

# Modélisation du problème général d'ordonnancement de véhicules sur une ligne de production et d'assemblage

(Version corrigée)

Vincent Giard<sup>1</sup> & Jully Jeunet<sup>2</sup>

## Résumé

Plusieurs formulations partielles du problème d'ordonnancement sur lignes de production ou d'assemblage dédiées à une production de masse fortement diversifiée – l'industrie automobile constituant l'exemple le plus cité – ont été proposées. Des hypothèses implicites limitent la portée de beaucoup d'entre elles. On proposera ici une formulation générale du problème d'ordonnancement s'appuyant sur des hypothèses réalistes de description du processus physique et prenant en compte l'incidence économique des décisions d'ordonnancement, notamment au niveau de l'appel momentané de renforts et de la prise en compte de l'incidence de rafales sur certains coûts de lancement (atelier de peinture, par exemple). Le modèle linéaire obtenu permet une description explicite et complète de ce problème complexe. La résolution de problèmes réels par la programmation mathématique est difficile en raison de la taille du problème. La description proposée facilite la mise au point d'heuristiques pertinentes.

**Mots clefs:** ligne de production et d'assemblage, ordonnancement sur ligne de produits hétérogènes, contraintes d'espacement, rafales, personnel de renfort, évaluation économique.

## Abstract

Several formulations to the mixed-model assembly line have been proposed in the literature. Such a problem is concerned with the production of a variety of product models. Vehicles fall into that category. The underlying assumptions of those models are often restrictive, therefore limiting their applicability. Our incentive is to develop a general formulation of the car sequencing problem that explicitly takes into account the constraints of the paint shop, those of the body shop and finally the constraints emanating from the assembly shop. The resultant linear program captures the whole complexity of the problem as it is encountered in practice. Solving real-sized instances to optimality would require too much computation time. The proposed description provides a starting point to the development of relevant heuristic solution approaches.

**Key Words:** mixed model assembly line, car sequencing, spacing or contiguity constraints, colour grouping constraints, additional workers, economic evaluation.

---

1. Lamsade, université Paris Dauphine, {giard@lamsade.dauphine.fr}.

2. CNRS, Lamsade, université Paris Dauphine, {jeunet@lamsade.dauphine.fr}.

## 1 Introduction

Au début du siècle dernier, les consommateurs étaient largement contraints dans leurs choix de véhicules par l'offre disponible, comme l'illustre la célèbre déclaration d'Henri Ford : le client peut tout choisir, même la couleur, à condition qu'elle soit noire. Les temps ont changé et l'espace de choix en matières d'options n'a désormais plus de limite. Ce problème est maintenant général, la tendance étant de produire en masse des produits personnalisés mais c'est dans l'industrie automobile que la complexité est maximale, ce qui explique que ce secteur soit pris à titre d'exemple. La diversité est obtenue par le montage de modules alternatifs (moteurs de différentes puissances, par exemple) et d'options demandées seulement par certains clients (toit ouvrant, par exemple). Se pose alors le problème du séquençage des véhicules sur la ligne, sachant que la variété conduit, sur certains postes, à des temps opératoires pouvant être supérieurs ou inférieurs au temps de cycle. On est alors confronté au problème qualifié d'*ordonnancement sur ligne de produits hétérogènes* qui cherche à éviter des phénomènes de désamorçage ou de saturation conduisant à des arrêts de la ligne.

À cet objectif de lissage de la charge de travail, s'ajoute celui du lissage de la consommation de composants non montés systématiquement, en particulier lorsque ceux-ci sont approvisionnés par kanban. La littérature consacrée au traitement de ces deux objectifs est abondante et certaines contributions considèrent conjointement les deux objectifs dans des modèles d'optimisation multicritères.

À ce stade, on doit se rappeler que les usines de production automobile se composent généralement de trois lignes successives sur lesquels les véhicules se succèdent normalement dans le même ordre : la tôlerie, peinture et assemblage. Chaque ligne possède ses propres contraintes. Sur la ligne de peinture, il est économiquement souhaitable d'obtenir un ordonnancement regroupant les véhicules par rafale de teinte, tandis que sur les lignes d'assemblage le respect des contraintes d'espacement permet l'équilibrage de la charge. Ces objectifs ne sont pas faciles à concilier et, dans la littérature, ces contraintes de regroupement des couleurs sont ignorées à quelques rares exceptions près (Giard, 1997, [6] et 2003, [7]). Cet article est sans doute l'un des premiers à considérer simultanément toutes les contraintes dans une formulation optimale du problème de séquençage.

