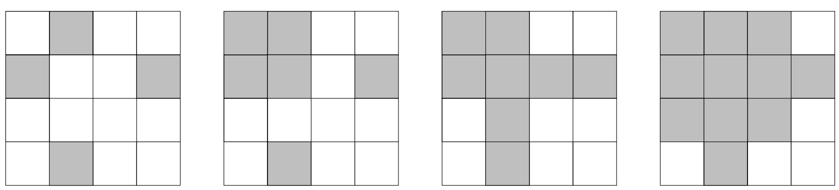
Énigmes “Mathématiques et Mouvements”

24 mai 2018

1 L’échiquier gangréné

Certaines cases d’un échiquier attrapent subitement une maladie contagieuse. L’infection menace alors l’ensemble des $n \times n$ cases par une propagation à toute case saine partageant au moins deux de ses quatre côtés avec des cases vérolées. Le processus ne se termine qu’après contamination totale de l’échiquier, ou lorsque toutes les cases saines ont moins d’une voisine sclérosée.

Dans l’exemple ci-dessous, $n = 4$ cases ont attrapé la maladie et la contamination totale est inévitable.

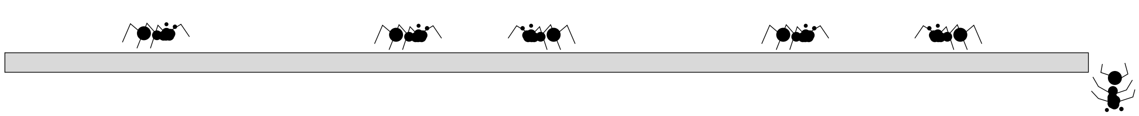


Mais si seulement $n-1$ cases tombent malades, existe-t-il un n et une configuration initiale contaminant totalement l’échiquier ?

2 Les fourmis

Sur une fine baguette de bois de 10 centimètres, on a placé aléatoirement 6 fourmis qui se déplacent droit devant elles sur la baguette –dans un sens ou dans l’autre– à la vitesse constante de 10 centimètres par seconde. Lorsque que deux fourmis se rencontrent elles changent brusquement de direction et on suppose que cela n’entraine aucune perte de vitesse.

Je jure de démissionner de mon poste s’il reste encore une seule fourmi sur la baguette après une seconde. Est-ce une promesse en l’air ?

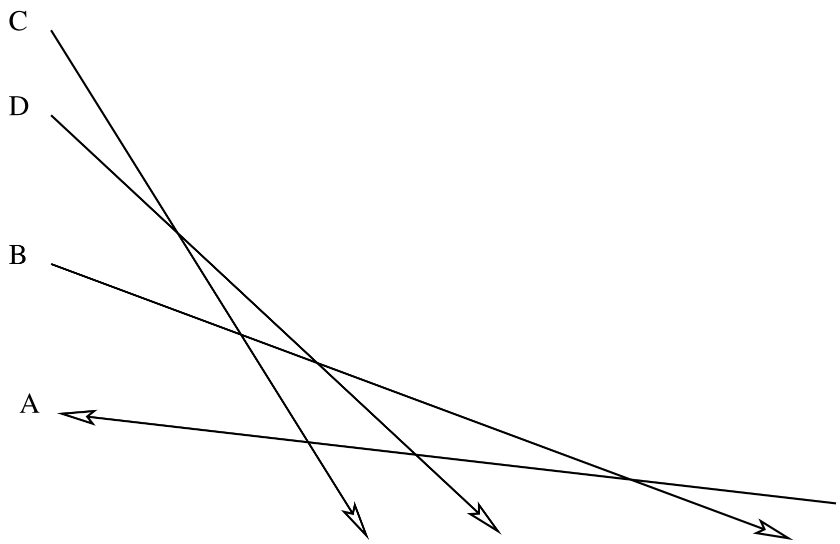


3 Pater noster

Alan, Bjarne, Claude et Donald se promènent sur un plan parfait, comme sur le graphe ci-dessous, selon une trajectoire décrivant des droites en position générale. Durant sa balade, Donald rencontre

