

1999.08

Analyse théorique des décyclages sur ligne de production

François Danjou¹, Vincent Giard², Fayez Boctor³

¹ Doctorant à l'IAE, ² Professeur à l'IAE, ³ Professeur à l'Université Laval, professeur invité à l'IAE

Résumé : Les exigences de qualité conduisent à effectuer des contrôles systématiques sur certains postes d'une ligne de fabrication. Le contrôle effectué sur un poste peut conduire à sortir de la ligne un article défectueux pour permettre sa mise en conformité, avant réinjection dans la ligne, à la sortie de ce point de contrôle. L'ordre des articles à la sortie de ce poste de contrôle diffère de celui à son entrée, en raison de ces perturbations. Les conséquences de ce changement sont importantes dans la production de masse de produits personnalisés par des options, comme c'est le cas dans l'industrie automobile. On a établi analytiquement la fonction de probabilité du décyclage (= avance ou retard d'un article quelconque sortant du poste de contrôle), à partir de celle du retard positif ou nul engendré au contrôle. La connaissance d'une telle fonction est un préalable aux analyses poussées du décyclage, des moyens à mettre en œuvre pour contrer la désorganisation qui s'ensuit et, ce faisant, pour fonder économiquement la fiabilisation des processus de production ou de remise en conformité.

Mots clés: lignes d'assemblage multi-modèles, industrie automobile, analyse de probabilité, décyclage.

Abstract: Modern production and assembly lines contain several quality control stations and the quality control tests made at such stations may lead to sending the tested unit to an off-line repair station in order to make the necessary repair operations before reinserting the unit back in the line. Consequently the order (sequence) at which the processed units leave the control station is different from the initial entering order. The consequences of these sequence changes are quite important for customized mixed-model production lines such as motor car assembly lines. In this paper we derive the probability density function of rank change (positive or negative) of a given unit, from the probability density function of repair time (positive or nil). Having the exact form of this function is a prerequisite for a better and complete analysis of this rank change phenomenon and its economical impact as well as for the design of efficient solutions to avoid its disorganizing effects.

Keywords: mixed-model assembly line, motor car industry, probability analysis.

1 Introduction

Dans une ligne de production, telle que les lignes d'assemblage de l'industrie automobile, les exigences de qualité conduisent à des contrôles effectués à certaines étapes-clés du processus. À la suite du contrôle effectué sur une unité du produit en cours de fabrication ou d'assemblage (par exemple un véhicule), le retrait de cette unité de la ligne peut être décidé pour effectuer un travail de réparation ou de retouche. L'unité retirée réintègre ensuite le flux à ce point de contrôle en perdant un certain nombre de rangs. D'autres unités placées initialement avant elle, ayant également pu faire l'objet d'un retrait de la chaîne pour retouche, le rang final de l'unité

1. Responsable Projets au Département de Créations Industrielles de l'ISMRA; 6 Boulevard Maréchal Juin; 14050 Caen Cedex; Courriel: danjou@ismra.fr.

2. Professeur à l'IAE de Paris; 162 rue Saint Charles - F75740 Paris Cedex 15; Courriel: Giard.IAE@univ-paris1.fr.

3. Professeur à la Faculté des sciences de l'administration de l'Université Laval, Sainte-Foy, Québec, Canada G1K 7P4, Courriel: fayez.boctor@fsa.ulaval.ca

à laquelle on s'intéresse résultera de retards pris par un ensemble d'unités. La différence, positive, négative ou nulle, entre le rang final d'une unité à la sortie du poste de contrôle et son rang initial à l'entrée de ce poste est appelé *décyclage* (un décyclage négatif correspondant alors une avance). Les conséquences d'un tel décyclage dans l'industrie automobile sont décrites en détail dans Danjou, Giard et Le Roy [4]. Brièvement, elles jouent sur ce qui se passe en aval du point de contrôle et peuvent être de trois types :

- Il est nécessaire de créer un stock de sécurité pour des composants faiblement demandés, onéreux et/ou encombrants. En effet, l'adoption d'une politique d'approvisionnement en juste-à-temps, retenue de plus en plus dans ce genre de contexte industriel, conduit à livrer plusieurs fois par jour des petites quantités des composants. Le changement de séquence induit par le décyclage, peut aboutir à la rupture du stock disponible de certains composants, d'où la nécessité de création d'un stock de sécurité.
- Il est nécessaire de prévoir des renforts ponctuels sur certains postes en raison de violations de contraintes d'espacement entre certaines unités personnalisées par certaines options. Ces contraintes sont imposées par la variabilité du temps opératoire d'une unité de produit à l'autre en fonction des options de chaque unité. Une unité ayant une option qui aboutit à un temps opératoire supérieur au temps de cycle pour un poste donné, doit être suivie de suffisamment d'unités dont le temps opératoire pour ce poste est inférieur au temps de cycle afin d'éliminer la surcharge de ce poste. Autrement, des renforts ponctuels sont nécessaires pour éliminer cette surcharge.
- Enfin, le changement de séquence peut induire un accroissement du nombre nécessaire de changements de réglage ou d'outils car le séquençage initial est conçu de façon à réduire le nombre de changements de réglage.

Le problème auquel nous nous intéressons ici est celui du passage de la distribution de probabilité $P(R = r)$ du retard de r rangs pris par un véhicule¹ suite à un contrôle de qualité, à la distribution de probabilité $P(\Delta = \delta)$ d'un décyclage de δ rangs par rapport à son classement initial : $P(\Delta = \delta) = f [P(R = r)]$. L'intérêt opérationnel de l'obtention de tels résultats est de permettre de nouvelles approches de l'analyse économique de l'amélioration de la qualité des processus puisque cette amélioration se traduit par un certain type d'évolution de la distribution de probabilité $P(R = r)$ et que l'analyse économique est liée à l'importance du phénomène de décyclage.

Des réponses à ce problème du passage de la fonction de probabilité du retard $P(R = r)$ à la fonction de probabilité du décyclage $P(\Delta = \delta)$ peuvent être obtenues empiriquement par simulation et c'est du reste la seule approche possible dans certains cas² mais, ce qui nous intéresse ici c'est l'obtention de solutions analytiques exactes ou approchées, associées à des situations caractérisées par un certain nombre d'hypothèses réalistes. Il n'y a pas que des considérations d'élégance formelle qui militent en faveur de cette voie. Dans un certain nombre de cas, cette approche s'avère plus rapide et mieux appropriée pour effectuer certaines analyses de sensibilité. Enfin, la résolution de cette classe de problèmes est sans doute un préalable à une analyse théorique poussée de l'incidence du décyclage sur des indicateurs de performance et sur le dimensionnement de stocks de sécurité.

Bien que les chercheurs s'intéressent aux problèmes liés à la conception et à l'ordonnancement des lignes de production et d'assemblage multi-modèles depuis plusieurs décennies, à notre connaissance, la littérature ne fournit aucune étude de décyclage. Cependant, plusieurs autres problèmes ont fait l'objet d'un certain nombre de publications. Le problème d'équilibrage de la ligne a attiré beaucoup d'attention (voir [1], [3], [7], [9], [11], [13] et [15]) mais le problème ayant fait l'objet du plus grand nombre de publications est celui de l'ordonnancement ou du séquençage. L'approche la plus utilisée pour traiter ce problème vise à lisser l'usage des composants optionnels (voir [8], [10], [12] et [13]). Autres approches visent à minimiser les coûts de lancements et des renforts pour achever le travail que les opérateurs ne peuvent effectuer dans le temps imparti (voir [2] et [5]). Finalement, certains chercheurs proposent d'utiliser

1. À partir d'ici, on parlera de véhicules au lieu de parler d'articles à la fois pour être plus concret et parce que ces réflexions résultent des problèmes rencontrés au cours de contrats de recherche avec Renault.

2. Voir § 2-4.4, page 9.

des approches de simulation pour traiter le problème (voir [4]). Une revue de certains de ces travaux se trouve dans l'article de Yano et Bolat [16].

On commencera par l'analyse d'un problème relativement simple mais fréquent qui permettra de poser les fondements de la démarche proposée (§ 2), avant de généraliser la démarche dans le reste de cet article (§ 3, page 10) et de proposer quelques conclusions et pistes complémentaires (§ 4, page 16).

2 Le modèle de base

On examinera d'abord les hypothèses retenues avant de présenter et d'illustrer la solution analytique, puis de discuter de certaines hypothèses.

2-1 Les hypothèses retenues

On commencera par décrire les hypothèses générales du modèle, avant de présenter les hypothèses simplificatrices du modèle de base.