La section 2 est consacré à une revue des modèles de la littérature relative au problème de l'ordonnancement de produits hétérogènes sur une ligne d'assemblage. Ces modèles sont groupés en trois catégories, en fonction de l'objectif de minimisation poursuivi. La section 3, page 239 propose une formulation générale du problème d'ordonnancement des véhicules, tel qu'il se rencontre en pratique. Au lieu de modéliser successivement les contraintes provenant des trois ateliers (tôlerie, assemblage et peinture) nous adoptons une différenciation des contraintes fondées sur l'élasticité ou non de la capacité des postes de travail d'où ces contraintes sont issues. Ainsi, les postes capacitaires sont ceux dont la capacité est résolument fixe. La majorité des postes de tôlerie en font partie. Les postes non-capitaires peuvent voir leur capacité s'accroître en accueillant des travailleurs supplémentaires ou renforts. Nous distinguons un troisième groupe de contraintes relatives à l'atelier de peinture. La section 3, page 239 conclut en rappelant les apports de la modélisation proposée pour la création de méthodes de résolution exacte et heuristique.

## 2 Revue de la littérature

Comme nous l'avons souligné en introduction, deux objectifs principaux sont poursuivis dans le problème de séquençement : lisser la charge de travail (§ 2.1), maintenir la consommation de pièces aussi constante que possible (§ 2.2, page 237). Dans les systèmes juste-à-temps, le deuxième objectif est primordial tandis que le premier est secondaire. Certains auteurs considèrent ces deux objectifs comme d'égale importance (§ 2.3, page 238).

### 2.1 Lissage de la charge

Jusque dans les années 1980, l'objectif principal dans la recherche d'un séquençement approprié était de lisser la charge de travail pour chaque poste de la ligne, de sorte à éviter les arrêts de production ou à minimiser les inefficiences qui se traduisent notamment par l'embauche de travailleurs intérimaires.

Plusieurs *modèles optimaux* ont été développés. Mitsumori (1969, [20]) élabore un modèle optimal pour minimiser le risque d'arrêt du convoyeur. Xiaobo et Ohno (1997, [27]) parviennent à minimiser le temps d'arrêt du convoyeur pour des petites instances.

*Approches heuristiques.* Thomopoulos (1967, [26]) cherche à minimiser plusieurs indicateurs de la perte d'efficacité des opérateurs sur la ligne comme par exemple la surcharge de travail. L'auteur propose une méthode de construction progressive de la séquence des véhicules, en choisissant à chaque itération le véhicule qui minimise les pénalités associées aux différentes pertes d'efficacité. Macaskill (1973, [15]) fournit une amélioration de cette méthode. Sumichrast et al. (1992, [24]) développent une heuristique reposant sur le même principe mais l'objectif est de minimiser à chaque itération la différence entre le temps (cumulé) idéal d'assemblage et le temps effectif (itérations passées). Xiaobo et Ohno (1997, [27]) mettent en oeuvre un algorithme de recuit simulé pour minimiser le temps d'arrêt du convoyeur. Smith et al. (1996, [23]) considèrent le problème de séquençement avec satisfaction des contraintes d'espacement. Les violations sont prises en compte dans la fonction-objectif par l'introduction de pénalités associées à tout couple de véhicules identiques violant la contrainte d'espacement. Les approches de type réseaux de neurones d'Hopfield sont adoptées. Gottlieb et al. (2003, [8]) décrivent plusieurs heuristiques gloutonnes de construction progressive de la séquence dont l'objectif est la minimisation du nombre de violations des contraintes d'espacement. Ils développent ensuite une méta-heuristique de type optimisation par colonies de fourmis.

