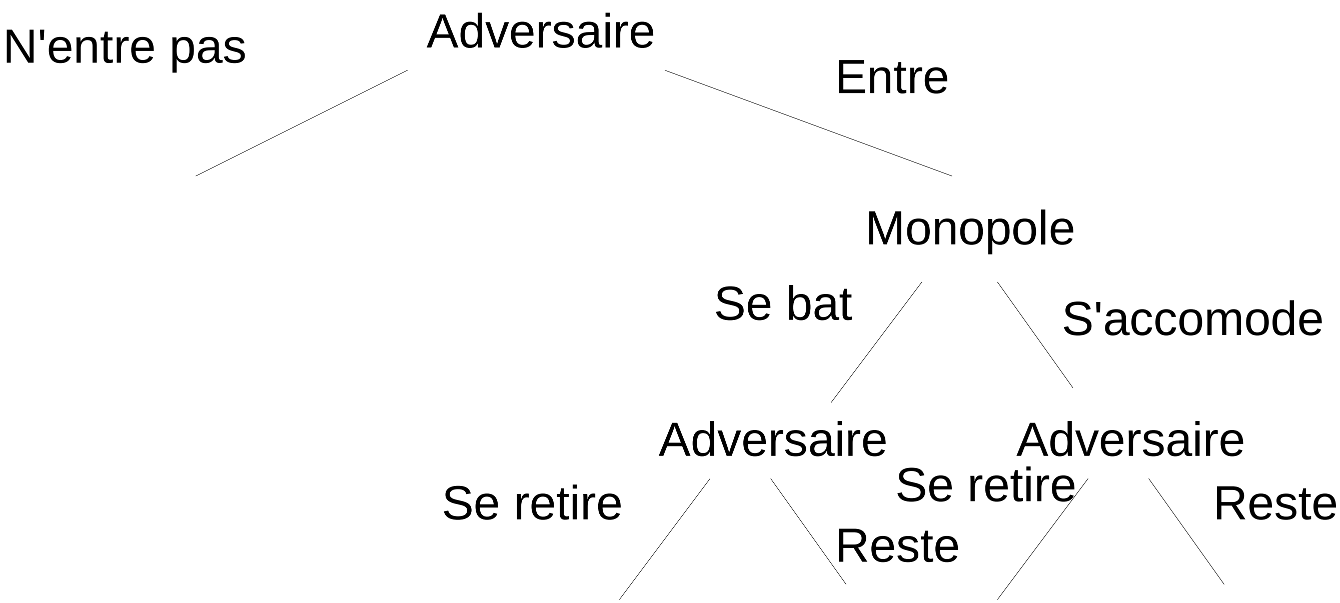
# Jeux Séquentiels



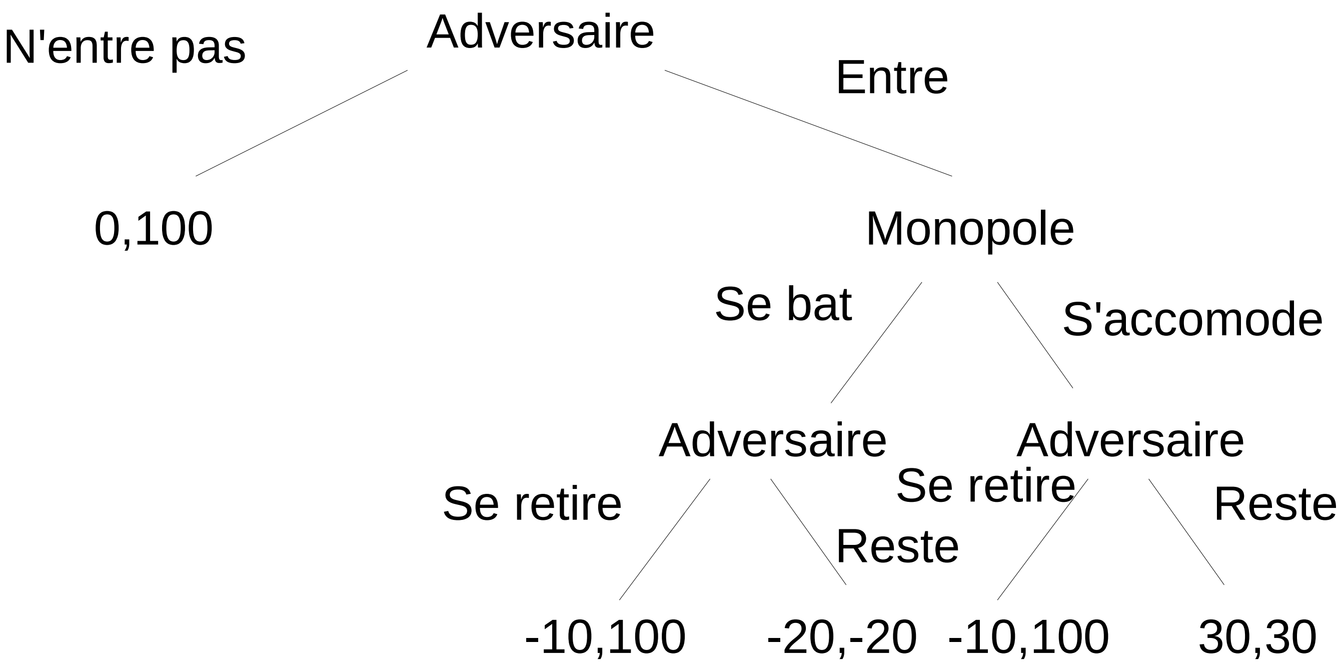
# Jeux Séquentiels

- Si après la décision du monopole l'adversaire peut se retirer et perdre 10 et que dans ce cas le monopole gagne de nouveau 100, quel est l'équilibre ?

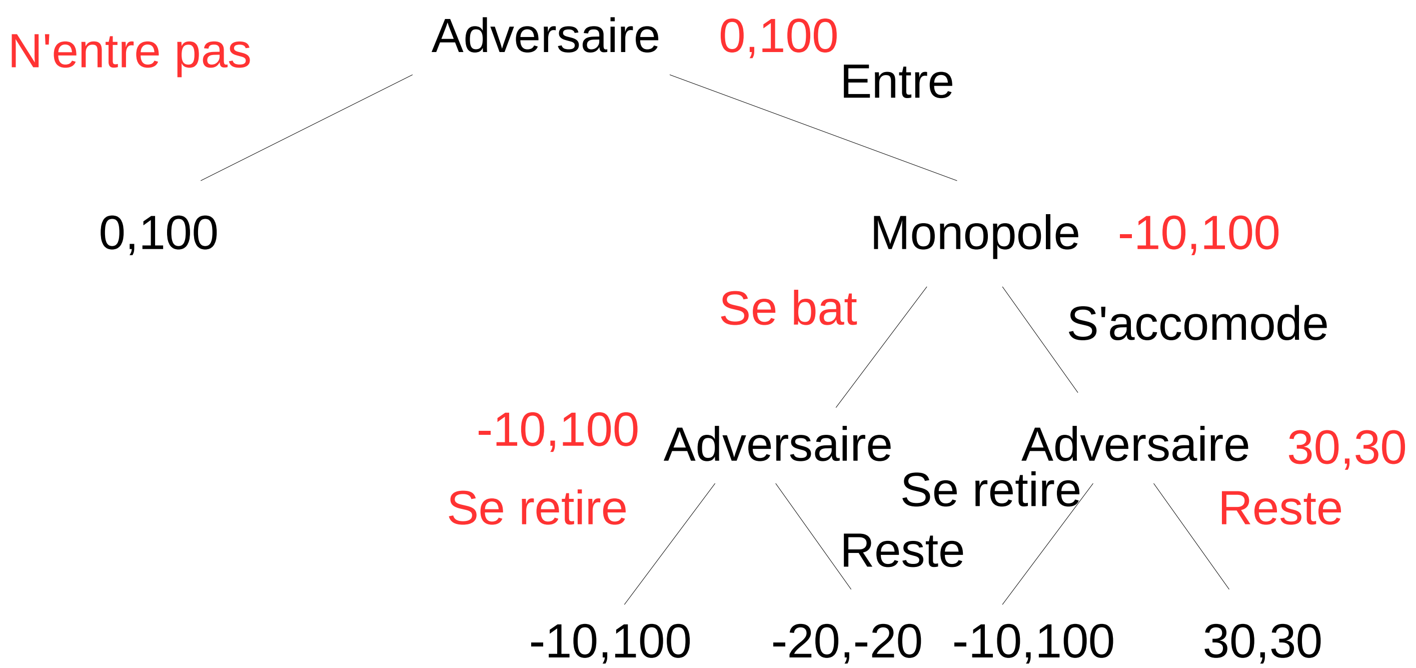
# Jeux Séquentiels



# Jeux Séquentiels



# Jeux Séquentiels



# Jeux séquentiels

- Trois juges décident d'une sanction. Ils commencent par décider si la sanction est faible ou forte puis dans un deuxième temps s'ils appliquent la sanction. Le résultat est choisi à la majorité des votes.
- Le juge 1 préfère forte à pas de sanction à faible.
- Le juge 2 préfère pas de sanction à faible à forte.
- Le juge 3 préfère faible à forte à pas de sanction.
- Que se passe-t-il si les juges votent pour leurs vraies préférences ?
- Que se passe-t-il s'ils votent stratégiquement ?

# Jeux séquentiels

- Si les juges votent pour leurs vraies préférences :
- Période 1 : faible bat fort deux à un
- Période 2 : pas de sanction bat faible deux à un

# Jeux séquentiels

- Si les juges votent stratégiquement :
- Période 2 :
- Deux alternatives possibles :

  forte versus pas de sanction => forte gagne.

  faible versus pas de sanction. => pas de sanction gagne.

# Jeux séquentiels

- Si les juges votent stratégiquement :
- Période 2 :
- Deux alternatives possibles :

  forte versus pas de sanction => forte gagne.

  faible versus pas de sanction. => pas de sanction gagne.
- Voter pour faible = voter pour pas de sanction.
- Choix = forte ou pas de sanction.
- Deux juges préfèrent forte à pas de sanction => forte.

# Jeux à coups simultanés

- Trouver l'équilibre :

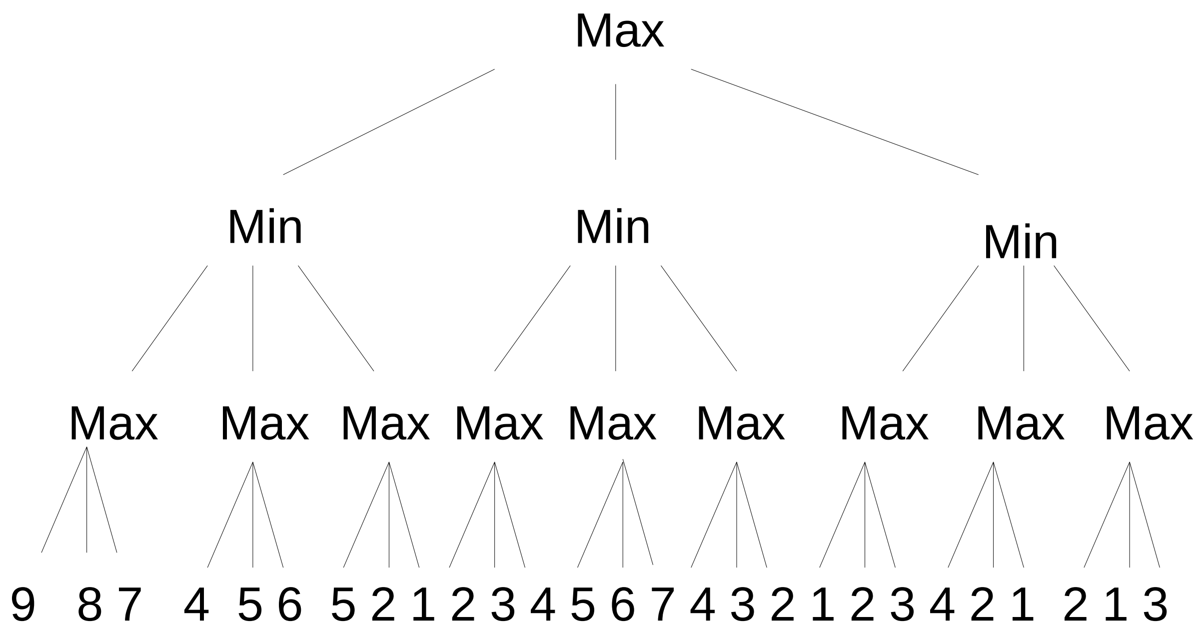
| | X | Y |
|---|---|---|
| A | 3,2 | 4,3 |
| B | 7,3 | 2,2 |

- Equilibre si le joueur 1 joue en premier ?