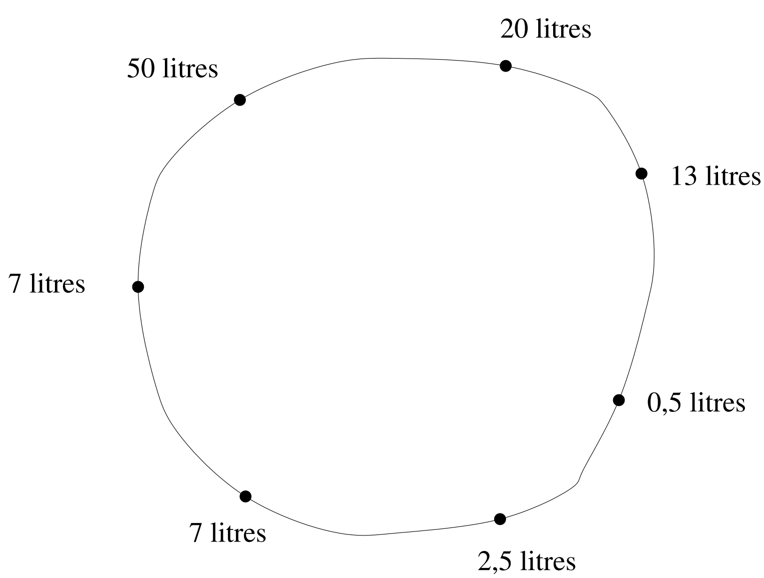
Claude, l'artiste, Bjarne, le programmeur et Alan, l'athée convaincu. De même, Bjarne croise Claude, plus Donald, plus Alan. Tous se meuvent, comme des machines, à des vitesses constantes.

Alan et Claude vont-ils eux aussi se trouver au même instant au point décrit par l'intersection de leur trajectoire ?



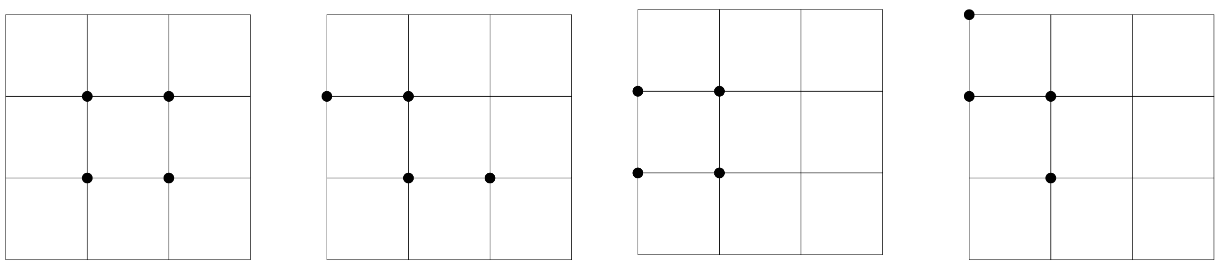
4 Un taxi pour Tobrouk

Sur une piste circulaire de 1000 km dans le désert, on a disséminé 100 litres de carburant répartis dans un certain nombre de jerricanes disposés à certains endroits de la piste. On doit parachuter une jeep consommant 10 litres au cent sur un point de la piste. Peut-on toujours choisir un point du circuit tel que la jeep puisse parcourir la totalité de la piste (et revenir à son point de départ) ?