### 2.2 Maintien à un niveau constant de la consommation de pièces

Cet objectif est celui initialement poursuivi par Toyota dans un environnement de juste-à-temps. Rendre la consommation de pièces aussi régulière que possible permet la minimisation du nombre de cartes kanban et donc des stocks de pièces. Plus les consommations de la même pièce sont espacées, plus on dispose de temps pour la renouveler et moins on a besoin de stock.

Il existe deux façons d'atteindre cet objectif. La première consiste à synchroniser la production de chaque modèle avec sa demande (*Product Rate Variation*). La seconde revient à minimiser la distance entre la consommation effective de chaque composant et son taux idéal d'utilisation. Miltenburg (1989, [17]) montre que lisser la production des modèles revient à lisser la consommation des composants, lorsque les produits finis utilisent tous le même ensemble de composants, ce que nous appellerons dans la suite l'hypothèse d'équivalence.

### 2-2.1 Lissage de la production des modèles

**Solution optimale.** Sans l'hypothèse d'équivalence, Kubiak et Sethi (1991, [12]) montrent que le problème peut être formulé comme un problème d'assignation et résolu à l'aide d'algorithmes ad hoc. Plus récemment, Bautista (2000, [2]) ont établi qu'une solution optimale au problème consiste en la répétition d'une sous-séquence optimale sous certaines conditions sur la fonction-objectif. Avec l'hypothèse d'équivalence, Miltenburg et al. (1990, [19]) fournissent une formulation du problème par la programmation dynamique.

**Heuristiques.** Elles reposent toutes sur l'hypothèse d'équivalence. Miltenburg (1989, [17]) développe plusieurs heuristiques dont l'objectif est de minimiser la distance entre la production effective et idéale des différents modèles de véhicules. Ding et Cheng (1993, [5]) en proposent une procédure simplifiée. Korkmaz et Meral (2001, [11]) modifient la procédure de Ding et Cheng (1993, [5]) de sorte à considérer davantage de véhicules-candidats dans un éventail plus large de priorités.

### 2-2.2 Lissage de la consommation des composants

**Solution optimale.** Bautista et al. (1996, [1]) montrent que le problème est équivalent à la recherche d'un chemin minimum dans un graphe et emploient un algorithme de résolution ad-hoc.

**Heuristiques.** Parmi elles se trouve l'heuristique de Monden, connue sous le nom de Goal Chasing Method (1983 ou 1998). Il s'agit d'une heuristique de construction progressive de la séquence, qui sélectionne à chaque itération le modèle permettant de minimiser la distance entre consommation effective et idéale des composants. Leu et al. (1996, [14]) développent un algorithme génétique pour minimiser la variabilité de la consommation de pièces. Bautista et al. (1996, [1]) produisent une version moins myope de l'algorithme de Monden.

## 2.3 Optimisation conjointe des deux objectifs précédents

**Solution optimale.** Korkmaz et Meral (2001, [11]) traitent le problème de séquençement bi-critère et proposent sa transcription en un problème d'assignation

**Heuristiques.** Tamura et al. (1999, [25]) considèrent le problème bi-critère consistant à lisser le taux d'utilisation des composants et la charge de travail à chaque station d'une ligne comportant une ligne principale ainsi qu'une sous-ligne ou brin supplémentaire. La méthode Goal Chasing est adaptée à ce cas de ligne comportant une sous-ligne, un algorithme de recherche tabou est mis en oeuvre et une approche par la programmation dynamique est développée pour l'obtention de solutions optimales. Choi et Shin (1997, [4])

présentent une simple règle de décision pour sélectionner à chaque étape le véhicule qui minimise pour chaque option l'écart entre l'espacement courant et la limite spécifiée de cet espacement. refléter une utilisation constante de la consommation des composants.

### 2-3.1 Objectif additionnel de minimisation des coûts de lancement

Dans l'atelier de peinture, l'objectif est de minimiser les purges des pistolets et donc les changements de teintes. Il s'agit alors de constituer des rafales de véhicules d'une même couleur. Ces rafales sont toutefois limitées par la nécessité de purger les pistolets qui s'encrassent au bout d'un certain nombre de véhicules. Ces contraintes de regroupement se rencontrent également dans l'atelier ferrage pour diminuer le coût de changement des outillages. Les contraintes de rafales et de lissage sont difficiles à respecter simultanément car elles sont concurrentes.