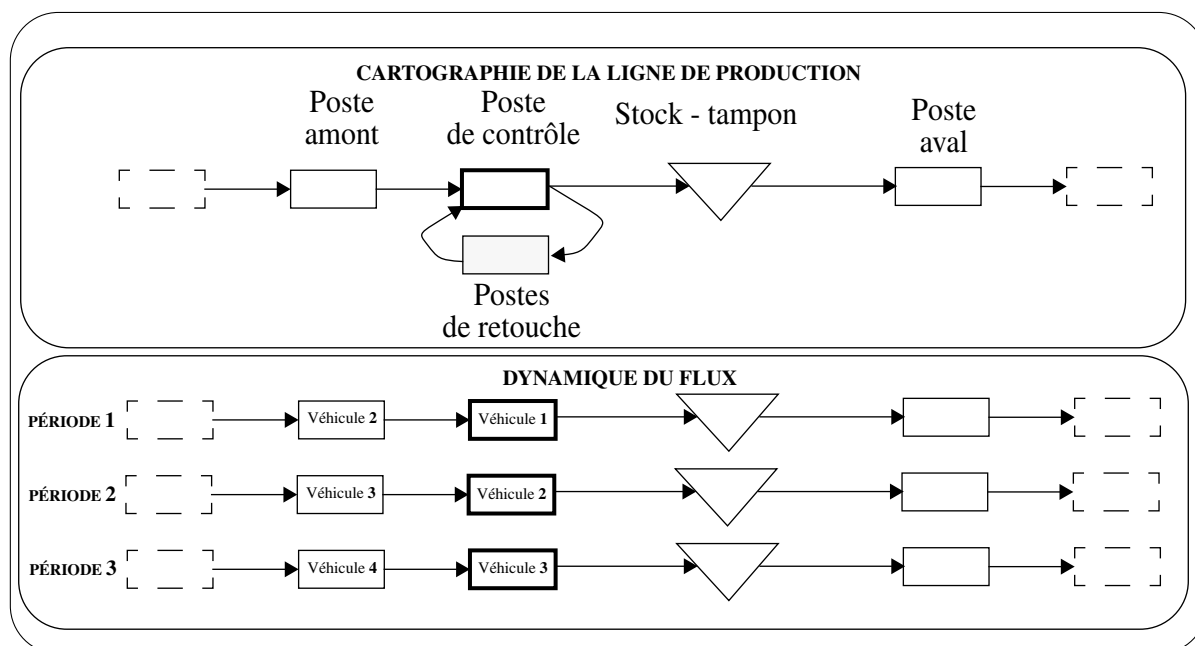
2-1.1 Les hypothèses générales

On suppose que l'on est en régime de croisière, c'est-à-dire que l'on ne tient pas compte des problèmes rencontrés à la mise en place du processus de production lorsque l'on commence à utiliser la ligne pour la première fois (occupation progressive des postes de la ligne) et lorsque l'on décide d'arrêter la fabrication (cessation d'activité progressive des postes de la ligne). En pratique, lorsqu'en fin de journée, la production cesse, le flux cesse d'avancer. Le fait que l'on soit en régime de croisière n'empêche pas que l'on ait à s'interroger sur ce qui se passe au cours d'une période de temps sur tout ou partie de la ligne, en particulier pour gérer certaines ressources ou pour établir des indicateurs de performance.

La durée de traitement dans les processeurs de la ligne est supposée constante. Le temps de cycle de la ligne permet d'établir la correspondance entre le temps (date), le rang d'un véhicule et sa localisation¹. En amont du poste de contrôle, les véhicules sont traités dans un certain ordre et ne font l'objet d'aucun retrait de la chaîne. Dans ces conditions, l'hypothèse de constance du temps de cycle fait que le rang initial des véhicules correspond au numéro de période durant laquelle le contrôle de qualité est effectué sur le poste de contrôle. La figure 1 de la page 4², illustre l'évolution dynamique du flux avec une numérotation des véhicules définie en partant d'une période 1 au cours de laquelle le véhicule 1 est contrôlé.

Le véhicule de rang j est testé au cours de la période j sur le poste de contrôle. À la fin de la période j , le véhicule peut être déclaré «sans défaut», auquel cas il passe dans le stock-tampon, ou déclaré défectueux, auquel cas il passera dans le poste de retouches. D'une manière générale, le véhicule passant au contrôle a une probabilité $P(R = r)$ de prendre un retard r , ce retard pouvant être nul (ce qui revient à dire que le véhicule a été déclaré «sans défaut» au contrôle). Afin de simplifier la modélisation on supposera ici, sans perte de généralité (voir § 2-4.3, page 8), qu'un véhicule retouché est nécessairement déclaré «sans défaut» au contrôle effectué à la fin du processus de retouche (sur un poste autre que le poste de contrôle de la chaîne), au cours de la période $j + r$, avant de réintégrer la ligne de production juste après le véhicule de rang initial $j + r$ testé dans le poste de contrôle au cours de la période $j + r$ ³.

-
1. Il peut ne pas en être ainsi sur tous les postes (variabilité de temps opératoires de certains postes en fonction du montage de certaines options) mais le poste chargé du contrôle de qualité a des arrivées cadencées par ce temps de cycle.
 2. La présence d'un stock-tampon en aval du poste de contrôle et le fait que l'on n'a pas indiqué ce qui se passe en aval du poste de contrôle sont expliqués ci-après.
 3. Il s'ensuit que si le véhicule j fait l'objet d'une retouche pendant un temps de cycle et si aucun autre véhicule ne fait l'objet d'une retouche, le véhicule de rang initial j passera après le véhicule de rang initial $j + 1$, ce qui revient à une permutation de rangs à l'entrée dans le stock-tampon.

Figure 1 : cartographie de la ligne de production et dynamique du flux

Le retrait d'un véhicule de la ligne pour des opérations de retouche entraîne une rupture d'approvisionnement du poste aval du poste de contrôle (désamorçage de la ligne), sauf s'il existe un stock-tampon entre ces deux postes. Ce stock-tampon est d'autant plus nécessaire que le poste-aval, effectuant un travail d'une durée égale au temps de cycle, ne pourra pas matériellement rattraper son retard lorsque le véhicule retouché réintégrera la ligne de fabrication. On supposera ici que ce stock-tampon est suffisant pour éviter tout désamorçage; en toute rigueur, cette taille doit être égale au nombre maximum ρ de rangs qu'un véhicule peut perdre si l'on exige que le désamorçage soit totalement impossible mais elle peut être plus faible si l'on accepte un risque limité de désamorçage. Ce point sera approfondi au § 2-4.1, page 7.

On supposera enfin que les événements «retouche d'un véhicule» sont indépendants, autrement dit que le fait qu'un véhicule soit envoyé en retouche ne modifie pas la probabilité que le ou les véhicules suivants passent en retouche.

2-1.2 Les hypothèses simplificatrices du modèle de base

Dans ce modèle de base, on fait l'hypothèse que R ne peut prendre que deux valeurs: 0 et ρ (temps constant de retouche). Physiquement ce cas de figure se rencontre lorsque la retouche s'effectue sur une ligne dérivée rebouclant sur le poste de contrôle, le temps de séjour dans cette boucle étant exactement de ρ cycles, avec une organisation du travail garantissant que le travail requis sera correctement effectué dans ce laps de temps.

2-2 La solution analytique

La démarche adoptée est générale. Elle sera présentée avant d'examiner la solution analytique trouvée pour le modèle de base.

2-2.1 Démarche générale adoptée

D'une manière générale, c'est-à-dire pour une distribution quelconque $P(R = r)$ dans laquelle r peut prendre n'importe quelle valeur entière comprise entre 0 et ρ , le véhicule qui occupe le rang j dans le film se présente devant le poste de contrôle au début de la période j . Après contrôle, il subit un retard r (positif ou nul), qui le fait sortir déclaré «sans défaut» et rentrer dans le stock-tampon à la fin de la période $j + r$. Il n'aura le rang $j + r$ que si aucun des ρ véhicules qui le précèdent n'a pris de retard; ces véhicules ont nécessairement un rang à l'entrée du

poste de contrôle compris entre $j + r - 1$ et $j + r - 1 - \rho$, que r soit positif ou nul. Dans le cas contraire, son rang sera égal à $j + r - x$, où x est le nombre x véhicules qui le précédaient et qui sont passés après.

Les événements r et x étant indépendants, la probabilité de l'événement « r et x » s'obtient en utilisant le théorème des probabilités composées dans le cas d'indépendance. Un même décy-clage δ pouvant s'obtenir à partir de différents couples de valeurs « r, x » (on reviendra sur ce point au § 3-1, page 10), la probabilité $P(\Delta = \delta)$ se calculera en faisant appel au théorème des probabilités totales dans le cas d'événements exclusifs. Cette démarche est voisine de celle utilisée dans le processus de création de la loi Binomiale.

Dans le modèle de base, R ne pouvant prendre que deux valeurs (0 et ρ), la recherche d'une solution analytique est grandement simplifiée.

2-2.2 Solution analytique du modèle de base

Pour simplifier, on notera p_0 la probabilité d'une perte de rang nulle; autrement dit, $P(R = 0) = p_0$ et $P(R = \rho) = 1 - p_0$.

Si le véhicule est déclaré «sans défaut» du premier coup (événement « $R = 0$ » se produisant avec la probabilité p_0), le décy-clage sera $\delta = 0 - x$, ce qui correspond à une avance et se produit avec la probabilité $p_0 \cdot P(X = x)$. La perte de rangs d'un véhicule retouché étant constante, n'importe lequel des ρ véhicules ayant un rang à l'entrée du poste de contrôle compris entre $j - 1$ et $j - \rho$ et ayant subi une retouche (ce qui se produit, dans ce modèle de base, avec la probabilité $1 - p_0$) passe derrière le véhicule auquel on s'intéresse. La probabilité $P(X = x)$ de l'événement « x véhicules retouchés» survenant au cours de ρ épreuves (l'épreuve consistant à contrôler un véhicule) suit alors la loi Binomiale $\mathcal{B}(1 - p_0; \rho)$.

Si le véhicule est déclaré «avec défaut», événement « $R = \rho$ » se produisant avec la probabilité $1 - p_0$, le décy-clage sera $\delta = \rho - x$. On est alors en présence d'un retard qui se produit avec la probabilité $(1 - p_0) \cdot P(X = x)$. N'importe lequel des ρ véhicules ayant un rang à l'entrée du poste de contrôle compris entre $j + \rho - 1$ et j et ayant subi une retouche passe derrière le véhicule auquel on s'intéresse. La probabilité $P(X = x)$ de l'événement « x véhicules retouchés» survenant au cours de ρ épreuves (l'épreuve consistant à contrôler un véhicule) est toujours celle de la loi Binomiale $\mathcal{B}(1 - p_0; \rho)$.

En résumé on a:

- une avance $\delta = 0 - x$, pour $R = 0$, avec la probabilité $p_0 C_\rho^x (1 - p_0)^x p_0^{\rho - x}$, définie pour $0 < x \leq \rho$;
- un retard $\delta = \rho - x$, pour $R = \rho$, avec la probabilité, définie pour $0 < x \leq \rho$, $(1 - p_0) C_\rho^x (1 - p_0)^x p_0^{\rho - x}$;
- un décy-clage nul ce qui se produit
 - si $R = 0$, lorsqu'aucun des véhicules précédants n'a été retardé, ce qui arrive avec la probabilité $p_0 C_\rho^0 (1 - p_0)^0 p_0^{\rho - 0}$;
 - si $R = \rho$, lorsque tous les véhicules précédants ont été retardés, avec la probabilité $(1 - p_0) C_\rho^\rho (1 - p_0)^\rho p_0^{\rho - \rho}$;

donc la probabilité d'un décy-clage nul est égale $p_0^{\rho + 1} + (1 - p_0)^{\rho + 1}$.