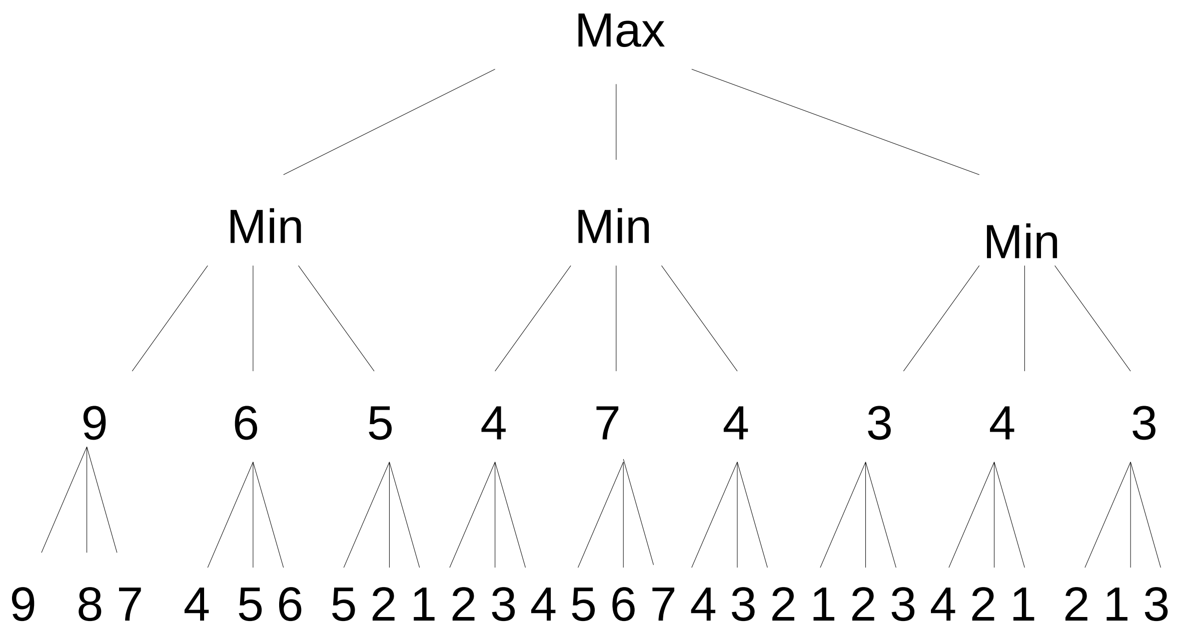
# Jeux séquentiels

- Jeux à somme nulle :
- Le joueur à la racine est en général max.
- Les gains sont ceux de max.
- Il y a une alternance entre min et max.
- On remonte les valeurs à la racine.
- L'algorithme pour résoudre le jeu est le Minimax.

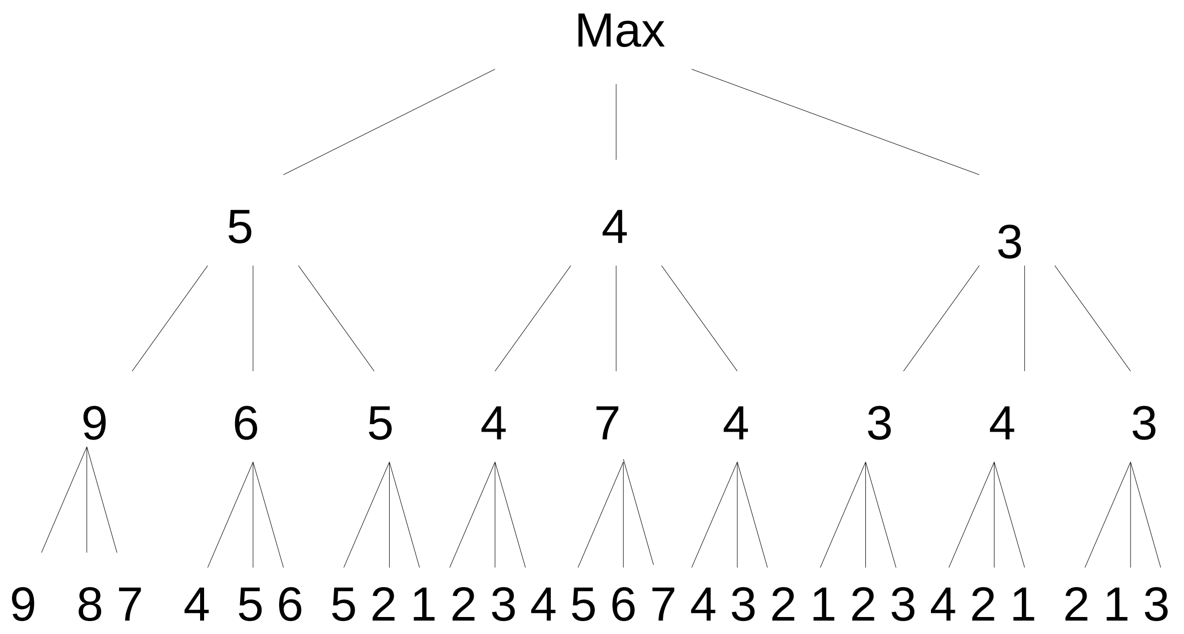
# Jeux Séquentiels



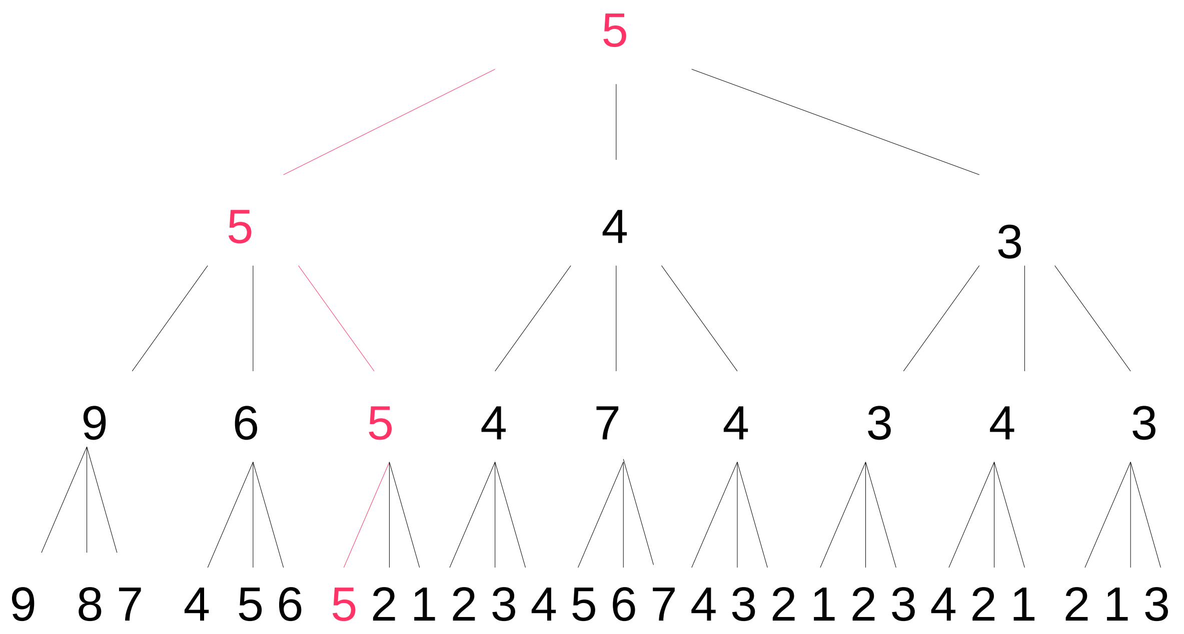
# Jeux Séquentiels



# Jeux Séquentiels

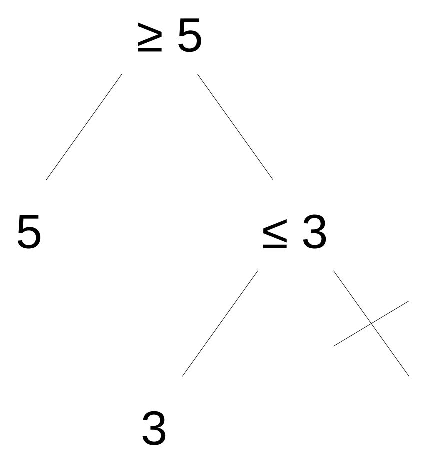


# Jeux Séquentiels



# Jeux séquentiels

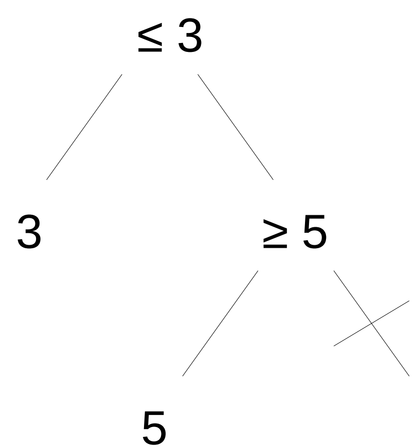
- AlphaBeta :
- On parcourt l'arbre de gauche à droite.
- Coupe aux nœuds Min :



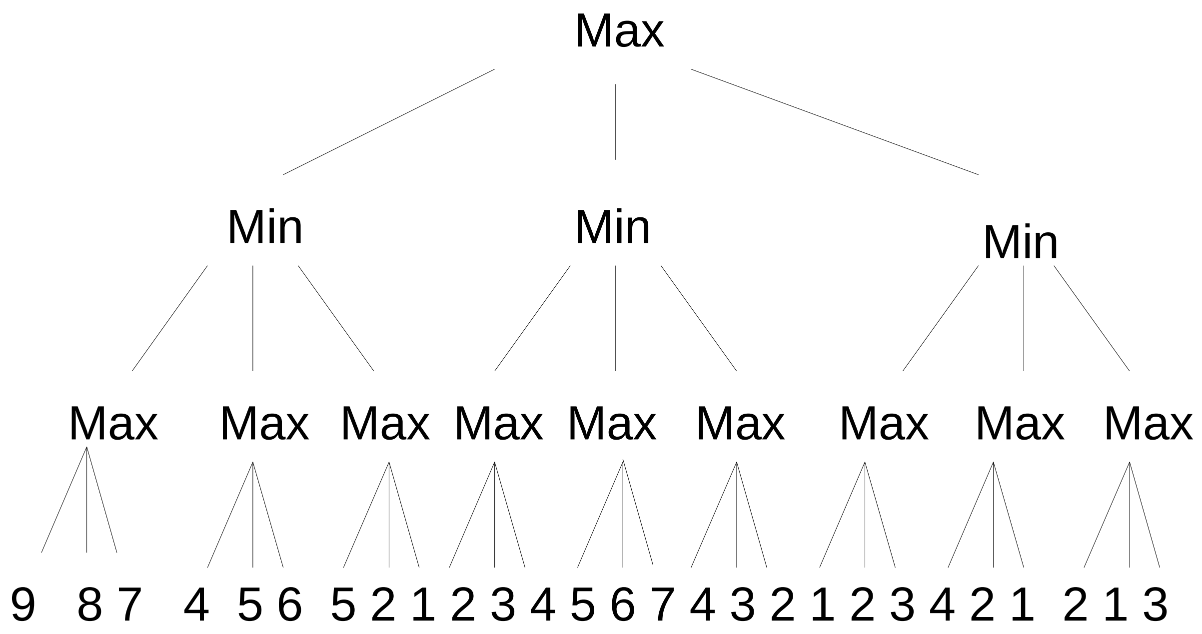

- Trouver un exemple de coupe aux nœuds Max.