Les contributions qui considèrent ces trois objectifs sont rares. Hyun et *al.* (1998, [9]) conçoivent un algorithme génétique multi-objectif et considèrent trois objectifs d'égale importance: minimiser le volume de main d'oeuvre intérimaire; minimiser le coût de lancement; maintenir constant le taux d'utilisation des pièces. Le coût de lancement recouvre ici le coût de changement d'outillages mais il pourrait également comprendre le coût des purges puisqu'il s'agit plus généralement de coûts fixes dont l'ampleur dépend de la séquence des véhicules.

Récemment, Mansouri (2005, [16]) a développé un algorithme génétique multi-objectif qui traite le lissage de la charge et la minimisation des coûts de lancement.

La modélisation que nous proposons constitue à notre connaissance le premier programme d'optimisation qui traite à la fois les contraintes d'espacement et celles de groupage.

## 3 Formulation du problème d'ordonnancement

### 3.1 Ensemble à ordonnancer

Soit un ensemble de  $N$  véhicules à ordonnancer. On note  $x_{ij}$  une variable binaire valant 1 si le véhicule  $i$  ( $i = 1, \dots, N$ ) a le rang  $j$ .

Un seul des véhicules  $i$  peut avoir le rang  $j$ , ce que traduit la relation 1 ( $N$  contraintes):

$$\sum_{i=1}^N x_{ij} = 1, \text{ pour } j = 1, \dots, N \quad \text{relation 1}$$

Le véhicule  $i$  se voit attribuer nécessairement un seul des rangs  $j$ , ce que traduit la relation 2 ( $N$  contraintes):

$$\sum_{j=1}^N x_{ij} = 1, \text{ pour } i = 1, \dots, N \quad \text{relation 2}$$

## 3.2 Contraintes relatives à la variabilité de la charge de travail sur certains postes

La production de masse de produits personnalisés conduit à une différenciation obtenue par un ensemble d'options (toit ouvrant...) pouvant être choisies ou non par le client et l'usage de jeux de modules assurant une même fonction souvent avec des performances techniques et économiques différentes (moteurs...) mais pas toujours (volant à gauche ou à droite, en fonction du client), un véhicule retenant nécessairement un module pour chacun des jeux. Cette personnalisation conduit à une variation de la charge de travail sur certains postes. L'origine de cette variation pouvant être liée à une option ou un module, on parlera de *critère* (mais les exemples choisis seront liés aux options). Celle-ci est prise en compte lors de la conception de la ligne sur la base de caractéristiques prévisionnelles moyennes (20 % de toits ouvrants, par exemple) et conduit à affecter à ce type de poste une zone plus longue sur le convoyeur ou à prévoir un stock-tampon en aval du poste si celui-ci est fixe. Ces dispositions permettent de synchroniser les postes de la ligne en garantissant que les arrivées s'effectueront bien dans chaque poste de travail à la cadence définie pour la ligne. Il faut alors que l'ordonnancement respecte certaines contraintes que nous allons examiner, faute de quoi le processus sera perturbé par des mécanismes de saturation bloquant progressivement les postes de travail en amont (propagation-amont).

L'analyse du problème conduit à distinguer deux cas de figure. Certains de ces postes affectés par cette variabilité de travail impliquent le respect strict de ces contraintes, généralement en raison de la capacité d'équipements (robots de soudure...); on parle alors de *postes capacitaires* (qui se trouvent principalement en tôlerie). D'autres postes permettent de s'affranchir de cette contrainte à condition de renforcer le personnel affecté à ce poste, l'outillage utilisé pouvant sans problème s'adapter à cette variation du nombre d'opérateurs; on parle alors de *postes non capacitaires*. On commencera par analyser le cas des postes capacitaires (§ 3-2.1). L'analyse des postes non capacitaires en découle immédiatement et conduit à une transformation de contraintes et une modification de la fonction-objectif qui doit prendre en considération le coût additionnel induit par l'éventuelle mobilisation d'opérateurs supplémentaires en raison de l'ordonnancement retenu (§ 3-2.2, page 246).