2-3 Illustration

Pour illustration, on a calculé dans le tableau 1 (page 6), la distribution de probabilités de décy-clage δ pour différentes valeurs de $1 - p_0$ comprises entre 2% et 20%, pour $\rho = 10$ et reporté ces informations dans la figure 2 de la page 6 (pour en faciliter l'interprétation en terme d'avance ou retard, la valeur du décy-clage a été changée de signe sur l'axe des abscisses).

Figure 2 : distribution de probabilités du décyclage d'un véhicule, pour $\rho = 10$ et différentes valeurs de probabilité $1 - p_0$ de retouche

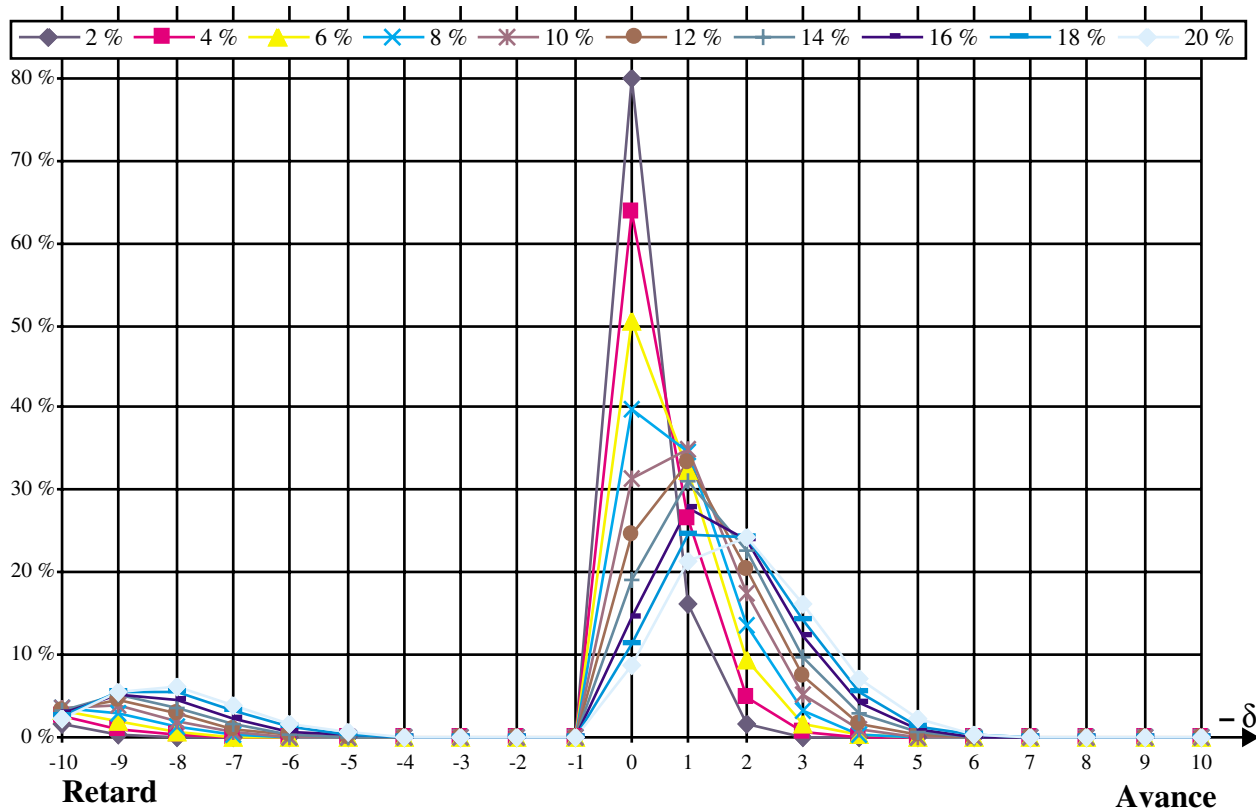


Tableau 1 : distribution de probabilités du décyclage d'un véhicule, pour $\rho = 10$ et différentes valeurs de probabilité de retouche

δ		Probabilité de retouche $1 - p_0$									
		2 %	4 %	6 %	8 %	10 %	12 %	14 %	16 %	18 %	20 %
Avance	-10	0,00 %	0,00 %	0,00 %	0,00 %	0,00 %	0,00 %	0,00 %	0,00 %	0,00 %	0,00 %
	-9	0,00 %	0,00 %	0,00 %	0,00 %	0,00 %	0,00 %	0,00 %	0,00 %	0,00 %	0,00 %
	-8	0,00 %	0,00 %	0,00 %	0,00 %	0,00 %	0,00 %	0,00 %	0,00 %	0,00 %	0,01 %
	-7	0,00 %	0,00 %	0,00 %	0,00 %	0,00 %	0,00 %	0,01 %	0,02 %	0,03 %	0,06 %
	-6	0,00 %	0,00 %	0,00 %	0,00 %	0,01 %	0,03 %	0,07 %	0,15 %	0,26 %	0,44 %
	-5	0,00 %	0,00 %	0,01 %	0,05 %	0,13 %	0,29 %	0,55 %	0,93 %	1,45 %	2,11 %
	-4	0,00 %	0,04 %	0,18 %	0,48 %	1,00 %	1,78 %	2,81 %	4,06 %	5,50 %	7,05 %
	-3	0,08 %	0,55 %	1,58 %	3,15 %	5,17 %	7,46 %	9,85 %	12,18 %	14,31 %	16,11 %
	-2	1,50 %	4,99 %	9,28 %	13,60 %	17,43 %	20,51 %	22,70 %	23,99 %	24,44 %	24,16 %
	-1	16,34 %	26,59 %	32,32 %	34,75 %	34,87 %	33,42 %	30,98 %	27,98 %	24,74 %	21,47 %
0	80,07 %	63,82 %	50,63 %	39,96 %	31,38 %	24,51 %	19,03 %	14,69 %	11,27 %	8,59 %	
Retard	1	0,00 %	0,00 %	0,00 %	0,00 %	0,00 %	0,00 %	0,00 %	0,00 %	0,00 %	0,00 %
	2	0,00 %	0,00 %	0,00 %	0,00 %	0,00 %	0,00 %	0,00 %	0,00 %	0,00 %	0,00 %
	3	0,00 %	0,00 %	0,00 %	0,00 %	0,00 %	0,00 %	0,00 %	0,00 %	0,01 %	0,02 %
	4	0,00 %	0,00 %	0,00 %	0,00 %	0,00 %	0,00 %	0,01 %	0,03 %	0,06 %	0,11 %
	5	0,00 %	0,00 %	0,00 %	0,00 %	0,01 %	0,04 %	0,09 %	0,18 %	0,32 %	0,53 %
	6	0,00 %	0,00 %	0,01 %	0,04 %	0,11 %	0,24 %	0,46 %	0,77 %	1,21 %	1,76 %
	7	0,00 %	0,02 %	0,10 %	0,27 %	0,57 %	1,02 %	1,60 %	2,32 %	3,14 %	4,03 %
	8	0,03 %	0,21 %	0,59 %	1,18 %	1,94 %	2,80 %	3,69 %	4,57 %	5,36 %	6,04 %
	9	0,33 %	1,11 %	2,06 %	3,02 %	3,87 %	4,56 %	5,04 %	5,33 %	5,43 %	5,37 %
	10	1,63 %	2,66 %	3,23 %	3,48 %	3,49 %	3,34 %	3,10 %	2,80 %	2,47 %	2,15 %

2-4 Discussion de certaines hypothèses du modèle de base

On discutera successivement de la détermination de la taille du stock-tampon (§ 2-4.1), de l'organisation physique du processus de retouches (§ 2-4.2, page 7) du problème posé par les retouches multiples (§ 2-4.3, page 8) et, enfin, du processus général de décyclage (§ 2-4.4, page 9).

2-4.1 Taille du stock-tampon en aval du poste de contrôle

Pour éviter tout désamorçage de la ligne de production en aval du poste de contrôle, on a indiqué, page 4, que le stock-tampon doit être suffisant pour éviter tout désamorçage. Comme théoriquement il est possible d'avoir p véhicules consécutifs en retouche, ce stock-tampon doit être initialement dimensionné à p véhicules pour rendre impossible le désamorçage de la ligne à partir de ce point de contrôle. Il est évident que l'on aura intérêt à calibrer ce stock à un niveau inférieur S , dans la mesure où la probabilité d'avoir p véhicules consécutifs en retouche est négligeable¹.

L'analyse théorique de ce problème est triviale. Sachant qu'un véhicule quelconque a une probabilité $P(R > 0) = 1 - p_0$ de passer en retouche et qu'à la fin d'une période quelconque, le stock tampon contient un nombre de véhicules égal à la différence entre le nombre maximal S de véhicules qu'il peut contenir et le nombre X de véhicules qui sont en retouche à cette date, la probabilité de désamorçage est égale à $P(X > S)$. Or on a vu, page 5, que la probabilité de ce nombre X est celle de la loi Binomiale $\mathcal{B}(q_0; p)$, ce qui permet de calculer immédiatement la probabilité de désamorçage. En reprenant notre exemple numérique, on a les probabilités de désamorçage suivantes associées à 3 valeurs de stock-tampon.

Tableau 2 : taille du stock-tampon et risque de désamorçage

S	$1 - p_0 = 2\%$	$1 - p_0 = 4\%$	$1 - p_0 = 6\%$	$1 - p_0 = 8\%$	$1 - p_0 = 10\%$	$1 - p_0 = 12\%$	$1 - p_0 = 14\%$	$1 - p_0 = 16\%$	$1 - p_0 = 18\%$	$1 - p_0 = 20\%$
2	0,09 %	0,62 %	1,88 %	4,01 %	7,02 %	10,87 %	15,45 %	20,64 %	26,28 %	32,22 %
4	0,00 %	0,00 %	0,02 %	0,06 %	0,16 %	0,37 %	0,73 %	1,30 %	2,13 %	3,28 %
5	0,00 %	0,00 %	0,00 %	0,00 %	0,01 %	0,04 %	0,10 %	0,20 %	0,37 %	0,64 %

D'un point de vue économique, on doit arbitrer entre le coût de détention du stock et le coût de la rupture de stock (désamorçage). Cette étude, faisant appel à un modèle de gestion calendaire de stock² s'effectue sans difficulté.