# Jeux séquentiels

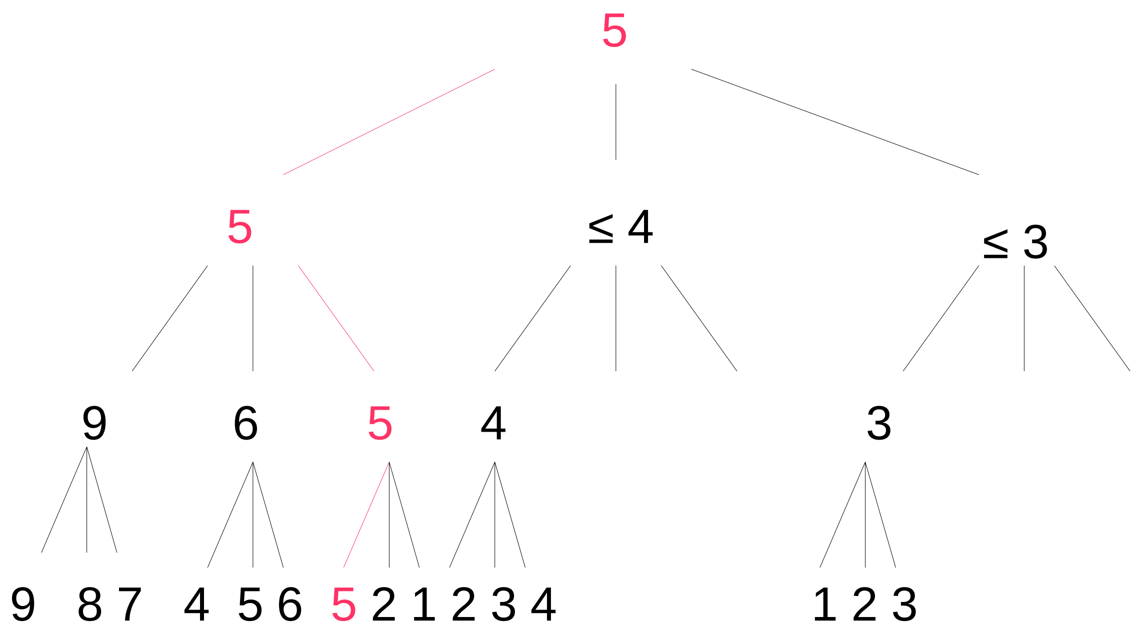
- Coupe aux nœuds Max :



# Jeux Séquentiels



# Jeux Séquentiels



# Jeux séquentiels

- Pour maximiser le nombre de coupes il faut bien ordonner les coups.
- On utilise de nombreuses heuristiques dans les programmes de jeu pour ordonner les coups.
- Heuristique de l'historique.
- Coups qui tuent.
- Grâce à ces heuristiques les programmes d'Echecs et de Dames développent des arbres proches de l'optimal (2 * racine(nombre de noeuds)).

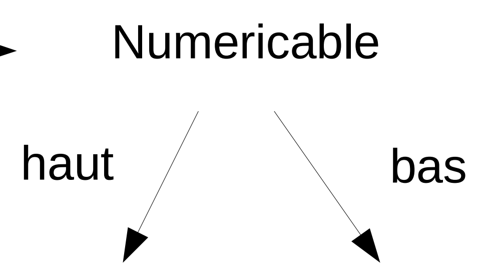
# Combiner Jeux Séquentiels et Simultanés

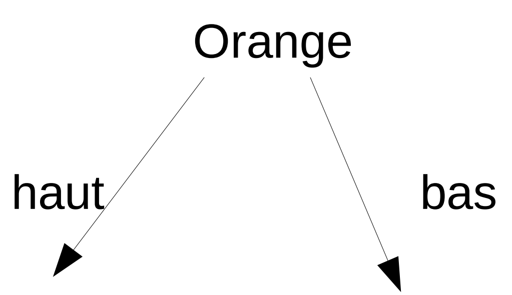
# Séquentiels et simultanés

- Deux joueurs : Orange et Numericable.
- Actions : Chacun peut choisir d'investir 10 milliards dans un réseau de fibres optiques ou non.
- Si un seul investit il peut choisir son prix :
  - Prix haut => 60 millions de clients, 400 par client
  - Prix bas => 80 millions de clients, 200 par client
- Si les deux investissent on a un second jeu simultané :
  - Les deux prix bas => 40 millions de clients, 200 par client
  - Les deux prix haut => 30 millions de clients, 400 par client
  - Prix haut vs prix bas => haut 0, bas 80 millions, 200 par client
- Analyser ce jeu.

# Séquentiels et simultanés

| | N'investit pas | Investit |
|---|---|---|
| N'investit pas | 0,0 | 0, |
| Investit | ,0 | , |



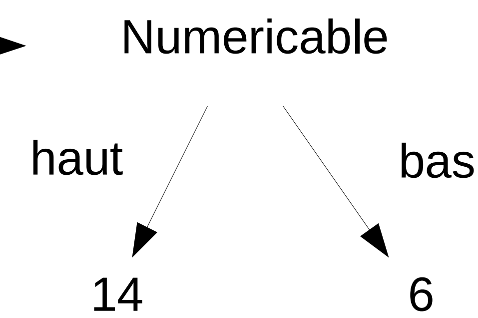

Numericable

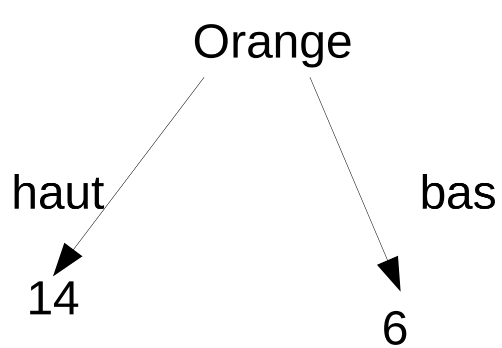
Orange

| | Haut | Bas |
|---|---|---|
| Haut | | |
| Bas | | |

# Séquentiels et simultanés

| | N'investit pas | Investit |
|---|---|---|
| N'investit pas | 0,0 | 0, |
| Investit | ,0 | , |



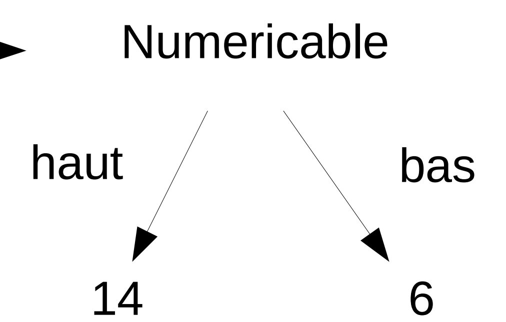

Numericable

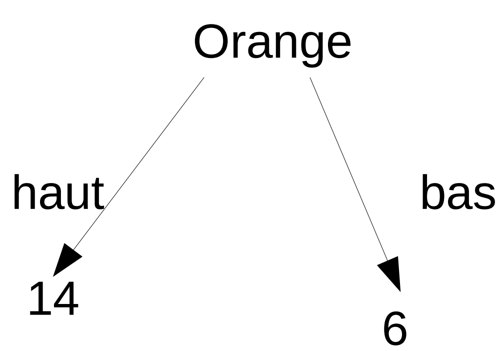
Orange

| | Haut | Bas |
|---|---|---|
| Haut | 2,2 | -10,6 |
| Bas | 6,-10 | -2,-2 |

# Séquentiels et simultanés

| | N'investit pas | Investit |
|---|---|---|
| N'investit pas | 0,0 | 0, |
| Investit | ,0 | , |




Numericable

Orange

| | Haut | Bas |
|---|---|---|
| Haut | 2,2 | -10,6 |
| Bas | 6,-10 | -2,-2 |

# Séquentiels et simultanés

Numericable

| Orange | | N'investit pas | Investit |
|---|---|---|---|
| | N'investit pas | 0,0 | 0,14 |
| | Investit | 14,0 | -2,-2 |

# Séquentiels et simultanés

- Orange vs Numericable :
- Que se passe-t-il si Numericable a déjà investit 10 milliards et qu'Orange le sait ?
- Analyser ce jeu.

# Séquentiels et simultanés

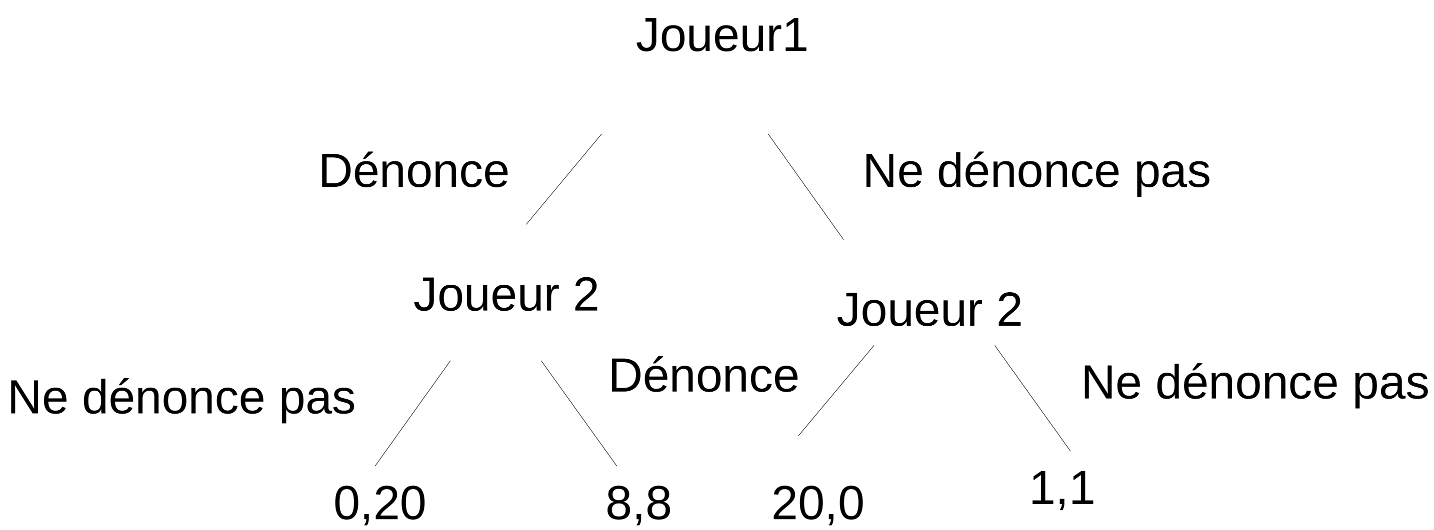
- Dilemme du prisonnier :

| | Dénoncer | Ne pas Dénoncer |
|---|---|---|
| Dénoncer | 8,8 | 0,20 |
| Ne pas dénoncer | 20,0 | 1,1 |

- Que se passe-t-il si un des joueurs joue en premier ?
- Analyser ce jeu.

# Séquentiels et simultanés

- Dilemme du prisonnier :



# Séquentiels et simultanés

- Dilemme du prisonnier :
- Quand les deux joueurs ont des stratégies dominantes changer l'ordre des joueurs ne change pas le résultat.

# Séquentiel et simultanés

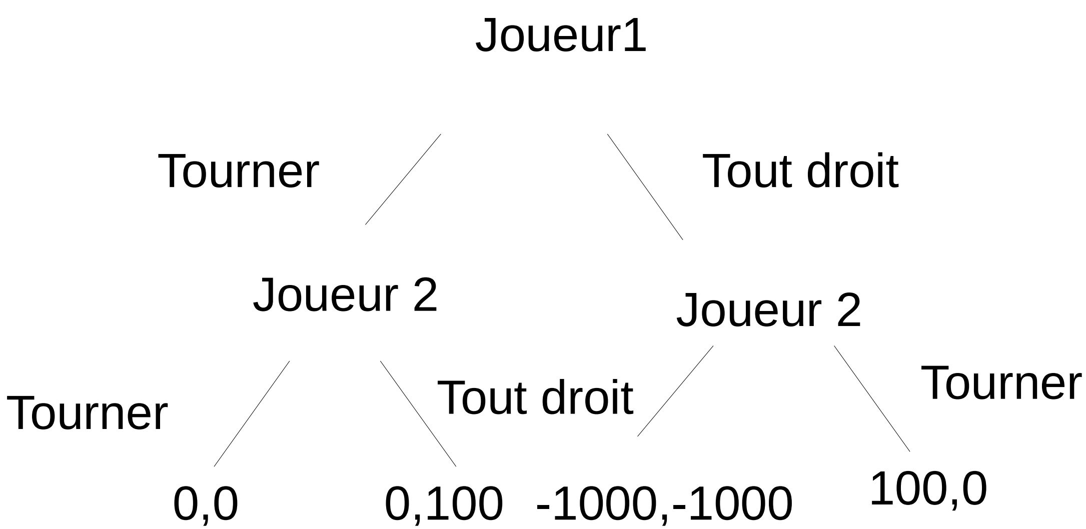
- Chicken :

| | Tourner | Tout droit |
|---|---|---|
| Tourner | 0,0 | 0,100 |
| Tout droit | 100,0 | -1000,-1000 |

- Que se passe-t-il si le joueur 1 joue en premier ?