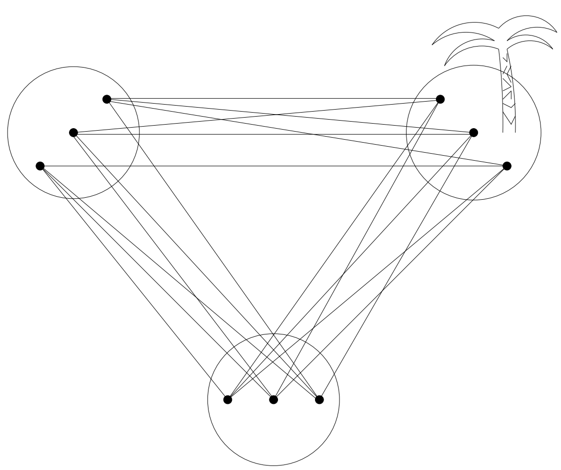
5 Damnés pions !

Soient 4 pions placés sur un plan aux quatre coins d'un carré. On peut déplacer un pion en le faisant sauter par-dessus un autre (c'est-à-dire que si deux pions sont à des points A et B, alors on peut déplacer le pion en A en A', le point tel que B est le milieu de segment AA'). Peut-on déplacer les pions de manière à ce qu'ils forment un carré strictement plus grand ?



6 Le Triangle des Bermudes

Emergeant de l'océan Atlantique, à mi-chemin entre Agadir et Dallas, le mystérieux archipel des Bermudes, composé de trois îles paradisiaques, abrite $3n$ informaticiens répartis équitablement sur chaque île. Chaque informaticien est en connexion bidirectionnelle avec $n+1$ informaticiens des deux autres îles. Est-il possible que ce réseau ne contiennent aucun triangle ?



En d'autres termes, on se demande s'il y a toujours au moins un triangle dans un graphe G (simple, non-orienté et non-vide) *triparti, équilibré et* $(\frac{|V(G)|}{3}+1)$*-régulier*, c'est-à-dire que l'ensemble $V(G)$ des sommets de G se décompose en trois sous-ensembles stables (ne contenant aucune arête), de même cardinalité n, et chaque sommet est incident à $n+1$ arêtes.

7 Contrepétrie

En français, une contrepétie consiste à permuter deux syllables d'une phrase pour en changer totalement le sens, dans le top-five des contrepétries, on trouve, pêle-mêle, "Nul n'est jamais assez fort pour ce calcul", "Les mathématiciens aiment faire converger leurs sommes", ou encore "Les physiciens voient le monde conique". Dans cette énigme, 100 forçats sont condamnés à mort mais une permutation effectuée par un gardien complice peut changer totalement cette issue tragique en un happy-end d'évasion massive.

La prison contient 100 geôles ayant chacune une clé et un détenu. Les clés sont rangées dans un meuble compartimenté en 100 casiers contenant chacun une clé. Pour des raisons qu'il serait trop long d'expliquer, il suffit pour la réussite de l'évasion de tous les prisonniers, de mettre au point avec leur gardien complice une stratégie permettant que chacun d'eux puisse repérer dans quel casier se trouve la clé de son cachot. Sans entrer dans les détails techniques du fonctionnement de la prison, retenons que les 101 pourrons mettre ensemble au point une stratégie avant que le gardien ne puisse avoir connaissance de la répartition des clés mais qu'ensuite tout se déroulera de manière indépendante dans l'ordre suivant, le gardien prendra connaissance totale de la répartition des clés et aura l'occasion de permuter uniquement deux clés entre elles, ensuite les malfrats auront accès, séparément, au meuble, et chacun pourra prendre connaissance du contenu de 50 casiers. Si, après le passage du dernier bagnard, tous savent exactement quel casier contient la clé de leur cellule, l'évasion est réussie, si un seul d'entre eux se trompe, c'est la mort certaine.

Pourrez-vous déchiffrer cette contrepétrie énigmatique ?

8 Les points noirs et blancs

Soient $2n$ points en position générale dans le plan. La moité des points sont noirs, les autres sont blancs.

Peut-on toujours tracer n segments reliant chacun son point noir à son point blanc, sans aucun croisement ?