Soulignons enfin que ce qui vient d'être dit reste valable dans le cas général (retard quelconque compris entre 0 et p), puisque ce qui importe ici c'est l'événement «véhicule passant en retouche» et non le nombre de rangs perdus.

2-4.2 L'organisation du traitement des retouches

Comme on l'a illustré à la figure 1 de la page 4, la détection d'un problème de qualité conduit au retrait du véhicule de la ligne pour retouche. Celle-ci effectuée, et la qualité jugée conforme, ce véhicule reprend sa place dans la ligne. Il convient de s'interroger sur l'organisation physique du processus de retouche.

Dans le modèle de base, on est parti de l'hypothèse selon laquelle le véhicule dérivé partait dans une ligne de retouche, c'est-à-dire allait subir des traitements successifs sur un nombre fini de postes positionnés dans une boucle de dérivation. Il est possible que certains traitements ne soient pas nécessaires mais cela ne modifie pas la durée du séjour; par contre cette possibilité peut permettre d'envisager le partage de plusieurs postes par un nombre moindre d'opérateurs.

1. En pratique, le stock-tampon peut avoir en outre pour objet d'éviter un désamorçage du système-aval induit par une défaillance du système-amont, en raison de pannes ou d'aléas d'approvisionnement. Dans ce cas, le problème du dimensionnement du stock-tampon est plus complexe et l'impact des retouches peut être faible, voire négligeable, au regard de celui de la fiabilité.

2. Voir sur ce point Giard [6], chapitre III.

Cette organisation en ligne peut être remplacée par le travail sur un poste unique de retouche, regroupant éventuellement plusieurs équipements. Dans ce cas, pour que le modèle de base puisse s'appliquer, il faut, d'une part, que l'on puisse considérer comme constant le temps de retouche et, d'autre part, qu'il y ait un nombre de postes de retouche suffisant pour que tout véhicule envoyé en retouche n'ait jamais à attendre. La détermination de ce nombre de postes s'effectue alors en suivant exactement le raisonnement suivi pour le calibrage du stock-tampon au § 2-4.1, page 7. Si ce nombre est ρ , on est alors certain que l'attente est impossible, ce qui revient à une situation de capacité infinie.

Si l'on suppose maintenant que ce nombre de postes puisse être insuffisant (ou, plus exactement, ait une probabilité significative d'être insuffisant), l'analyse du modèle de base (et, a fortiori, celle du modèle général) devient beaucoup plus compliquée, puisque le temps de séjour dans la zone de retraitement devient la somme d'un temps de traitement, par hypothèse constant dans le modèle de base, et d'un temps d'attente qui dépend de l'état du système (avancement des véhicules en cours de traitement et importance de la file d'attente). Dans ces conditions, la distribution de probabilités du nombre de rangs perdus devient une distribution de probabilités conditionnelles dépendant du nombre de véhicules en attente et/ou en cours de traitement, assez difficile à déterminer dans le cas général. On peut ajouter qu'alors on peut retenir de travailler soit sur un problème se posant à un instant donné, et donc pour un état donné du système (véhicules en attente et/ou en cours de traitement), soit de rechercher la distribution de probabilité du décyclage en régime de croisière. En pratique, ces extensions possibles ne présentent pas beaucoup d'intérêt car des procédures sont mises en place (renforts additionnels, en particulier) pour rendre très peu probable cette situation de file d'attente.

Il convient d'ajouter que l'organisation physique retenue a une incidence sur le décyclage. Il est préférable que le travail de retouche soit exécuté dans le temps (ρ) le plus faible possible. Le [tableau 3 de la page 9](#) reprend l'exemple numérique précédent et illustre le cas de l'incidence sur le décyclage d'une division par 2 du temps ρ maximal de retouche. On peut y constater la diminution de dispersion induite par l'abaissement de ρ (pour un p donné), qui se synthétise par l'écart-type du décyclage. Par ailleurs, on peut remarquer que l'impact de cette diminution n'est pas le même sur l'avance et sur le retard.

2-4.3 Le problème des retouches multiples

On a, jusqu'à présent, considéré que le contrôle final conduisait toujours à une déclaration de conformité. Dans la pratique, ce n'est pas toujours le cas, ce qui conduit à un nouveau passage dans les postes de retouche. Ceci n'affecte pas le raisonnement mais conduit seulement à travailler sur une autre distribution de probabilités. Le raisonnement qui suit s'appuie directement sur le modèle général (dans lequel r peut prendre n'importe quelle valeur entière comprise entre 0 et ρ) et non le modèle simplifié.

Si l'on admet qu'un véhicule ayant pris un retard r_1 et repassant au contrôle est susceptible de prendre à nouveau du retard r_2 , il est facile alors de déterminer la probabilité du retard total $r = r_1 + r_2$, pour $r \leq 2\rho$, si l'on peut raisonnablement postuler que la distribution de probabilités des retards au second passage en retouche ($P(R_1 = r) = P(R_2 = r), \forall r$):

$$P(R = r) = \sum_{r_1=0}^{\text{Min}(r, \rho)} P(R_1 = r_1)P(R_2 = r - r_1) \quad \text{Relation 1}$$

Si l'on passe à la possibilité d'un troisième déclassement (au plus) d'un même véhicule dans le processeur, le retard maximal est égal à 3ρ et l'adaptation de la [relation 1](#) conduit à la [relation 2](#):

$$P(R = r) = \sum_{r_1=0}^{\text{Min}(r, \rho)} P(R_1 = r_1) \sum_{r_2=0}^{\text{Min}(r-r_1, \rho)} P(R_2 = r_2)P(R_3 = r - r_1 - r_2) \quad \text{Relation 2}$$

La généralisation à un nombre quelconque de reprise ne pose pas de problème et correspond à une démarche classique de convolution.

Tableau 3 : Distribution de probabilité des décyclages (%) pour différentes valeurs de $1 - p_0$ et $\rho = 5$ ou 10

δ	$1 - p_0 = 2\%$		$1 - p_0 = 4\%$		$1 - p_0 = 6\%$		$1 - p_0 = 8\%$		$1 - p_0 = 10\%$		$1 - p_0 = 12\%$		$1 - p_0 = 14\%$		$1 - p_0 = 16\%$		$1 - p_0 = 18\%$		$1 - p_0 = 20\%$		
	$\rho=10$	$\rho=5$	$\rho=10$	$\rho=5$	$\rho=10$	$\rho=5$	$\rho=10$	$\rho=5$	$\rho=10$	$\rho=5$	$\rho=10$	$\rho=5$	$\rho=10$	$\rho=5$	$\rho=10$	$\rho=5$	$\rho=10$	$\rho=5$	$\rho=10$	$\rho=5$	
Avance	-10	0,00		0,00		0,00		0,00		0,00		0,00		0,00		0,00		0,00		0,00	
	-9	0,00		0,00		0,00		0,00		0,00		0,00		0,00		0,00		0,00		0,00	
	-8	0,00		0,00		0,00		0,00		0,00		0,00		0,00		0,00		0,00		0,01	
	-7	0,00		0,00		0,00		0,00		0,00		0,00		0,01		0,02		0,03		0,06	
	-6	0,00		0,00		0,00		0,00		0,01		0,03		0,07		0,15		0,26		0,44	
	-5	0,00	0,00	0,00	0,00	0,01	0,00	0,05	0,00	0,13	0,00	0,29	0,00	0,55	0,00	0,93	0,01	1,45	0,02	2,11	0,03
	-4	0,00	0,00	0,04	0,00	0,18	0,01	0,48	0,02	1,00	0,04	1,78	0,08	2,81	0,14	4,06	0,23	5,50	0,35	7,05	0,51
	-3	0,08	0,01	0,55	0,06	1,58	0,18	3,15	0,40	5,17	0,73	7,46	1,18	9,85	1,75	12,18	2,43	14,31	3,22	16,11	4,10
	-2	1,50	0,37	4,99	1,36	9,28	2,81	13,60	4,58	17,43	6,56	20,51	8,64	22,70	10,72	23,99	12,75	24,44	14,65	24,16	16,38
	-1	16,34	9,04	26,59	16,31	32,32	22,02	34,75	26,36	34,87	29,52	33,42	31,66	30,98	32,93	27,98	33,46	24,74	33,37	21,47	32,77
0	80,07	88,58	63,82	78,28	50,63	68,99	39,96	60,64	31,38	53,14	24,51	46,44	19,03	40,46	14,69	35,13	11,27	30,40	8,59	26,22	
Retard	1	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,01	0,00	0,02	0,00	0,04	0,00	0,08	0,00	0,13	
	2	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,01	0,00	0,03	0,00	0,08	0,00	0,16	0,00	0,28	0,00	0,46	0,00	0,71	0,00	1,02
	3	0,00	0,01	0,00	0,06	0,00	0,18	0,00	0,40	0,00	0,73	0,00	1,18	0,00	1,75	0,00	2,43	0,01	3,22	0,02	4,10
	4	0,00	0,18	0,00	0,68	0,00	1,41	0,00	2,29	0,00	3,28	0,00	4,32	0,01	5,36	0,03	6,37	0,06	7,32	0,11	8,19
	5	0,00	1,81	0,00	3,26	0,00	4,40	0,00	5,27	0,01	5,90	0,04	6,33	0,09	6,59	0,18	6,69	0,32	6,67	0,53	6,55
	6	0,00		0,00		0,01		0,04		0,11		0,24		0,46		0,77		1,21		1,76	
	7	0,00		0,02		0,10		0,27		0,57		1,02		1,60		2,32		3,14		4,03	
	8	0,03		0,21		0,59		1,18		1,94		2,80		3,69		4,57		5,36		6,04	
	9	0,33		1,11		2,06		3,02		3,87		4,56		5,04		5,33		5,43		5,37	
	10	1,63		2,66		3,23		3,48		3,49		3,34		3,10		2,80		2,47		2,15	
Ecart-type	1,47	0,77	2,06	1,07	2,49	1,30	2,85	1,49	3,15	1,64	3,41	1,78	3,64	1,90	3,84	2,01	4,03	2,10	4,20	2,19	

On peut donc raisonner en partant d'une distribution théorique unique du retard pris par un véhicule sur ce processeur, que le retard positif r résulte ou non d'une possibilité de repasser plusieurs fois en retraitement sur le processeur. Dans la suite, on conservera la notation ρ pour désigner le retard maximal que peut prendre un véhicule compte tenu du nombre maximum de passages possibles dans le processeur.