# Séquentiels et simultanés

- Chicken :



# Séquentiels et simultanés

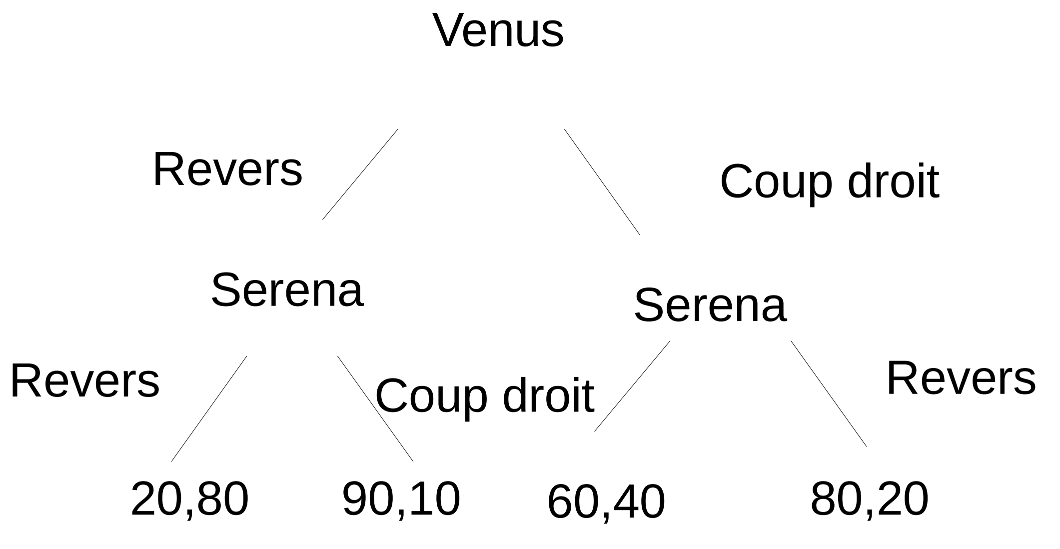
- Venus contre Serena :

Serena

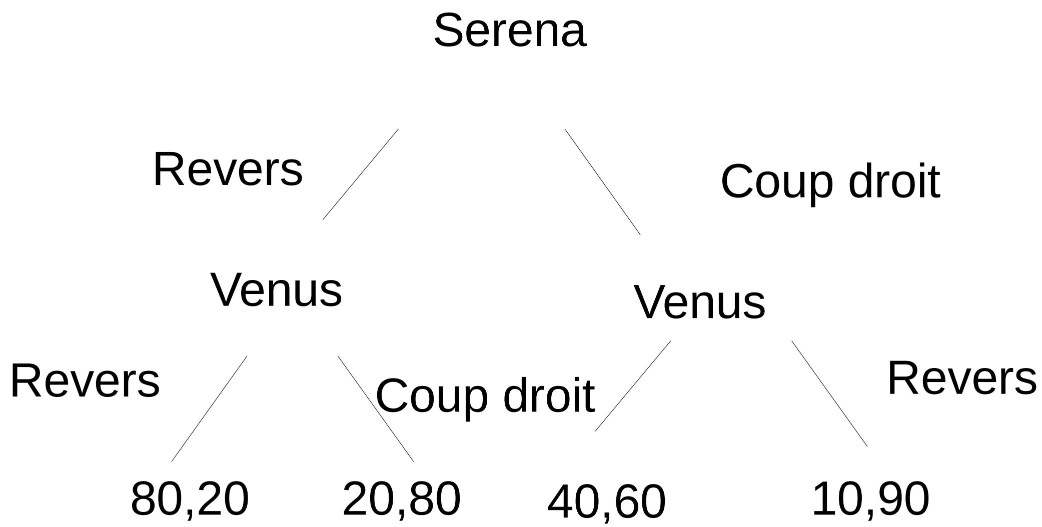
| Venus | Coup Droit | Revers |
|---|---|---|
| Coup Droit | 60 | 80 |
| Revers | 90 | 20 |

- Que se passe-t-il si Venus joue en premier ? Si Serena joue en premier ?

# Séquentiels et simultanés



# Séquentiels et simultanés



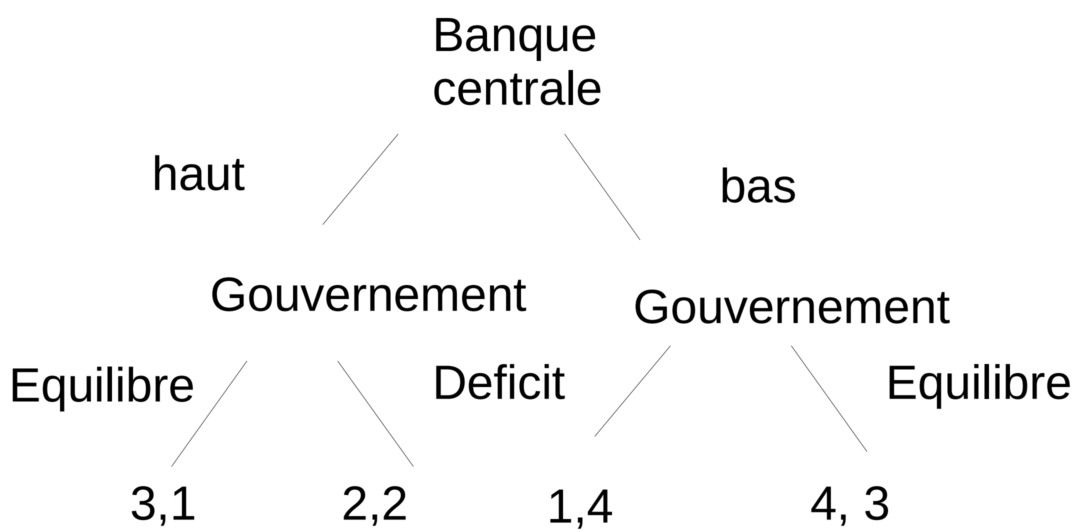
# Séquentiels et simultanés

- Le gouvernement face à la banque centrale :

| | bas | haut |
|---|---|---|
| équilibré | 3,4 | 1,3 |
| déficitaire | 4,1 | 2,2 |

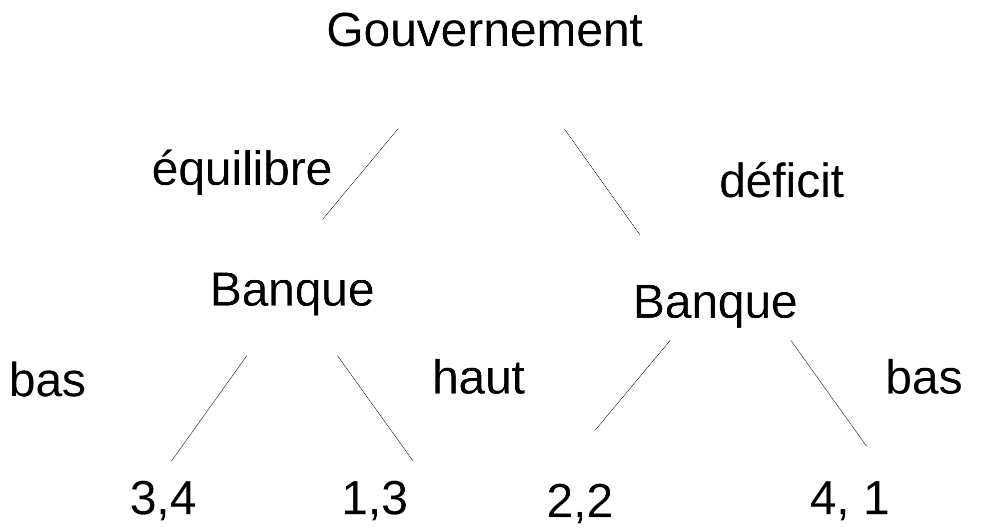
- Que se passe-t-il si la banque centrale joue en premier ? Si le gouvernement joue en premier ?

# Séquentiels et simultanés




Equilibre de Nash = haut, Deficit

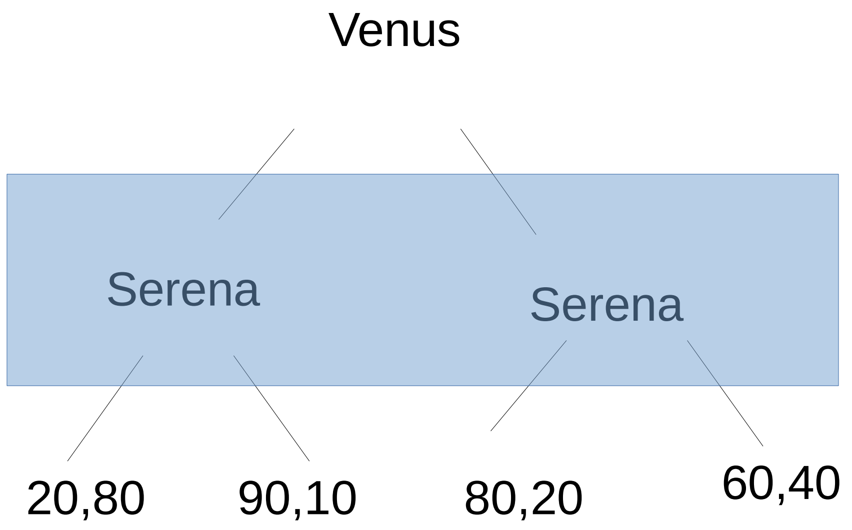
# Séquentiels et simultanés




Equilibre de Nash = équilibre, bas

# Séquentiels et simultanés

- Arbres pour les jeux simultanés:
- On utilise un information set pour représenter que l'un des joueurs ne connaît pas son état :



# Séquentiels et simultanés

- Matrices pour les jeux séquentiels :
- Le jeu de la banque contre le gouvernement.
- Le gouvernement joue en premier et la banque centrale joue en second.
- Le gouvernement a deux stratégies :

  équilibre ou déficit.
- La banque centrale a quatre stratégies :

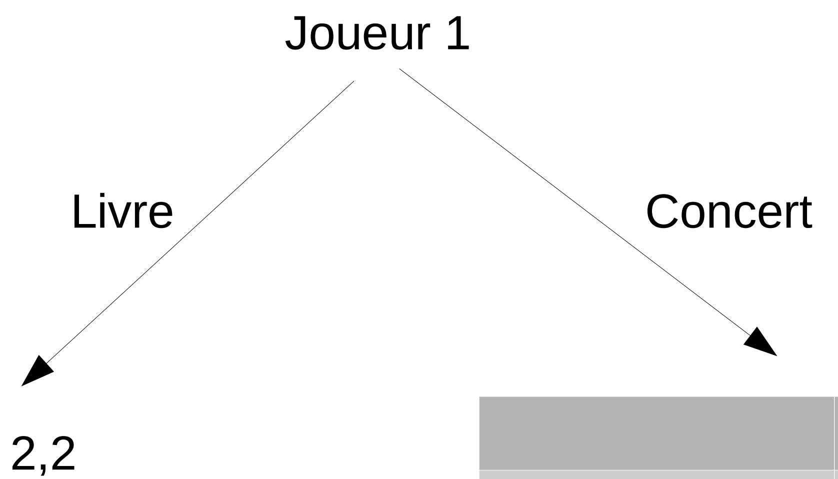
  toujours haut, toujours bas, bas si équilibré haut si déficit, haut si équilibré bas si déficit.

# Séquentiels et simultanés

| | bas si équilibré, haut si déficit | haut si équilibré bas si déficit | toujours bas | toujours haut |
|---|---|---|---|---|
| équilibré | 3,4 | 1,3 | 3,4 | 1,3 |
| déficit | 2,2 | 4,1 | 4,1 | 2,2 |

# Séquentiels et simultanés

- Bach ou Stravinsky avec une option :




| | B | S |
|---|---|---|
| B | 3,1 | 0,0 |
| S | 0,0 | 1, 3 |

- Représenter ce jeu sous forme de matrice et analyser le.

# Séquentiels et simultanés

- Bach ou Stravinsky avec une option :

| | B | S |
|---|---|---|
| Livre | 2,2 | 2,2 |
| B | 3,1 | 0,0 |
| S | 0,0 | 1,3 |

- Analyser ce jeu en éliminant les stratégies dominées.

# Séquentiels et simultanés

- Bach ou Stravinsky avec une option :

| | B | S |
|---|---|---|
| Livre | 2,2 | 2,2 |
| B | 3,1 | 0,0 |
| S | 0,0 | 1,3 |

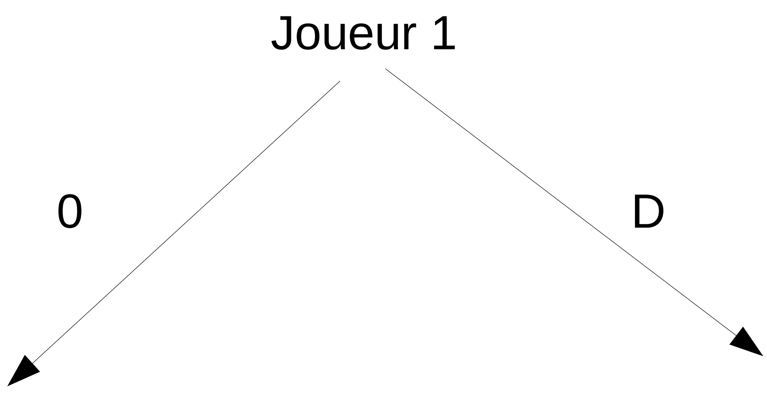
- S dominée par Livre, S joueur 2 dominée par B, Livre dominée par B pour joueur 1 => B,B.