2-4.4 Processus général de décyclage

Le décyclage étudié ici est celui qui intervient pour un véhicule au niveau d'un poste de contrôle de qualité inséré dans une chaîne. Le problème général de la détermination du décyclage est plus vaste.

On peut s'intéresser au décyclage d'un véhicule au niveau d'un segment de la chaîne contenant deux ou plusieurs postes successifs de contrôle. En supposant que ces postes de contrôle sont séparés par des stocks tampons d'une taille suffisante pour éviter le désamorçage de la ligne et où aucun changement de rang n'est opéré, le décyclage d'un véhicule est la somme des décyclages se produisant suite au passage par chaque poste de contrôle.

On peut aussi imaginer de généraliser la démarche pour étudier le décyclage survenant à la suite des passages sur des postes de contrôle de qualité espacés sur une chaîne et séparés par des stocks de tri dont l'objet est principalement de modifier l'ordre des véhicules. Les algorithmes utilisés pour sélectionner, à chaque cycle, le véhicule à sortir du stock de tri, s'appuient sur des caractéristiques des véhicules-candidats. Ces caractéristiques étant variables d'un véhicule à l'autre, la caractérisation de l'ensemble des véhicules présents dans le stock de tri varie dyna-

miquement, pour des raisons en partie indépendantes des algorithmes de tri. Dès lors, ce problème ne peut pas faire l'objet d'une approche analytique.

On peut s'intéresser également au décyclage d'un groupe de véhicules initialement consécutifs. Dans cette perspective, d'éventuelles permutations au sein de cet ensemble sont sans intérêt et l'on s'attache, d'une part, aux véhicules dont le rang initial n'appartenait pas à l'ensemble \mathcal{E} des rangs du groupe de véhicules initialement retenu et qui, à la sortie du contrôle ont un rang appartenant à l'ensemble \mathcal{E} (véhicules que l'on peut qualifier de «rentrant dans le groupe») et, d'autre part, aux véhicules dont le rang initial appartenait à l'ensemble \mathcal{E} et qui, à la sortie du contrôle ont un rang n'appartenant plus à l'ensemble \mathcal{E} (véhicules que l'on peut qualifier de «sortant du groupe»). Une approche analytique de cette classe de problèmes est sans doute envisageable mais elle suppose de pouvoir d'abord résoudre le problème posé dans cet article et il n'est pas certain que l'approche simulateur ne soit pas plus efficace.

3 Généralisation du modèle de base

Après avoir explicité le mécanisme de décyclage et la définition de la distribution de probabilités qui en découle (§ 3-1), on fournira la formule générale qui permet d'en déduire à partir de celle du nombre de rangs perdus par un véhicule (§ 3-2, page 11) et on l'illustrera par un exemple (§ 3-1, page 10).

3-1 Explicitation du mécanisme de décyclage et définition de sa distribution de probabilités

Le modèle de base a traité le cas où le retard R ne peut prendre que deux valeurs (0 et ρ). La généralisation proposée consiste à prendre en compte le cas où le retard R peut prendre toutes les valeurs entières comprises entre 0 et ρ . Pour aboutir à une solution analytique, la démarche proposée au § 2-2.1, page 4, est utilisée.

Si le véhicule j prend un retard r (positif ou nul), à la suite du contrôle de qualité, ce qui se produit avec une probabilité $P(R = r)$, son décyclage δ sera $r - x$ où x est le nombre de véhicules ayant un rang à l'entrée du poste de contrôle compris entre $j + r - 1$ et $j + r - \rho$ et qui sont passés après lui. Le calcul de la probabilité correspondante est plus compliqué que dans le cas du modèle de base.

Il est tout d'abord évident qu'une même valeur de décyclage δ peut être obtenue par différentes combinaisons de valeurs prises par r et x . Comme dans le modèle de base, δ peut varier entre $-\rho$ (cas où $R = 0$ et où tous les véhicules qui le précèdent partent en retouche) et $+\rho$ (cas où $R = \rho$ et où aucun des véhicules qui le précèdent ne part en retouche). Sachant que l'on a nécessairement $0 \leq x \leq \rho$ et $0 \leq r \leq \rho$, les différentes combinaisons de valeurs prises par r et x sont données par la relation 3 qui détermine x à partir de δ et r . Dans cette relation, la borne inférieure de r est 0 si δ est négatif ou nul et ne peut être que la valeur δ dans le cas contraire (puisque x ne peut être négatif). La borne supérieure de r est ρ si δ est positif ou nul et, dans le cas contraire est égale à $\rho + \delta$. Le tableau 4 illustre les combinaisons possibles de x et r , dans notre exemple où $\rho = 10$.

$$x = r - \delta, \text{ pour } \text{Max}(0, \delta) \leq r \leq \text{Min}(\rho, \rho + \delta), \text{ et } -\rho \leq \delta \leq \rho \quad \text{Relation 3}$$

Il s'ensuit que la probabilité du décyclage est donnée par la relation 4:

$$P(\Delta = \delta) = \sum_{\text{Max}(0, \delta)}^{\text{Min}(\rho, \rho + \delta)} P(R = r) \cdot P(X = \delta - r), \text{ pour } -\rho \leq \delta \leq \rho \quad \text{Relation 4}$$

Reste alors à calculer la probabilité de $P(X = x)$, ce qui est plus compliqué parce que le nombre minimum de rangs à perdre pour qu'un véhicule, ayant un rang à l'entrée du poste de contrôle inférieur à $j + r$, passe derrière le véhicule auquel on s'intéresse varie en fonction de

Tableau 4 : relations entre r , x et δ

$x \backslash \delta$	-10	-9	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0											0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1										0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
2									0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10		
3								0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10			
4						0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10					
5					0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10						
6				0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10							
7			0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10								
8		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10									
9	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10										
10	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10										

son éloignement du véhicule auquel on s'intéresse. La solution de ce problème passe par l'adoption d'un raisonnement récurrent.

3-2 Calcul récurrent des probabilités $P(X = x)$

Le véhicule dont on étudie le décyclage est le véhicule j , lequel est amené à prendre un retard de r rangs en retouche, ce qui nous conduit à nous intéresser aux véhicules ayant un rang à l'entrée du poste de contrôle compris entre $j + r - 1$ et $j + r - \rho$, qui sont passés après lui. Pour simplifier les expressions utilisées dans l'étude récurrente de la probabilité $P(X = x)$, on conviendra que le véhicule j n'est pas passé en retouche ($r = 0$), ce qui conduit à s'intéresser aux véhicules ayant un rang à l'entrée du poste de contrôle compris entre $j - 1$ et $j - \rho$. Cette convention n'entraîne aucune perte de généralité car l'expression analytique recherchée dépend d'un repérage relatif des véhicules «candidats à passer derrière».

3-2.1 Calcul de $P(X = 0)$

Dans ce cas, aucun des ρ véhicules qui suivent le véhicule j ne prendra suffisamment de retard pour passer derrière lui. La probabilité de cet événement est:

$$P(X = 0) = P(R_{j-1} < 1) \cdot P(R_{j-2} < 2) \cdot \dots \cdot P(R_{j-\rho} < \rho).$$

Mais en faisant l'hypothèse que les lois de retard des différents véhicules sont indépendantes et identiques, on obtient:

$$P(X = 0) = \prod_{i=1}^{\rho} P(R < i)$$

$$\text{Posons: } \Pi = \prod_{i=1}^{\rho} P(R < i), \text{ alors on écrit:}$$

$$P(X = 0) = \Pi$$

Relation 5

3-2.2 Calcul de $P(X = 1)$

Dans ce cas, parmi les véhicules susceptibles de passer derrière le véhicule j , un seul véhicule, ayant le rang i_1 à l'entrée du poste de contrôle et ayant subi un retard de r rangs en retouche, passe après le véhicule j . D'autres véhicules ont pu connaître du retard mais sans que celui-ci les ait conduits à passer après le véhicule j (l'analyse de cette situation est facilitée par le [tableau 5 de la page 12](#), avec une valeur $\rho = 5$).

La probabilité de cet événement est donc :

$$\begin{aligned} P(X = 1) &= P(R_{j-1} \geq 1) \cdot P(R_{j-2} < 2) \cdot \dots \cdot P(R_{j-\rho} < \rho) \\ &\quad + P(R_{j-1} < 1) \cdot P(R_{j-2} \geq 2) \cdot \dots \cdot P(R_{j-\rho} < \rho) \\ &\quad + \dots \end{aligned}$$

Tableau 5 : analyse des pertes de rangs des ρ véhicules précédant le véhicule j dans le cas où $X = 1$ et $\rho = 5$

Véhicule unique passant derrière le véhicule j	Véhicule initialement en rang					Probabilité de l'événement composite correspondant
	$j-1$	$j-2$	$j-3$	$j-4$	$j-5$	
Véhicule $j-1$	$R \geq 1$	$R < 2$	$R < 3$	$R < 4$	$R < 5$	$P(R \geq 1).P(R < 2).P(R < 3).P(R < 4).P(R < 5) = \frac{P(R \geq 1)}{P(R < 1)} \left\{ \prod_{k=1}^5 P(R < k) \right\}$
Véhicule $j-2$	$R < 1$	$R \geq 2$	$R < 3$	$R < 4$	$R < 5$	$P(R < 1).P(R \geq 2).P(R < 3).P(R < 4).P(R < 5) = \frac{P(R \geq 2)}{P(R < 2)} \left\{ \prod_{k=1}^5 P(R < k) \right\}$
Véhicule $j-3$	$R < 1$	$R < 2$	$R \geq 3$	$R < 4$	$R < 5$	$P(R < 1).P(R < 2).P(R \geq 3).P(R < 4).P(R < 5) = \frac{P(R \geq 3)}{P(R < 3)} \left\{ \prod_{k=1}^5 P(R < k) \right\}$
Véhicule $j-4$	$R < 1$	$R < 2$	$R < 3$	$R \geq 4$	$R < 5$	$P(R < 1).P(R < 2).P(R < 3).P(R \geq 4).P(R < 5) = \frac{P(R \geq 4)}{P(R < 4)} \left\{ \prod_{k=1}^5 P(R < k) \right\}$
Véhicule $j-\rho$ = Véhicule $j-5$	$R < 1$	$R < 2$	$R < 3$	$R < 4$	$R \geq 5$	$P(R < 1).P(R < 2).P(R < 3).P(R < 4).P(R \geq 5) = \frac{P(R \geq 5)}{P(R < 5)} \left\{ \prod_{k=1}^5 P(R < k) \right\}$

$$+P(R_{j-1} < 1) \cdot P(R_{j-2} < 2) \cdot \dots \cdot P(R_{j-\rho} \geq \rho)$$

ce qui donne, en multipliant et divisant chaque terme par $P(R < i)$, la **relation 6** :

$$P(X = 1) = \left\{ \prod_{k=1}^{\rho} P(R < k) \right\} \sum_{i=1}^{\rho} \frac{P(R \geq i)}{P(R < i)} \quad \text{Relation 6}$$