# Séquentiels et simultanés

- Brûler un dollar :
- On considère Bach ou Stravinsky avec le joueur 1 qui a l'option de brûler un dollar avant de jouer au jeu simultané.
- Représenter le jeu comme une combinaison de jeu séquentiel et simultané.
- Représenter le ensuite comme un jeu matriciel et analyser le.

# Séquentiels et simultanés

- Brûler un dollar :




| | B | S |
|---|---|---|
| B | 3,1 | 0,0 |
| S | 0,0 | 1, 3 |

| | B | S |
|---|---|---|
| B | 2,1 | -1,0 |
| S | -1,0 | 0, 3 |

- Représenter ce jeu sous forme de matrice et analyser le.

# Séquentiels et simultanés

- Brûler un dollar :

| | BB | BS | SB | SS |
|---|---|---|---|---|
| 0B | | | | |
| 0S | | | | |
| DB | | | | |
| DS | | | | |

- BS = B si brûle pas, S si brûle
- SB = S si brûle pas, B si brûle
- Remplir la matrice avec les gains.

# Séquentiels et simultanés

- Brûler un dollar :

| | BB | BS | SB | SS |
|---|---|---|---|---|
| 0B | 3,1 | 3,1 | 0,0 | 0,0 |
| 0S | 0,0 | 0,0 | 1,3 | 1,3 |
| DB | 2,1 | -1,0 | 2,1 | -1,0 |
| DS | -1,0 | 0,3 | -1,0 | 0,3 |

- Trouver l'équilibre par élimination successive des stratégies dominées.

# Séquentiels et simultanés

- Brûler un dollar :
- DS ≤ joueur 1 0B
- SS ≤ joueur 2 SB
- BS ≤ joueur 2 BB
- 0S < joueur 1 DB
- SB ≤ joueur 2 BB
- DB < joueur 1 0B
- Equilibre en 0B, BB.

| | BB | BS | SB | SS |
|---|---|---|---|---|
| 0B | 3,1 | 3,1 | 0,0 | 0,0 |
| 0S | 0,0 | 0,0 | 1,3 | 1,3 |
| DB | 2,1 | -1,0 | 2,1 | -1,0 |
| DS | -1,0 | 0,3 | -1,0 | 0,3 |

# Stratégies continues

# Stratégies continues

- Les oligopoles sont des marchés avec peu de joueurs.
- Les actions des uns (prix et quantités) influencent les actions des autres.
- Trois modèles stratégiques :
  - Modèle de Von Stackelberg avec compétition sur les quantités et modèle leader/suiveur.
  - Modèle de Cournot avec quantités simultanées.
  - Modèle de Bertrand avec prix simultanés.

# Stratégies continues

- Deux entreprises et une entreprise dominante.
- Le leader, Evian produit une quantité Qe de bouteilles d'eau.
- Le suiveur, Volvic produit une quantité Qv de bouteilles d'eau.
- Le marché fixe le même prix P pour les deux :
- $P = 10 - (Qe + Qv)$
- Evian fixe sa production avant Volvic.

# Stratégies continues

- Chaque entreprise à des coûts de production identiques de 3 par bouteille.
- Les gains d'Evian sont :
- $Ge = (10 – (Qe + Qv)) * Qe – 3 * Qe$
- Idem pour Volvic :
- $Gv = (10 – (Qe + Qv)) * Qv – 3 * Qv$
- Que va faire Evian et que va répondre Volvic ?

# Stratégies continues

- On utilise l'analyse rétrograde pour résoudre le jeu.
- On commence par résoudre le jeu pour Volvic puis pour Evian.
- Quand Volvic joue il connaît la quantité produite par Evian qui peut être considérée comme une constante.
- Volvic a une fonction de réaction qui donne Qv en fonction de Qe. Calculer la.

# Stratégies continues

- Volvic cherche à maximiser son gain :
- $Gv = (10 – (Qe + Qv)) * Qv – 3 * Qv$
- $Gv = -Qv^2 + (7 - Qe) * Qv$
- La fonction est maximum quand la dérivée s'annule :
- $dGv/dQv = -2 * Qv + 7 – Qe = 0$
- D'où la fonction de réaction :
- $Qv = (7 – Qe) / 2$

# Stratégies continues

- Evian cherche à maximiser son gain :
- $Ge = (10 – (Qe + Qv)) * Qe – 3 * Qe$
- $Ge = (10 – (Qe + (7 – Qe) / 2)) * Qe – 3 * Qe$
- $Ge = -1/2 * Qe^2 + 7/2 * Qe$
- La fonction est maximum quand la dérivée s'annule :
- $dGe/dQe = - Qe + 7/2 = 0$
- D'où les quantités Qe et Qv :
- $Qe = 7/2$ et $Qv = 7/4$
- $Ge = 6{,}125$ et $Gv = 3{,}06$

# Stratégies continues

- Modèle leader / suiveur :
- Avantage au premier joueur.
- Evian gagne 6,125 et Volvic 3,06
- Exemple : innovateur ou monopole face à une menace par une autre entreprise de rentrer sur le marché.

# Stratégies continues

- Que se passe-t-il si Evian est en situation de monopole ?
- Modèle de Cournot sur les quantités :
- Que se passe-t-il si les deux entreprises jouent simultanément ?

# Stratégies continues

- Monopole d'Evian :
- $Qv = 0$
- $Ge = (10 – Qe) * Qe – 3 * Qe = -Qe^2 + 7\ Qe$
- D'où $Qe = 7/2$
- D'où $Pe = 6{,}5$
- Et $Ge = 6{,}5 * 7 / 2 – 3 * 7 / 2 = 12{,}25$
- Evian a intérêt à payer 3,06 à Volvic pour ne pas entrer sur le marché et elle gagnera plus que si Volvic est présent.

# Stratégies continues

- Modèle de Cournot avec quantités simultanées :
- On cherche un équilibre de Nash :
- Des choix de quantités pour les deux joueurs de telle façon qu'aucun des deux joueurs n'aie envie de changer.
- Quelles sont les quantités choisies par les deux joueurs ?

# Stratégies continues

- On utilise la fonction de réaction d'un joueur au choix de quantité de l'autre joueur.
- Si on est à l'équilibre ma réaction à la réaction de l'autre joueur redonne l'équilibre.
- Les fonctions de réaction :
- $Qv = (7 - Qe) / 2$
- $Qe = (7 - Qv) / 2$

# Stratégies continues

- Modèle de Cournot avec quantités simultanées :
- $Qe = (7 – (7 – Qe ) / 2) / 2$
- $Qe = 7 / 2 – 7 / 4 + Qe / 4$
- $3 / 4 * Qe = 7 / 4$
- $Qe = 7 / 3$
- Comme le jeu est symétrique $Qv = 7 / 3$
- $Pe = 5,33$ et $Ge = 5.44$, idem pour Volvic.

# Stratégies continues

- Compétition de Bertrand sur les prix :
- IBM et Apple sont sur le même marché et fixent leurs prix simultanément.
- Le prix d'un IBM est Pi, celui d'un Apple Pa.
- Les quantités vendues sont :
- Qa = 24 - Pa + 1/2 Pi
- Qi = 24 - Pi + 1/2 Pa
- Chaque ordinateur coûte 6 à fabriquer.
- Analyser cette interaction.

# Stratégies continues

- Profit (Apple) = (Pa – 6) * Qa
- Profit = (Pa – 6) * (24 – Pa + 1/2 Pi)
- Profit = 24Pa $-Pa^2$+1/2PiPa-144+6Pa-3Pi
- Profit = -144 - 3 * Pi + (30 + 1/2 Pi) * Pa – $Pa^2$
- Quelle est la fonction de réaction d'Apple ?

# Stratégies continues

- $dProfit / dPa = 30 + 1/2\ Pi - 2 * Pa$
- Le profit est maximum quand la dérivée s'annule.
- $Pa = 15 + 1/4\ Pi$
- Quelle est la meilleure réponse d'IBM ?

# Stratégies continues

- La situation est symétrique donc :
- Pi = 15 + 1/4 Pa
- Quel est l'équilibre ?

# Stratégies continues

- Pi = 15 + 1/4 Pa = 15 + 1/4 (15 + 1/4 Pi)
- 15/16 Pi = 15 + 15/4
- Pi = 16 + 16/4 = 20
- Pi = Pa = 20
- Qa = 24 – Pa + 1/2 Pi = 24 – 20 + 10 = 14
- Production = 14
- Profit = 196

# Stratégies continues

- Deux joueurs se disputent un objet. La valeur de l'objet pour le joueur i est vi > 0. Le temps est une variable continue qui démarre à 0. Chaque joueur choisit s'il concède l'objet à l'autre joueur. Si le premier joueur concède au temps t, l'autre l'obtient à ce temps. Si les deux joueurs concèdent ensemble, chacun reçoit vi/2. Le temps coute de l'argent, chaque joueur perd une unité de gain par unité de temps. Formuler cette interaction comme un jeu et montrer que pour tous les équilibres de Nash un des deux joueurs concède immédiatement.

# Stratégies continues

- L'ensemble des actions du joueur i est
- Ai = [0,+infini[
- La fonction de gain du joueur i est :
- -ti si ti < tj
- vi/2 – ti si ti = tj
- vi – tj si ti > tj

# Stratégies continues

- Si t1 = t2 le joueur 1 peut gagner plus en concédant juste après t1. Ce n'est pas un équilibre.

# Stratégies continues

- Si t1 = t2 le joueur 1 peut gagner plus en concédant juste après t1. Ce n'est pas un équilibre.
- Si 0 < t1 < t2 le joueur 1 peut augmenter son gain en allant vers t1 = 0

# Stratégies continues

- Si $t1 = t2$ le joueur 1 peut gagner plus en concédant juste après t1. Ce n'est pas un équilibre.
- Si $0 < t1 < t2$ le joueur 1 peut augmenter son gain en allant vers $t1 = 0$
- Si $0 = t1 < t2$ le joueur 1 peut augmenter son gain en allant juste après t2 sauf si $v1 – t2 \leq 0$

# Stratégies continues

- Si $t1 = t2$ le joueur 1 peut gagner plus en concédant juste après t1. Ce n'est pas un équilibre.
- Si $0 < t1 < t2$ le joueur 1 peut augmenter son gain en allant vers $t1 = 0$
- Si $0 = t1 < t2$ le joueur 1 peut augmenter son gain en allant juste après t2 sauf si $v1 - t2 \leq 0$
- Donc on a un équilibre de Nash seulement si $0 = t1 < t2$ et $t2 \geq v1$ ou pour la situation symétrique pour le joueur 2.

# Stratégies mixtes

# Stratégies mixtes

- On suppose maintenant que les joueurs ont le droit de faire des choix aléatoires entre leurs actions en utilisant une probabilité pour chaque action.
- John Nash a montré que dans ce cas il y a toujours un équilibre.

# Stratégies mixtes

- Supposons qu'un tireur de penalty et un gardien de but joue un jeu simultané.
- Le tireur a le choix entre tirer à gauche ou à droite.
- Le gardien a le choix entre plonger à gauche ou à droite.
- Quelle est la matrice de gain sachant que c'est un jeu à somme nulle et que le gardien arrête le tir s'il plonge du bon coté.

# Stratégies mixtes

- Le jeu du penalty :

Gardien

| | Gauche | Droite |
|---|---|---|
| Gauche | -1,1 | 1,-1 |
| Droite | 1,-1 | -1,1 |

Tireur

# Stratégies mixtes

- Il n'y a pas d'équilibre en stratégies pures.
- Si on autorise l'aléatoire comment choisir les probabilités ?
- Que feriez vous comme tireur si vous saviez que le gardien plonge à droite 60 % des fois ?

# Stratégies mixtes

- Supposons que la gardien plonge à gauche avec une probabilité p.
- Quelle est la meilleur réponse du tireur ?
- Pour cela on calcule le gain moyen du tireur pour ses deux actions en fonction de p.

# Stratégies mixtes

- Les gains moyens du tireur sont :
- Gauche : $-1 * p + 1 * (1 - p) = 1 - 2 * p$
- Droite : $1 * p - 1 * (1 - p) = 2 * p - 1$
- Le tireur préfère Gauche si $p < 1/2$
- Le tireur préfère Droite si $p > 1/2$
- Le tireur est indifférent si $p = 1/2$
- Quelle est la meilleure valeur de p pour le gardien ?

# Stratégies mixtes

- Si l'adversaire sait ce que je vais faire, je perds.
- Faire des choix aléatoires empêche d'être prévisible.
- On rend l'adversaire indifférent entre ses actions.

# Stratégies mixtes

- On choisit les probabilités pour ses stratégies de façon à rendre l'adversaire indifférent.
- L'adversaire a les mêmes gains pour toutes ses stratégies.

# Stratégies mixtes

- Le jeu du repos :
- Les employés peuvent travailler dur ou se reposer :

  Le salaire est de 100 sauf s'ils sont pris à se reposer.

  Le coût de l'effort est de 50.
- Les patrons peuvent surveiller ou pas :

  La valeur du travail d'un employé est de 200

  Le profit si un employé se repose est de 0

  Le coût de la surveillance est de 10
- Ecrire la matrice de gain et calculer les stratégies mixtes.

# Stratégies mixtes

- Le jeu du repos :

Patron

Employé

| | Surveiller | Ne pas surveiller |
|---|---|---|
| Travailler | 50,90 | 50,100 |
| Se reposer | 0,-10 | 100,-100 |

- Pas d'équilibre en stratégies pures.

# Stratégies mixtes

- L'employé choisit de travailler avec la probabilité p et de se reposer avec la probabilité 1-p.
- Le patron choisit de surveiller avec la probabilité q et de ne pas surveiller avec la probabilité 1-q.
- Quelle est la probabilité optimale pour le patron ?
- Principe : rendre l’employé indifférent entre ses actions.

# Stratégies mixtes

- Le patron choisit surveiller avec la probabilité q et ne pas surveiller avec la probabilité 1-q.

  Profit(travailler) = 50*q + 50*(1-q)

  Profit(se reposer) = 0*q + 100*(1-q)

  Profit(travailler) = Profit (se reposer)

  50 = 100 – 100 * q

  q = 1/2

# Stratégies mixtes

- L'employé choisit de travailler avec la probabilité p et de se reposer avec la probabilité 1-p.
- Quelle est la probabilité optimale pour l’employé ?
- Principe : rendre le patron indifférent entre ses actions.

# Stratégies mixtes

- Profit (surveiller) = 90 * p – 10 * (1-p)
- Profit (ne pas surveiller) = 100 * p – 100 * (1-p)
- Profit (surveiller) = Profit (ne pas surveiller)
- 100 * p - 10 = 200 * p - 100
- p = 9/10

# Stratégies mixtes

- Venus contre Serena :

Serena

| Venus | Coup Droit | Revers |
|---|---|---|
| Coup Droit | 60 | 80 |
| Revers | 90 | 20 |

- Calculer la probabilité q que Serena choisisse Coup Droit, puis la probabilité p que Venus choisisse Coup Droit.

# Stratégies mixtes

- Serena choisit Coup Droit avec la probabilité q.
- Gains de Venus :

Gain (CoupDroit) = 60 * q + 80 * (1-q)

Gain (Revers) = 90 * q + 20 * (1 – q)

Gain (Coup Droit) = Gain (Revers)

-20 * q + 80 = 70 * q + 20

90 * q = 60

q = 2/3

# Stratégies mixtes

- Venus choisit Coup Droit avec la probabilité p.
- Gains de Serena:

  Gain (CoupDroit) = -60 * p - 90 * (1 - p)

  Gain (Revers) = -80 * p - 20 * (1 – p)

  Gain (Coup Droit) = Gain (Revers)

  30 * p - 90 = -60 * p - 20

  90 * p = 70

  p = 7/9

# Stratégies mixtes

- Le jeu du faucon et de la colombe :

Joueur 2

| Joueur 1 | | Colombe | Faucon |
|---|---|---|---|
| | Colombe | 1/2,1/2 | 0,1 |
| | Faucon | 1,0 | (1-c)/2,(1-c)/2 |

- Calculer les équilibres.

# Stratégies mixtes

- Si $c < 1$, l'équilibre en stratégies pures est Faucon,Faucon.
- Si $c > 1$ :

  $q/2 = q + (1-c)/2 * (1-q)$

  $q/2+1/2-q/2-c/2+c*q/2 = 0$

  $c*q/2 = (c-1)/2$

  $q=(c-1)/c$

# Stratégies mixtes

| | Pierre | Feuille | Ciseaux |
|---|---|---|---|
| Pierre | 0,0 | -1,1 | 1,-1 |
| Feuille | 1,-1 | 0,0 | -1,1 |
| Ciseaux | -1,1 | 1,-1 | 0,0 |

- Calculer les probabilités p, q et r des actions à Pierre Feuille Ciseaux.

# Stratégies mixtes

- $p+q+r = 1$
- $-q+r = p-r = -p+q$

# Stratégies mixtes

- $p+q+r = 1$
- $-q+r = p-r = -p+q$

  (1) (2) (3)
- $(1)+(2)+(3) = 0 = 3 * (-q+r) = 3 * (-p+q)$
- d'où $p=q=r$ et comme $p+q+r = 1$
- $p = q = r = 1/3$

# Stratégies mixtes

- L'armée A a un seul avion qui peut attaquer une cible parmi trois.
- L'armée B a une batterie anti-aérienne qui peut être affectée à une seule des cibles.
- Valeurs des cibles : $v1 > v2 > v3 > 0$
- Ecrire la matrice de gain.
- Calculer l'équilibre en stratégies mixtes.

# Stratégies mixtes

| | p | q | r |
|---|---|---|---|
| p1 | 0 | v1 | v1 |
| q1 | v2 | 0 | v2 |
| r1 | v3 | v3 | 0 |

- Calculer les probabilités p1 et q1 si seules les cibles 1 et 2 sont attaquées.

# Stratégies mixtes

- Si seules les cibles 1 et 2 sont attaquées.

  p1 + q1 = 1

  p1 * v1 = q1 * v2

  p1 + p1 * v1 / v2 = 1

  p1 * (v1 + v2) / v2 = 1

  p1 = v2 / (v1 + v2)

  p1= v2 / (v1 + v2), q1 = v1 / (v1 + v2)
- Calculer ensuite p et q.

# Stratégies mixtes

- Si seules les cibles 1 et 2 sont attaquées.

  $p + q = 1$

  $p * v2 = q * v1$

  $p + p * v2 / v1 = 1$

  $p * (v1 + v2) / v1 = 1$

  $p = v1 / (v1 + v2)$

  $p = v1 / (v1 + v2)$, $q = v2 / (v1 + v2)$
- Le gain moyen est de $(v1 * v2) / (v1 + v2)$
- C'est donc un équilibre si $v3 < (v1 * v2) / (v1 + v2)$
- Calculer maintenant l’équilibre pour 3 cibles.

# Stratégies mixtes

- Si les 3 cibles sont attaquées.

  $p1=k*v2*v3$, $q1=k*v1*v3$, $r1=k*v1*v2$

  $p=k*(z-2*v2*v3)$

  $q=k*(z-2*v3*v1)$

  $r=k*(z-2*v1*v2)$

  $z=v1*v2+v2*v3+v3*v1$
- Remplacer les probabilités dans les équations et vérifier les égalités.

# Jeux répétés

# Jeux répétés

- Pour résoudre les jeux simultanés joués une seule fois on se met à la place de l'autre joueur et on cherche un équilibre.
- Pour résoudre les jeux séquentiels on utilise l'analyse rétrograde en commençant par le bas de l'arbre et en remontant.
- Que se passe-t-il si l'interaction est répétée ?
- Comment cela peut il amener à la coopération ?

# Jeux répétés

- Le dilemme du prisonnier :

| | Trahir | Coopérer |
|---|---|---|
| Trahir | 54,54 | 72,47 |
| Coopérer | 47,72 | 60,60 |

Coopération : 60

Equilibre : 54

# Jeux répétés

- La rationalité individuelle entraîne une irrationalité collective.
- La stratégie dominante de tous les joueurs donne de moins bons résultats que la stratégie dominée.
- Comment arriver à une coopération qui rendrait inattractive la possibilité de trahir ?

# Jeux répétés

- Si on suppose que l'interaction a lieu un nombre fini T de fois.
- La trahison est dominante pour la dernière fois.
- L'analyse rétrograde remonte la trahison jusqu'à la première interaction.
- La coopération est impossible si l'interaction a lieu un nombre fixé et connu de fois.

# Jeux répétés

- La coopération est possible si le nombre d'interactions est :
- Inconnu
- Incertain
- Trop long
- Pas de dernière interaction => pas d'analyse rétrograde.

# Jeux répétés

- Stratégies Trigger :
- Commencer par coopérer.
- Coopérer tant que l'adversaire coopére.
- Après une trahison, trahir un nombre fixé de fois.

# Jeux répétés

- Stratégie Grim Trigger :
- Commencer par coopérer.
- Coopérer tant que l'adversaire coopére.
- Après une trahison, toujour trahir.

# Jeux répétés

- Stratégie Tit for Tat :
- Commencer par coopérer.
- Coopérer si l'adversaire a coopéré le coup précédent.
- Trahir si l'adversaire a trahi le coup précédent.

# Jeux répétés

- Grim Trigger :
- Ne pardonne pas.
- A une mémoire longue
- Punit mais manque de crédibilité.
- Répond à la question : La coopération est elle possible ?

# Jeux répétés

- Tit for Tat :
- Pardonne le plus.
- A une mémoire courte.
- Est crédible mais ne punit pas assez.
- Répond à la question : La coopération est elle facile ?

# Jeux répétés

- Pourquoi coopérer contre Grim Trigger ?

| | Trahir | Coopérer |
|---|---|---|
| Trahir | 54,54 | 72,47 |
| Coopérer | 47,72 | 60,60 |

Coopération : 60 puis 60 puis 60 puis 60...

Trahison : 72 puis 54 puis 54 puis 54...

# Jeux répétés

- 1 euro demain vaut moins qu'un euro aujourd'hui.
- Soit r le taux d'intérêt.
- Investir 1 cette année donnera 1+r l'année prochaine.
- 1 l'année prochaine vaut 1/(1+r) cette année.
- Quels sont les gains cumulés de coopérer et trahir contre Grim Trigger en prenant en compte le taux d'intérêt r ?

# Jeux répétés

- Montrez que :

$$1+\frac{1}{(1+r)}+\frac{1}{(1+r)^2}+\frac{1}{(1+r)^3}+\frac{1}{(1+r)^4}+\ldots=1+\frac{1}{r}$$

# Jeux répétés

Define $x = \frac{1}{1+r}$

$$\begin{aligned} z &= 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \ldots \\ xz &= x + x^2 + x^3 + x^4 + \ldots \\ z - xz &= 1 \end{aligned}$$

$$z = \frac{1}{1-x} = \frac{1}{1-\frac{1}{(1+r)}} = \frac{1+r}{r} = 1 + \frac{1}{r}$$

$$1 + \frac{1}{(1+r)} + \frac{1}{(1+r)^2} + \frac{1}{(1+r)^3} + \frac{1}{(1+r)^4} + \ldots = 1 + \frac{1}{r}$$

# Jeux répétés

- Gain (coopérer) = $60 + 60/(1+r) + 60/(1+r)^2 + \dots$
- Gain (coopérer) = $60 + 60/r$
- Quel est le gain de trahir ?
- A partir de quel taux d'intérêt la coopération devient elle intéressante ?

# Jeux répétés

- Gain (trahir) = $72 + 54/(1+r) + 54/(1+r)^2 + \ldots$
- Gain (trahir) = $72 + 54/r$
- La coopération est intéressante si :

  Gain (coopérer) > Gain (trahir)

$$60 + 60/r > 72 + 54/r$$

$$6/r > 12$$

$$r < 1/2$$

- On a intérêt à coopérer avec Grim Trigger si $r < 50\ \%$.

# Jeux répétés

- Calculer les gains de coopérer et trahir contre Tit for Tat.
- A partir de quel taux d'intérêt a-t-on intérêt à coopérer ?

# Jeux répétés

- Gain (coopérer) = $60 + 60/(1+r) + 60/(1+r)^2 + \dots$
- Gain (trahir) = $72 + 47/(1+r) + 60/(1+r)^2 + \dots$
- A partir de quel taux d'intérêt coopère-t-on ?

# Jeux répétés

$$\text{Gain (coopérer)} > \text{Gain (trahir)}$$

$$60+60/(1+r)+60/(1+r)^2+\ldots > 72+47/(1+r)+60/(1+r)^2+\ldots$$

$$60+60/(1+r) > 72+47/(1+r)$$

$$13/(1+r) > 12$$

$$1+r < 13/12$$

$$r < 1/12$$

- La coopération est intéressante si $r < 8.3$ %
- Elle est plus dure à atteindre qu'avec Grim Trigger.

# Jeux répétés

- Les tournois de Robert Axelrod.
- Axelrod a organisé des tournois entre stratégies.
- Les stratégies étaient soumises par différents chercheurs et jouaient 200 parties contre d'autres stratégies.
- La stratégie gagnante fut Tit for Tat.

# Jeux répétés

- D'autres tournois de programmes de jeux ont été organisés.
- Un tournoi célèbre est celui qu'a organisé Darse Billings de l'université d'Alberta à Pierre Feuille Ciseaux répété (aka Roshambo).
- Après une soumission d'un programme jouant avec une probabilité 1/3 chaque action, il a interdit les programmes jouant l'équilibre de Nash.