Posons : $g_i = \frac{P(R \geq i)}{P(R < i)}$ et $s_1 = \sum_{i=1}^{\rho} g_i$, on peut alors écrire la **relation 6** sous la forme de la **relation 7** :

$$P(X = 1) = \Pi \cdot s_1 \quad \text{Relation 7}$$

3-2.3 Calcul de $P(X = 2)$

Dans ce cas, parmi les véhicules susceptibles de passer derrière le véhicule j , 2 véhicules seulement passent après ce véhicule j . D'autres véhicules ont pu connaître du retard mais sans que celui-ci les ait conduits à passer après le véhicule j (l'analyse de ce problème est effectuée dans le **tableau 6 de la page 13**, avec une valeur $\rho = 5$).

De façon moins détaillée, la probabilité de cet événement est donnée par :

$$P(X = 2) = \prod_{k=1}^{\rho} P(R < k) \cdot \sum_{i=1}^{\rho-1} \frac{P(R \geq i)}{P(R < i)} \cdot \sum_{j=i+1}^{\rho} \frac{P(R \geq j)}{P(R < j)} \quad \text{Relation 8}$$

ce qui donne, en modifiant les limites de la deuxième somme, la relation :

$$P(X = 2) = \frac{1}{2} \cdot \prod_{k=1}^{\rho} P(R < k) \cdot \sum_{i=1}^{\rho} \frac{P(R \geq i)}{P(R < i)} \cdot \sum_{j \neq i} \frac{P(R \geq j)}{P(R < j)}$$

ce que nous pouvons écrire :

Tableau 6 : analyse des pertes de rangs des ρ véhicules précédant le véhicule j dans le cas où $X = 2$ et $\rho = 5$

Véhicules passant derrière le véhicule j		Véhicule initialement en rang					Probabilité de l'événement composite correspondant
		$j-1$	$j-2$	$j-3$	$j-4$	$j-5$	
Véhicule $j-1$	Véhicule $j-2$	$R \geq 1$	$R \geq 2$	$R < 3$	$R < 4$	$R < 5$	$P(R \geq 1).P(R \geq 2).P(R < 3).P(R < 4).P(R < 5)$
	Véhicule $j-3$	$R \geq 1$	$R < 2$	$R \geq 3$	$R < 4$	$R < 5$	$P(R \geq 1).P(R < 2).P(R \geq 3).P(R < 4).P(R < 5)$
	Véhicule $j-4$	$R \geq 1$	$R < 2$	$R < 3$	$R \geq 4$	$R < 5$	$P(R \geq 1).P(R < 2).P(R < 3).P(R \geq 4).P(R < 5)$
	Véhicule $j-5$	$R \geq 1$	$R < 2$	$R < 3$	$R < 4$	$R \geq 5$	$P(R \geq 1).P(R < 2).P(R < 3).P(R < 4).P(R \geq 5)$
	tous cas de figure						$P(R \geq 1) \sum_{j=2}^5 P(R \geq j) \prod_{\substack{k=2 \\ k \neq j}}^5 P(R < k) =$ $P(R \geq 1) \sum_{j=2}^5 P(R \geq j) \prod_{k=1}^5 \frac{P(R < k)}{P(R < 1) \cdot P(R < j)}$ $= \frac{P(R \geq 1)}{P(R < 1)} \cdot \sum_{j=2}^5 \frac{P(R \geq j)}{P(R < j)} \cdot \prod_{k=1}^5 P(R < k)$
Véhicule $j-2$	Véhicule $j-3$	$R < 1$	$R \geq 2$	$R \geq 3$	$R < 4$	$R < 5$	$P(R < 1).P(R \geq 2).P(R \geq 3).P(R < 4).P(R < 5)$
	Véhicule $j-4$	$R < 1$	$R \geq 2$	$R < 3$	$R \geq 4$	$R < 5$	$P(R < 1).P(R \geq 2).P(R < 3).P(R \geq 4).P(R < 5)$
	Véhicule $j-5$	$R < 1$	$R \geq 2$	$R < 3$	$R < 4$	$R \geq 5$	$P(R < 1).P(R \geq 2).P(R < 3).P(R < 4).P(R \geq 5)$
	tous cas de figure						$P(R < 1)P(R \geq 2) \sum_{j=3}^5 P(R \geq j) \prod_{\substack{k=3 \\ k \neq j}}^5 P(R < k) =$ $P(R \geq 2) \sum_{j=3}^5 P(R \geq j) \prod_{k=1}^5 \frac{P(R < k)}{P(R < 2) \cdot P(R < j)}$ $= \frac{P(R \geq 2)}{P(R < 2)} \cdot \sum_{j=3}^5 \frac{P(R \geq j)}{P(R < j)} \cdot \prod_{k=1}^5 P(R < k)$
	Véhicule $j-4$	$R < 1$	$R < 2$	$R \geq 3$	$R \geq 4$	$R < 5$	$P(R < 1).P(R < 2).P(R \geq 3).P(R \geq 4).P(R < 5)$
Véhicule $j-5$	$R < 1$	$R < 2$	$R \geq 3$	$R < 4$	$R \geq 5$	$P(R < 1).P(R < 2).P(R \geq 3).P(R < 4).P(R \geq 5)$	
Véhicule $j-3$	tous cas de figure						$P(R < 1)P(R < 2)P(R \geq 3) \sum_{j=4}^5 P(R \geq j) \prod_{\substack{k=4 \\ k \neq j}}^5 P(R < k) =$ $P(R \geq 3) \sum_{j=4}^5 P(R \geq j) \prod_{k=1}^5 \frac{P(R < k)}{P(R < 3) \cdot P(R < j)}$ $= \frac{P(R \geq 3)}{P(R < 3)} \cdot \sum_{j=4}^5 \frac{P(R \geq j)}{P(R < j)} \cdot \prod_{k=1}^5 P(R < k)$
	Véhicule $j-5$	$R < 1$	$R < 2$	$R < 3$	$R \geq 4$	$R \geq 5$	$P(R < 1).P(R < 2).P(R < 3).P(R \geq 4).P(R \geq 5)$
	Véhicule $j-4$	$R < 1$	$R < 2$	$R < 3$	$R \geq 4$	$R \geq 5$	$= \frac{P(R \geq 1)}{P(R < 1)} \cdot \sum_{j=4}^5 \frac{P(R \geq j)}{P(R < j)} \cdot \prod_{k=1}^5 P(R < k)$

$$P(X = 2) = \frac{1}{2!} \cdot \Pi \cdot \sum_{i=1}^{\rho} (g_i \cdot \sum_{j \neq i} g_j) = \frac{1}{2!} \cdot \Pi \cdot \sum_{i=1}^{\rho} \{g_i \cdot (s_1 - g_i)\}$$

d'où on déduit la relation :

$$P(X = 2) = \frac{1}{2!} \cdot \Pi \cdot \left[(s_1)^2 - \sum_{i=1}^{\rho} (g_i)^2 \right]$$

et en posant $s_2 = \sum_{i=1}^{\rho} (g_i)^2$, on obtient finalement la **relation 9** :

$$P(X = 2) = \frac{1}{2!} \cdot \Pi \cdot [(s_1)^2 - s_2] \quad \text{Relation 9}$$

Posons :

$$N_2 = \sum_{i=1}^{\rho} (g_i \cdot \sum_{j \neq i} g_j) = (s_1)^2 - s_2$$

alors nous pouvons écrire :

$$P(X = 2) = \frac{N_2}{2!} \cdot \Pi \quad \text{Relation 10}$$

et de façon similaire :

$$P(X = 1) = \frac{N_1}{1!} \cdot \Pi \quad \text{et} \quad P(X = 0) = \frac{N_0}{0!} \cdot \Pi$$

où :

$$N_1 = \sum_{i=1}^{\rho} (g_i) = s_1 \quad \text{et} \quad N_0 = 1$$

Notons que nous pouvons écrire :

$$N_1 = s_1 \cdot N_0 \quad \text{et} \quad N_2 = s_1 N_1 - s_2 N_0$$

3-2.4 Calcul de $P(X = 3)$

Dans ce cas, parmi les véhicules susceptibles de passer derrière le véhicule j , 3 véhicules seulement passent après ce véhicule j . D'autres véhicules ont pu connaître du retard mais sans que celui-ci les ait conduits à passer après le véhicule j . L'analyse de ce problème est effectuée dans le **tableau 7 de la page 15** (pour $\rho = 5$) dont la synthèse conduit à la probabilité :

$$P(X = 3) = \prod_{k=1}^{\rho} P(R < k) \cdot \sum_{k=1}^{\rho-2} \frac{P(R \geq k)}{P(R < k)} \cdot \sum_{i=k+1}^{\rho-1} \frac{P(R \geq i)}{P(R < i)} \cdot \sum_{j=i+1}^{\rho} \frac{P(R \geq j)}{P(R < j)} \quad \text{Relation 11}$$

ce qui donne (en modifiant les limites des deuxième et troisième sommes) :

$$P(X = 3) = \frac{1}{6} \cdot \prod_{k=1}^{\rho} P(R < k) \cdot \sum_{k=1}^{\rho} \frac{P(R \geq k)}{P(R < k)} \cdot \sum_{i \neq k} \frac{P(R \geq i)}{P(R < i)} \cdot \sum_{j \neq i \neq k} \frac{P(R \geq j)}{P(R < j)}$$

ce que nous pouvons écrire :

$$P(X = 3) = \frac{1}{3!} \cdot \Pi \cdot \sum_{k=1}^{\rho} (g_k \cdot \sum_{i \neq k} g_i (\sum_{j \neq i \neq k} g_j)) = \frac{1}{3!} \cdot \Pi \cdot \sum_{k=1}^{\rho} (g_k \cdot \sum_{i \neq k} g_i (s_1 - g_k - g_i))$$

d'où on déduit la relation :

$$P(X = 3) = \frac{1}{3!} \cdot \Pi \cdot \left[s_1 \cdot \left(\sum_{k=1}^{\rho} g_k \cdot \sum_{i \neq k} g_i \right) - \sum_{k=1}^{\rho} \sum_{i \neq k} g_k \cdot g_i \cdot (g_k + g_i) \right]$$

ce qui nous amène à :

$$P(X = 3) = \frac{1}{3!} \cdot \Pi \cdot \left[s_1 \cdot ((s_1)^2 - s_2) - 2 \sum_{k=1}^{\rho} \sum_{i \neq k} (g_k)^2 \cdot g_i \right]$$