# Jeux répétés

- Le programme gagnant fut Icoaine Powder.
- Dans le film Princess Bride la poudre d'Icoaine est un poison et le méchant doit choisir entre deux verres susceptibles de contenir la poudre.
- Le principe des meilleurs programmes étaient de modéliser leurs adversaires en détectant des répétitions de séquences d'actions.

# Jeux répétés

- Icoaine Powder est un programme qui a un niveau de base, un méta niveau est un méta méta niveau.
- Au niveau de base il essaie de modéliser l'adversaire en le comparant à un répertoire de stratégies connues.

# Jeux répétés

- S'il n'y arrive pas bien il passe au niveau méta où il essaie de voir si l'adversaire n'essaie pas aussi de modéliser ses séquences et joue alors la contre stratégie.
- S'il n'y arrive toujours pas il passe au niveau méta méta où il essaie de détecter si l'adversaire n'a pas lui-même un niveau méta.

# Jeux répétés

- Iran contre Irak en 1990.
- L'Iran et l'Irak produisent et vendent du pétrole :
- Bas = 2 millions de barils par jour.
- Haut = 4 millions de barils par jour.
- Bas,Bas : 4 millions de barils => 25$ par baril.
- Haut,Haut : 8 millions de barils => 10$ par baril.
- Haut,Bas : 6 millions de barils => 15$ par baril.
- Les coûts d'extraction de l'Iran sont de 2$ par baril, ceux de l'Irak sont de 4$ par baril.
- Analyser cette interaction, que se passe-t-il si elle est répétée ?

# Jeux répétés

- Iran contre Irak en 1990 :

Irak

| Iran | Trahir | Coopérer |
|---|---|---|
| Trahir | 32,24 | 52,22 |
| Coopérer | 26,44 | 46,42 |

Quels taux d'intérêts amènent à la coopération pour Grim Trigger et Tit for Tat pour ce jeu ?

# Jeux répétés

- Iran contre Grim Trigger :
- Gain (trahir) = $52 + 32/(1+r) + 32/(1+r)^2 + \ldots$
- Gain (trahir) = $52 + 32/r$
- Gain (coopérer) = $46 + 46/r$
- La coopération est intéressante si :

  $46 + 46/r > 52 + 32/r$

  $14/r > 6$

  $r < 7/3$
- L'Iran a intérêt à coopérer contre Grim Trigger si $r < 233\ \%$.

# Jeux répétés

- Irak contre Grim Trigger :
- Gain (trahir) = $44 + 24/(1+r) + 24/(1+r)^2 + \ldots$
- Gain (trahir) = $44 + 24/r$
- Gain (coopérer) = $42 + 42/r$
- La coopération est intéressante si :

$$42 + 42/r > 44 + 24/r$$

$$18/r > 2$$

$$r < 9$$

- L'Irak a intérêt à coopérer contre Grim Trigger si $r < 900$ %.

# Jeux répétés

- Iran contre Tit for Tat :
- Gain (trahir) = $52 + 26/(1+r) + 46/(1+r)^2 + \ldots$
- Gain (coopérer) = $46 + 46/(1+r) + 46/(1+r)^2 + \ldots$
- La coopération est intéressante si :

$$46 + 46/(1+r) > 52 + 26/(1+r)$$

$$20/(1+r) > 6$$

$$r < 7/3$$

- L'Iran a intérêt à coopérer contre Tit for Tat si $r < 233$ %.

# Jeux répétés

- Irak contre Tit for Tat :
- Gain (trahir) = $44 + 22/(1+r) + 42/(1+r)^2 + \ldots$
- Gain (coopérer) = $42 + 42/(1+r) + 42/(1+r)^2 + \ldots$
- La coopération est intéressante si :

  $42 + 42/(1+r) > 44 + 22/(1+r)$

  $20/(1+r) > 2$

  $r < 9$
- L'Irak a intérêt à coopérer contre Tit for Tat si $r < 900$ %.

# Jeux répétés

- Exercice :

| | Trahir | Coopérer |
|---|---|---|
| Trahir | 10,10 | 40,0 |
| Coopérer | 0,40 | 20,20 |

Quels taux d'intérêts amènent à la coopération pour Grim Trigger et Tit for Tat pour ce jeu ?

# Jeux répétés

- Contre Grim Trigger :
- Gain (trahir) = 40 + 10/(1+r) + 10/(1+r)²+…
- Gain (trahir) = 40 + 10/r
- Gain (coopérer) = 20 + 20/r
- La coopération est intéressante si :

  $20 + 20/r > 40 + 10/r$

  $10/r > 20$

  $r < 1/2$
- On a intérêt à coopérer contre Grim Trigger si r < 50 %.

# Jeux répétés

- Contre Tit for Tat :
- Gain (trahir) = $40 + 0/(1+r) + 20/(1+r)^2 + \ldots$
- Gain (coopérer) = $20 + 20/(1+r) + 20/(1+r)^2 + \ldots$
- La coopération est intéressante si :

  $20 + 20/(1+r) > 40$

  $20/(1+r) > 20$

  $r < 0$
- On a intérêt à coopérer contre Tit for Tat si $r < 0$ %.

# Enchères

# Enchères

- Le jeu de l’héritage :
- Elizabeth une mère âgée veut donner ses bijoux à sa fille qui les valorise le plus.
- Elle fait une enchère au second prix :
- Chaque fille donne un prix simultanément.
- La gagnante est celle qui a le prix le plus élevé. La gagnante paie le second meilleur prix.
- Montrer pourquoi chaque fille a intérêt à être honnête quand elle annonce son prix.

# Enchères

Pour une fille, il y a trois stratégies possibles :

- Exagération = donner un prix plus haut que sa valeur
- Honnêteté
- Sous évaluation = donner un prix plus bas que sa valeur

# Enchères

1. Exagération

Si le second prix est supérieur à la valeur elle va payer les bijoux plus chers que leur valeur ==> pas d’intérêt à exagérer.

2. Sous évaluation

Si le meilleur prix est en dessous de la valeur, elle n’a pas les bijoux alors qu’elle aurait pu les avoir ==> pas d’intérêt

3. Honnêteté

Elle obtient les bijoux à un prix inférieur à leur valeur.

# Exercices

# Stratégies Continues

- Le leader produit une quantité Ql.
- Le suiveur produit une quantité Qs.
- Le marché fixe le même prix P pour les deux :
- $P = 20 – (2 * Ql + Qs)$
- Un produit coute 5 à produire.
- Le leader fixe sa production le premier.
- Calculer l'équilibre.

# Stratégies continues

- Le suiveur cherche à maximiser son gain :
- $Gs = (20 – (2 * Ql + Qs)) * Qs – 5 * Qs$
- $Gs = -Qs^2 + (15 – 2 * Ql) * Qs$
- La fonction est maximum quand la dérivée s'annule :
- $dGs/dQs = -2 * Qs + 15 – 2 * Ql = 0$
- D'où la fonction de réaction :
- $Qs = (15 – 2 * Ql) / 2$

# Stratégies continues

- Le leader cherche à maximiser son gain :
- $Gl = (20 – (2 * Ql + Qs)) * Ql – 5 * Ql$
- $Gl = (20 – (2 * Ql + (15 – 2 * Ql) / 2)) * Ql – 5 * Ql$
- $Gl = (25/2 – Ql) * Ql – 5 * Ql = -Ql^2 + 15/2 * Ql$
- La fonction est maximum quand la dérivée s'annule :
- $dGl/dQl = - 2 * Ql + 15/2 = 0$
- D'où les quantités Ql et Qs :
- $Ql = 15/4$ et $Qs = (15 – 2 * 15/4) / 2 = 15/4$

# Stratégies Continues

- Compétition de Bertrand sur les prix :
- A et B fixent leurs prix Pa et Pb simultanément.
- Les quantités vendues sont :
- $Qa = 18 - Pa + 1/3\ Pb$
- $Qb = 18 - Pb + 1/3\ Pa$
- Chaque produit coûte 4 à fabriquer.
- Analyser cette interaction.

# Stratégies continues

- Profit (A) = $(Pa – 4) * Qa$
- Profit = $(Pa – 4) * (18 – Pa + 1/3\ Pb)$
- Profit = $18\ Pa - Pa^2 + PbPa/3 - 72 + 4\ Pa - 4\ Pb/3$
- Profit = $-72 – 4\ Pb/3 + (22 + 1/3\ Pb) * Pa – Pa^2$
- Quelle est la fonction de réaction de A?

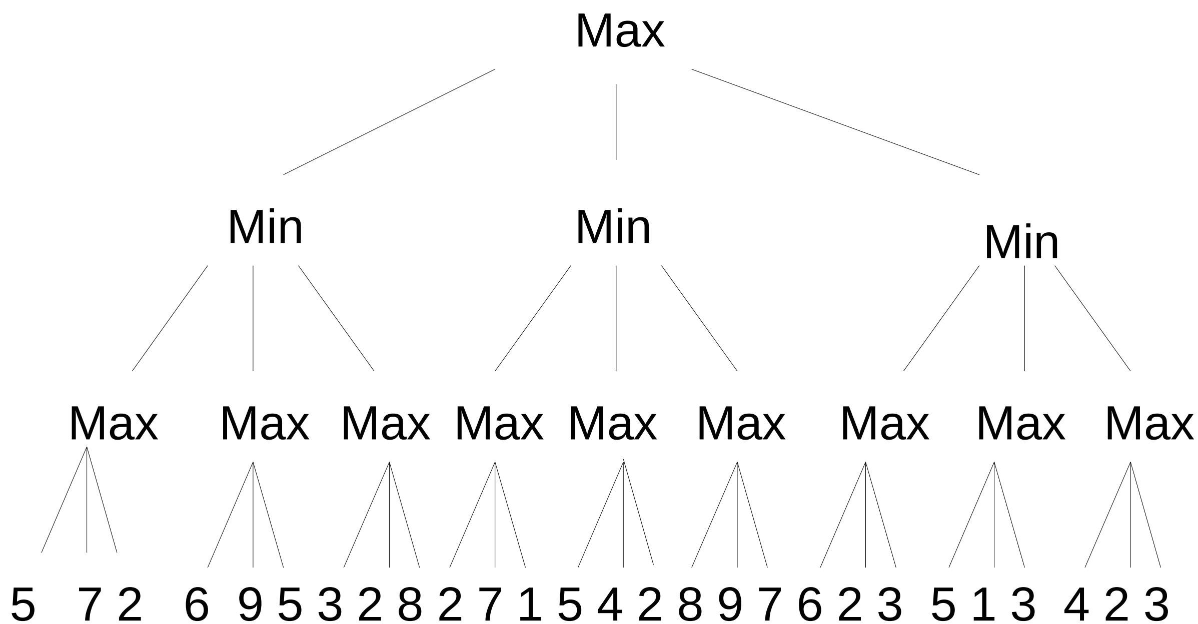
# Stratégies continues

- dProfit / dPa = 22 + 1/3 Pb – 2 * Pa
- Le profit est maximum quand la dérivée s'annule.
- Pa = 11 + 1/6 Pb
- La situation est symétrique donc :
- Pb = 11 + 1/6 Pa

# Stratégies continues

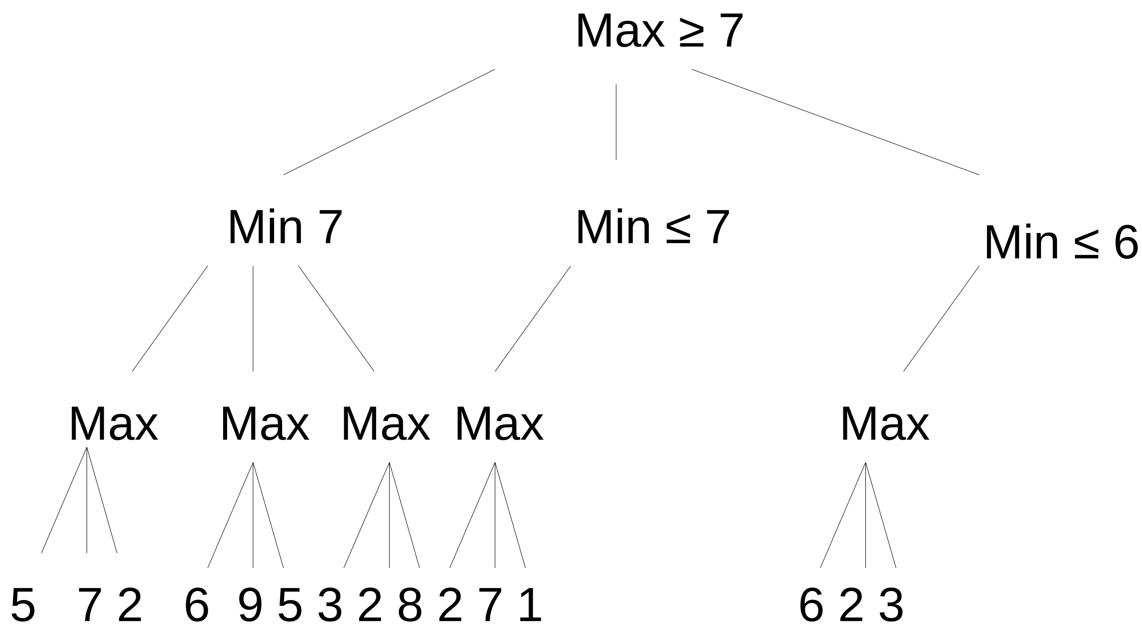
- Pb = 11 + 1/6 Pa = 11 + 1/6 (11 + 1/6 Pb)
- 35/36 Pb = 11 + 11/6
- Pb = 396/35 + 66/35 = 462/35
- Pb = Pa = 462/35

# Jeux Séquentiels




- Effectuer les coupes Alpha Beta sur cet arbre.