Tableau 7 : analyse des pertes de rangs des ρ véhicules précédant le véhicule j dans le cas où $X = 3$ et $\rho = 5$

Véhicules passant derrière le véhicule j		Véhicule initialement en rang					Probabilité de l'événement composite correspondant	
		$j-1$	$j-2$	$j-3$	$j-4$	$j-5$		
Véhicule $j-2$	Véhicule $j-3$	$R \geq 1$	$R \geq 2$	$R \geq 3$	$R < 4$	$R < 5$	$P(R \geq 1).P(R \geq 2).P(R \geq 3).P(R < 4).P(R < 5)$	
	Véhicule $j-4$	$R \geq 1$	$R \geq 2$	$R < 3$	$R \geq 4$	$R < 5$	$P(R \geq 1).P(R \geq 2).P(R < 3).P(R \geq 4).P(R < 5)$	
	Véhicule $j-5$	$R \geq 1$	$R \geq 2$	$R < 3$	$R < 4$	$R \geq 5$	$P(R \geq 1).P(R \geq 2).P(R < 3).P(R < 4).P(R \geq 5)$	
	tous cas de figure						$P(R \geq 1)P(R \geq 2) \sum_{j=3}^5 P(R \geq j) \prod_{\substack{k=3 \\ k \neq j}}^5 P(R < k) =$ $P(R \geq 1)P(R \geq 2) \sum_{j=3}^5 P(R \geq j) \prod_{k=1}^5 \frac{P(R < k)}{P(R < 1)P(R < 2)P(R < j)}$ $= \frac{P(R \geq 1)P(R \geq 2)}{P(R < 1)P(R < 2)} \left\{ \sum_{j=3}^5 \frac{P(R \geq j)}{P(R < j)} \right\} \left\{ \prod_{k=1}^5 P(R < k) \right\}$	
	Véhicule $j-1$	Véhicule $j-4$	$R \geq 1$	$R < 2$	$R \geq 3$	$R \geq 4$	$R < 5$	$P(R \geq 1).P(R < 2).P(R \geq 3).P(R \geq 4).P(R < 5)$
		Véhicule $j-5$	$R \geq 1$	$R < 2$	$R \geq 3$	$R < 4$	$R \geq 5$	$P(R \geq 1).P(R < 2).P(R \geq 3).P(R < 4).P(R \geq 5)$
	tous cas de figure						$P(R \geq 1)P(R \geq 3) \sum_{j=4}^5 P(R \geq j)P(R < 2) \prod_{\substack{k=4 \\ k \neq j}}^5 P(R < k) =$ $P(R \geq 1)P(R \geq 3) \sum_{j=4}^5 P(R \geq j) \prod_{k=1}^5 \frac{P(R < k)}{P(R < 1)P(R < 3)P(R < j)}$ $= \frac{P(R \geq 1)P(R \geq 3)}{P(R < 1)P(R < 3)} \left\{ \sum_{j=4}^5 \frac{P(R \geq j)}{P(R < j)} \right\} \left\{ \prod_{k=1}^5 P(R < k) \right\}$	
	Véhicule $j-4$	Véhicule $j-3$	$R \geq 1$	$R < 2$	$R < 3$	$R \geq 4$	$R \geq 5$	$P(R \geq 1).P(R < 2).P(R < 3).P(R \geq 4).P(R \geq 5)$ $= \frac{P(R \geq 1)P(R \geq 4)}{P(R < 1)P(R < 4)} \left\{ \sum_{j=5}^5 \frac{P(R \geq j)}{P(R < j)} \right\} \left\{ \prod_{k=1}^5 P(R < k) \right\}$
	tous cas de figure						$\left\{ \prod_{k=1}^5 P(R < k) \right\} \frac{P(R \geq 1)}{P(R < 1)} \sum_{i=2}^4 \frac{P(R \geq i)}{P(R < i)} \left\{ \sum_{j=i+1}^5 \frac{P(R \geq j)}{P(R < j)} \right\}$	
	Véhicule $j-2$	Véhicule $j-3$	Véhicule $j-4$	$R < 1$	$R \geq 2$	$R \geq 3$	$R \geq 4$	$R < 5$
Véhicule $j-5$			$R < 1$	$R \geq 2$	$R \geq 3$	$R < 4$	$R \geq 5$	$P(R < 1).P(R \geq 2).P(R \geq 3).P(R < 4).P(R \geq 5)$
tous cas de figure						$P(R < 1)P(R \geq 2)P(R \geq 3) \sum_{j=4}^5 P(R \geq j) \prod_{\substack{k=4 \\ k \neq j}}^5 P(R < k) =$ $P(R \geq 2)P(R \geq 3) \sum_{j=4}^5 P(R \geq j) \prod_{k=1}^5 \frac{P(R < k)}{P(R < 2)P(R < 3)P(R < j)}$ $= \frac{P(R \geq 2)P(R \geq 3)}{P(R < 2)P(R < 3)} \left\{ \sum_{j=4}^5 \frac{P(R \geq j)}{P(R < j)} \right\} \left\{ \prod_{k=1}^5 P(R < k) \right\}$		
Véhicule $j-4$		Véhicule $j-3$	$R < 1$	$R \geq 2$	$R < 3$	$R \geq 4$	$R \geq 5$	$P(R < 1).P(R \geq 2).P(R < 3).P(R \geq 4).P(R \geq 5)$ $= \frac{P(R \geq 2)P(R \geq 4)}{P(R < 2)P(R < 4)} \left\{ \sum_{j=5}^5 \frac{P(R \geq j)}{P(R < j)} \right\} \left\{ \prod_{k=1}^5 P(R < k) \right\}$
tous cas de figure						$\left\{ \prod_{k=1}^5 P(R < k) \right\} \frac{P(R \geq 2)}{P(R < 2)} \sum_{i=3}^4 \frac{P(R \geq i)}{P(R < i)} \left\{ \sum_{j=i+1}^5 \frac{P(R \geq j)}{P(R < j)} \right\}$		
Véhicule $j-3$	Véhicule $j-4$	Véhicule $j-5$	$R < 1$	$R < 2$	$R \geq 3$	$R \geq 4$	$R \geq 5$	$P(R < 1).P(R < 2).P(R \geq 3).P(R \geq 4).P(R \geq 5)$ $= \frac{P(R \geq 3)P(R \geq 4)}{P(R < 3)P(R < 4)} \left\{ \sum_{j=5}^5 \frac{P(R \geq j)}{P(R < j)} \right\} \left\{ \prod_{k=1}^5 P(R < k) \right\}$
	tous cas de figure						$\left\{ \prod_{k=1}^5 P(R < k) \right\} \frac{P(R \geq 3)}{P(R < 3)} \sum_{i=4}^4 \frac{P(R \geq i)}{P(R < i)} \left\{ \sum_{j=i+1}^5 \frac{P(R \geq j)}{P(R < j)} \right\}$	

En posant $s_3 = \sum_{i=1}^{\rho} (g_i)^3$, et continuant à développer la relation précédente on obtient finalement la [relation 12](#) :

$$P(X = 3) = \frac{1}{3!} \cdot \Pi \cdot [(s_1)^3 - 3s_2s_2 + 2s_3] \quad \text{Relation 12}$$

Ce que nous pouvons écrire :

$$P(X = 3) = \frac{N_3}{3!} \cdot \Pi \quad \text{Relation 13}$$

$$\text{où: } N_3 = \sum_{k=1}^{\rho} g_k \left(\sum_{i \neq k} g_i \cdot \sum_{j \neq i \neq k} g_j \right) = (s_1)^3 - 3s_1s_2 + 2s_3.$$

Notons que nous pouvons écrire :

$$N_3 = s_1N_2 - 2s_2N_1 + 2s_3N_0 = s_1N_2 - 2!s_2N_1 + 2!s_3N_0$$

et de façon similaire :

$$N_2 = s_1N_1 - 1!s_2N_0$$

3-2.5 Formule générale de calcul de $P(X = x)$

Dans ce cas, parmi les véhicules susceptibles de passer derrière le véhicule j , x véhicules seulement passent après ce véhicule j . D'autres véhicules ont pu connaître du retard mais sans que celui-ci les ait conduits à passer après le véhicule j .

Par récurrence nous pouvons écrire :

$$P(X = x) = \frac{N_x}{x!} \cdot \Pi \quad \text{Relation 14}$$

où:

$$N_x = \sum_{k=1}^{\rho} g_k \left(\sum_{i \neq k} \left\{ g_i \cdot \sum_{j \neq i \neq k} g_j (\sum \dots) \right\} \right)$$

que nous pouvons, également par récurrence, écrire :

$$N_x = \sum_{t=1}^x (-1)^{t-1} \cdot \frac{(x-1)!}{(x-t)!} \cdot s_t \cdot N_{x-t}$$

3-3 Illustration

Pour illustration, on a calculé dans le [tableau 8 de la page 17](#), la distribution de probabilités de décyclage δ pour trois valeurs de p_0 (10%, 15% et 20%), pour $\rho = 10$ et deux mêmes jeux de distributions conditionnelles ([tableau 9 de la page 16](#)) pour chaque valeur de p_0 . Ces informations sont reprises dans la [figure 3](#).