# Jeux Séquentiels




- Coupes Alpha Beta.

# Stratégies mixtes

| | A2 | B2 | C2 |
|---|---|---|---|
| A1 | 1,1 | -2,2 | 2,-2 |
| B1 | 1,1 | 2,-2 | -2,2 |
| C1 | 0,0 | 1,1 | 1,1 |

- Calculer l'équilibre en stratégies mixtes.

# Stratégies mixtes

- $p+q+r = 1$
- $p - 2q + 2r = p + 2q - 2r = q + r$

$$\underset{(1)}{p - 2q + 2r} = \underset{(2)}{p + 2q - 2r} = \underset{(3)}{q + r}$$

# Stratégies mixtes

- $p+q+r = 1$
- $p - 2q + 2r = p + 2q - 2r = q + r$

  (1) (2) (3)
- (1)+(2) = 2 (3) => $2p = 2q + 2r$ => $p = q + r$
- $2p = 1$ => $p = 1/2$
- (1) – (2) = 0 => $4r = 4q$ => $q = r = 1/4$

# Stratégies mixtes

| | A2 | B2 | C2 |
|---|---|---|---|
| A1 | 3,2 | 2,1 | 1,3 |
| B1 | 2,1 | 1,5 | 0,3 |
| C1 | 1,3 | 4,2 | 2,2 |

- Calculer l'équilibre en stratégies mixtes.

# Stratégies mixtes

- B1 est dominé par A1.
- Puis B2 est dominé par A2.
- Il reste à trouver l'équilibre du jeu suivant :

| | A2 | C2 |
|---|---|---|
| A1 | 3,2 | 1,3 |
| c1 | 1,3 | 2,2 |

# Stratégies mixtes

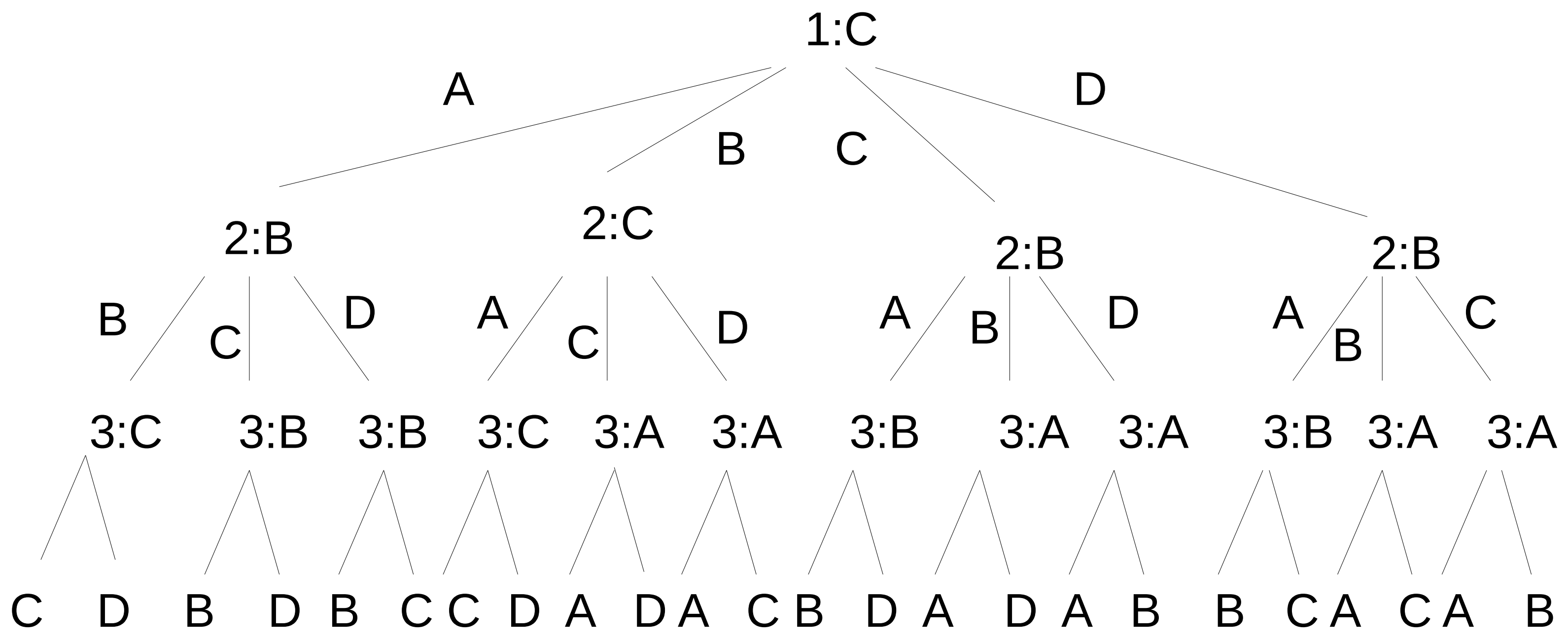
- $p+q = 1$
- $3p + q = p + 2q$
- $2p = q \Rightarrow p = 1/3$ et $q = 2/3$

- $p1 + q1 = 1$
- $2p1 + 3q1 = 3p1 + 2q1$
- $p1 = q1 = 1/2$

# Jeux Séquentiels

- Trois membres d'un comité choisissent parmi quatre candidats A, B, C et D avec la procédure suivante, chacun voyant les vetos des précédents :
- Le premier met son veto sur un candidat.
- Le deuxième met son veto sur un candidat.
- Le troisième met son veto sur un candidat.
- Les préférences sont les suivantes :
- Membre 1 : C B D A
- Membre 2 : B C A D
- Membre 3 : A B C D
- Trouver le candidat élu avec l'analyse rétrograde.

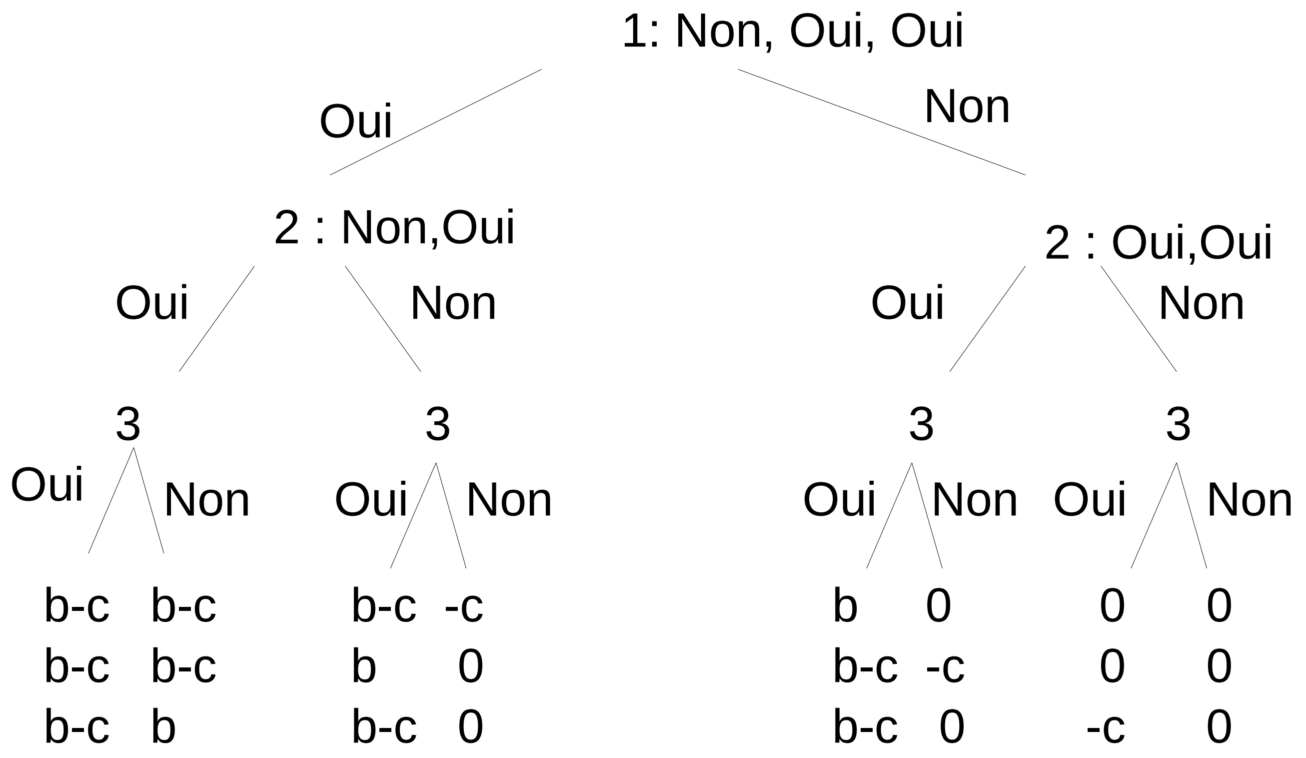
# Jeux Séquentiels



# Jeux Séquentiels

- Trois députés votent séquentiellement pour se donner une augmentation.
- L'augmentation est de b et le prix que chacun doit payer s'il vote l'augmentation est $c < b$.
- L'augmentation est attribuée aux trois députés s'ils votent à majorité pour.
- Trouver l'équilibre par analyse rétrograde.

# Jeux Séquentiels



# Stratégies dominées

| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 4,5 | 4,14 | 4,13 | 4,12 | 4,11 | 4,10 |
| 1 | 13,5 | 3,4 | 3,13 | 3,12 | 3,11 | 3,10 |
| 2 | 12,5 | 12,4 | 2,3 | 2,12 | 2,11 | 2,10 |
| 3 | 11,5 | 11,4 | 11,3 | 1,2 | 1,11 | 1,10 |
| 4 | 10,5 | 10,4 | 10,3 | 10,2 | 0,1 | 0,10 |

- Elimination successive des stratégies dominées

# Stratégies dominées

| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 4,5 | 4,14 | 4,13 | 4,12 | 4,11 | 4,10 |
| 1 | 13,5 | 3,4 | 3,13 | 3,12 | 3,11 | 3,10 |
| 2 | 12,5 | 12,4 | 2,3 | 2,12 | 2,11 | 2,10 |
| 3 | 11,5 | 11,4 | 11,3 | 1,2 | 1,11 | 1,10 |
| 4 | 10,5 | 10,4 | 10,3 | 10,2 | 0,1 | 0,10 |

- Elimination successive des stratégies dominées

# Jeux répétés

- Exercice :

| | Trahir | Coopérer |
|---|---|---|
| Trahir | 5,5 | 10,0 |
| Coopérer | 0,10 | 8,8 |

Quels taux d'intérêts amènent à la coopération pour Grim Trigger et Tit for Tat pour ce jeu ?

# Jeux répétés

- Contre Grim Trigger :
- Gain (trahir) = $10 + 5/(1+r) + 5/(1+r)^2 + \ldots$
- Gain (trahir) = $10 + 5/r$
- Gain (coopérer) = $8 + 8/r$
- La coopération est intéressante si :

  $8 + 8/r > 10 + 5/r$

  $3/r > 2$

  $r < 3/2$
- On a intérêt à coopérer contre Grim Trigger si $r < 150\ \%$.

# Jeux répétés

- Contre Tit for Tat :
- Gain (trahir) = $10 + 0/(1+r) + 8/(1+r)^2 + \ldots$
- Gain (coopérer) = $8 + 8/(1+r) + 8/(1+r)^2 + \ldots$
- La coopération est intéressante si :

  $8 + 8/(1+r) > 10$

  $8/(1+r) > 2$

  $r < 3$
- On a intérêt à coopérer contre Grim Trigger si $r < 300\ \%$.