4 Conclusion

Dans cet article nous avons démontré une relation analytique de base permettant d'analyser une classe de problèmes n'ayant encore jamais fait l'objet de publications scientifiques. Ce travail préliminaire permet tout d'abord de fonder l'éclairage économique des conséquences d'une diminution des perturbations sur ligne d'assemblage. Il sera prochainement complété par l'analyse de la distribution de probabilité du nombre de véhicules passant postérieurement (ou

Figure 3 : distribution de probabilités du décyclage d'un véhicule, pour $\rho = 10$ et différentes valeurs de probabilité de retouche

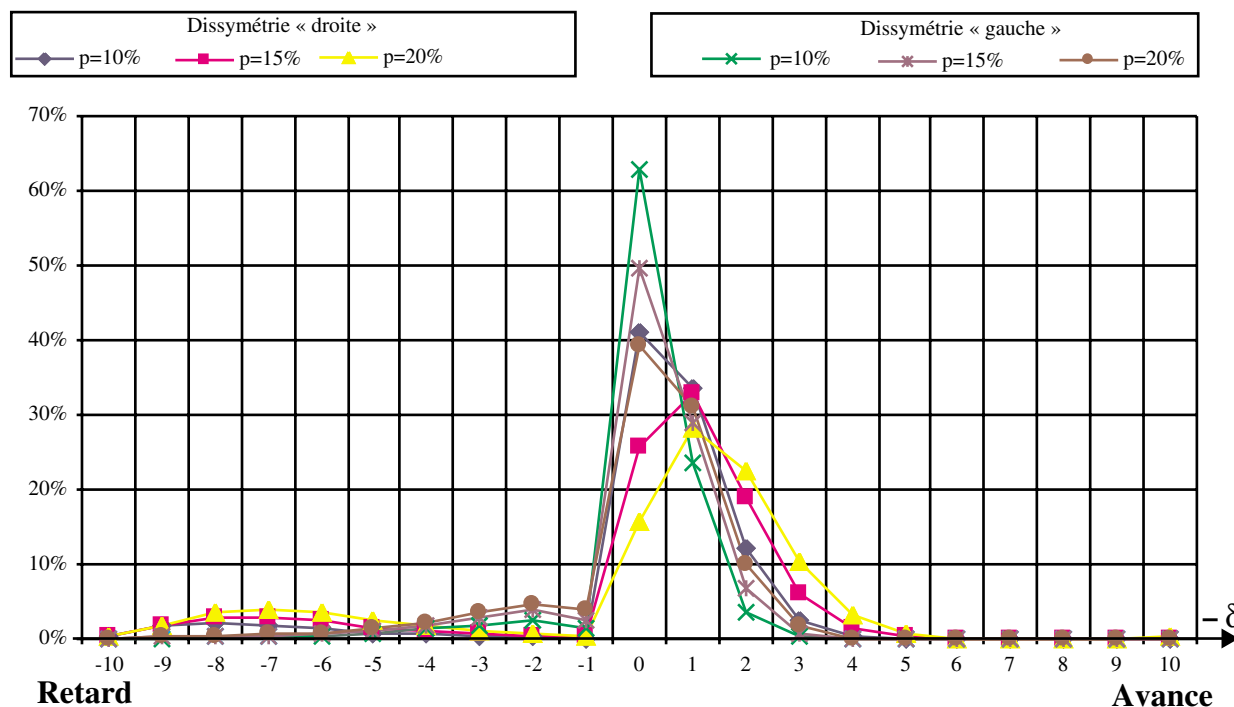


Tableau 8 : distribution de probabilités du décyclage d'un véhicule, pour $\rho = 10$ et différentes valeurs de probabilité de retouche

Probabilité de retouche $1 - p_0$		Dissymétrie « droite » de la distribution conditionnelle			Dissymétrie « gauche » de la distribution conditionnelle		
		10 %	15 %	20 %	10 %	15 %	20 %
Avance	-10	0,46%	0,45%	0,39%	0,07%	0,09%	0,09%
	-9	1,70%	1,89%	1,82%	0,17%	0,22%	0,26%
	-8	2,23%	3,01%	3,44%	0,27%	0,37%	0,46%
	-7	1,89%	2,98%	3,96%	0,37%	0,52%	0,66%
	-6	1,37%	2,34%	3,43%	0,47%	0,67%	0,86%
	-5	0,87%	1,58%	2,49%	0,84%	1,17%	1,44%
	-4	0,56%	1,02%	1,65%	1,26%	1,78%	2,23%
	-3	0,39%	0,68%	1,08%	1,94%	2,73%	3,41%
	-2	0,28%	0,48%	0,74%	2,65%	3,79%	4,81%
-1	0,18%	0,32%	0,51%	1,55%	2,61%	3,77%	
0	41,16%	25,65%	15,73%	62,99%	49,68%	39,18%	
Retard	1	33,74%	33,00%	28,13%	23,63%	28,84%	31,10%
	2	12,24%	18,83%	22,48%	3,53%	6,69%	9,95%
	3	2,58%	6,24%	10,44%	0,27%	0,79%	1,62%
	4	0,35%	1,33%	3,11%	0,01%	0,05%	0,15%
	5	0,03%	0,19%	0,62%	0,00%	0,00%	0,01%
	6	0,00%	0,02%	0,08%	0,00%	0,00%	0,00%
	7	0,00%	0,00%	0,01%	0,00%	0,00%	0,00%
	8	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%
	9	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%
	10	0,00%	0,02%	0,37%	0,00%	0,00%	0,00%

antérieurement) à une date de référence (fin de journée par exemple), ce qui permettra de fonder de manière plus objective des indicateurs d'efficacité dans le pilotage de lignes. Ce dernier travail constitue la première phase de l'analyse de stocks de sécurité à constituer pour la mise à

Tableau 9 : Distributions conditionnelles $P(R = r / R > 0)$ utilisées

Probabilité conditionnelle $P(R = r / R > 0)$	$r = 1$	$r = 2$	$r = 3$	$r = 4$	$r = 5$	$r = 6$	$r = 7$	$r = 8$	$r = 9$	$r = 10$
Dissymétrie « gauche »	10%	29%	22%	14%	10%	5%	4%	3%	2%	1%
Dissymétrie « droite »	1%	2%	3%	4%	5%	10%	14%	22%	29%	10%

disposition d'un composant non systématiquement monté dans un véhicule par un poste de travail, alimenté périodiquement à flux tendus.

5 Référence

- [1] R. G. **Askin** & M. **Zhou**, 1997, «A parallel station heuristic for the mixed-model production line balancing problem», *International Journal of Production Research*, vol. 35 ,n° 11, p. 3095-3105.
- [2] A. **Bolat**, M. **Savsar**, M **Al-Fawzan**, 1994, «Algorithms for real-time scheduling of jobs on mixed model assembly lines», *Computer Operations Research*, vol. 21, n° 5, p. 487-498
- [3] A. K. **Chakravarty** & A. **Shtub**, 1985, «Balancing mixed model lines with in process inventory», *Management Science*, vol. 31, n° 9, p. 1161-1174.
- [4] F. **Danjou**, V. **Giard** & E. **Le Roy**, 1999, *Analyse de la robustesse des ordonnancements/réordonnancements sur ligne de production et d'assemblage dans l'industrie automobile*, cahier de recherche 1999.05, IAE de Paris.
- [5] V. **Giard**, 1997, *Processus productifs et programmation linéaire*, Economica.
- [6] V. **Giard**, 1988, *Gestion de production*, Economica, 2° édition (3° édition fin 1999).
- [7] H. **Gokcen** & E. **Erel**, 1997, «A goal programming approach to mixed model assembly line balancing problem», *International Journal of Production Economics*, vol. 48, n° 2, p. 177-185.
- [8] R. R. **Inman** & R. L. **Bulfin**, 1991, «Sequencing JIT mixed-model assembly lines», *Management Science*, Vol. 37, n°7, p. 901-904.
- [9] Y. G. **Kim** & J.S. **Kwak**, 1993, «Mixed model assembly line balancing with the related task consideration», *Journal of the Korean OR-MS Society*, vol. 18, n° 2, p. 1-22.
- [10] W. **Kubiak** & S. **Sethi**, 1991, «A note on “Level Schedules for mixed-models assembly lines in just-in-time production system”», *Management Science*, vol. 37, p. 121-122.
- [11] P. R. **McMullen** & G. V. **Frazier**, 1997, «A heuristic for solving mixed model line balancing with stochastic durations», *International Journal of Production Economics*, vol. 51, n° 3, p. 177.190.
- [12] J. **Miltenburg**, 1989, «Level Schedules for mixed-models assembly lines in just-in-time production system», *Management Science*, vol. 35, p. 192-207.
- [13] J. **Miltenburg** & G **Sinnamon**, 1989, «Scheduling mixed-model multi-level just-in-time production system», *International Journal of Production Research*, vol. 27, n° 9, p. 1487-1509.
- [14] N.T. **Thomopoulos**, 1967, «Line balancing - sequencing for mixed model assembly», *Management Science*, vol. 14, n° B, p. 59-75.
- [15] N.T. **Thomopoulos**, 1970, «Mixed-model balancing with smoothed station assignments», *Management Science*, vol. 19, n° 9, p. 593-603.

- [16] C. A. **Yano** & A. **Bolat**, 1989, «Survey, development and application of algorithms for sequencing paced assembly lines», *Journal of Manufacturing and Operations Management*, vol 3, p. 172-198.

1999.08

**Analyse théorique des décyclages sur ligne de
production**

François Danjou¹, Vincent Giard², Fayez Boctor³

¹ Doctorant à l'IAE, ² Professeur à l'IAE,

³ Professeur à l'Université Laval (Canada), Professeur invité à l'IAE

Les papiers de recherche du GREGOR sont accessibles
sur INTERNET à l'adresse suivante :

<http://www.univ-paris1.fr/GREGOR/>

Secrétariat du GREGOR : Claudine DUCOURTIEUX (Ducourtieux.IAE@univ-paris1.fr)