### 3-2.1 Prise en compte des contraintes des postes capacitaires

#### 3.2.1.1 Formulation initiale

On note  $k$  l'un des postes capacitaires de la ligne (sous-ensemble  $K_1$  de l'ensemble des postes de la ligne). La durée du travail requis par le véhicule  $i$  sur le poste de travail  $k$  est notée  $\theta_{ik}$  et le temps de cycle est noté  $\theta$ , l'arrivée des véhicules sur ce poste étant cadencée par ce temps de cycle.

On note  $h$ , le rang du véhicule positionné sur le poste de travail  $k$  (avec  $h = 1, \dots, N$ ),  
le temps de travail à exécuter sur ce véhicule de rang  $h$  est 
$$\sum_{i=1}^N \theta_{ik} x_{ih}.$$

L'écart entre cette durée et le temps de cycle  $\sum_{i=1}^N \theta_{ik} x_{ih} - \bar{\theta}$  correspond à un dépassement s'il est positif et, dans le cas contraire, à une éventuelle possibilité de rattrapage d'une surcharge de travail antérieure.

On note  $R_{kh}$  l'excédent de charge de travail à résorber après traitement du véhicule de rang  $h$  ( $R_{k0} = 0$ ). Ce report est limité par une quantité de travail  $R_k^{max}$ , liée au déplacement maximum du véhicule sur le convoyeur ou à la taille des stocks-tampons situés en amont et aval du poste de travail  $k$  si le véhicule est traité par un poste fixe<sup>1</sup>. Le fait que ce report maximal  $R_k^{max}$  soit fixe est lié à l'hypothèse implicite qu'aucune compensation sur les temps opératoires n'est considérée comme possible avec les postes adjacents<sup>2</sup>.

Ce report  $R_{kh}$ , qui ne peut être négatif, intègre la charge de travail non résorbée après traitement du véhicule de rang  $h - 1$ . Une fois traité le véhicule de rang  $h$ , cet excédent

$$\text{est: } R_{kh} = \text{Max} \left\{ 0, \text{Min} \left[ R_{k, h-1} + \sum_{i=1}^N \theta_{ik} x_{ih} - \bar{\theta}, R_k^{max} \right] \right\}. \text{ Cette contrainte, utilisée}$$

de manière récurrente à partir du premier véhicule ordonnancé sur le poste de travail  $k$ , traduit simplement le fait que la charge cumulée de travail exécuté ne peut dépasser la capacité cumulée de production en tenant compte des contraintes de report maximal. Sa transcription dans une formulation linéaire du problème se fait sans difficulté par l'intermédiaire des relations 3, en utilisant la variable intermédiaire  $W_{kh}$ .

$$W_{kh} \leq R_k^{max}; W_{kh} \leq R_{k, h-1} + \sum_{i=1}^N \theta_{ik} x_{ih}; R_{kh} \geq 0; R_{kh} \geq W_{kh} \text{ pour } h = 1, \dots, N \text{ et } k \in K_1 \quad \text{relations 3}$$

Cette formulation comporte  $4 \cdot N$  contraintes pour chaque poste  $k \in K_1$ , ce qui fait que l'on a intérêt à traiter des problèmes d'ordonnancement où la taille  $N$  de l'ensemble de véhicules à ordonnancer et le nombre  $K_1$  de postes critiques ne sont pas trop conséquents. Si plusieurs postes ont des contraintes «voisines», il suffit alors de ne s'intéresser qu'au plus pénalisant, les autres contraintes étant alors satisfaites. Ce nombre élevé de contraintes pour un poste critique s'explique par la très grande variété postulée de temps opératoires sur ce poste laquelle oblige à vérifier que le temps opératoire de chacun des véhicules ne compromet pas un éventuel rattrapage de retards imputables à un ou plusieurs véhicules de rang inférieur.

---

1. Le stock-amont permet d'attendre la libération du poste fixe et donc d'éviter la saturation. Dans le cas d'un poste embarqué sur convoyeur, ce stock est inutile, l'opérateur se déplaçant. Le stock-aval permet au poste aval de respecter la cadence du cycle et donc évite le désamorçage. Le dimensionnement de ces stocks correspond à l'arrondi supérieur du quotient de l'excédent maximal de travail à résorber (voir ci-après) par le temps de cycle.  
 2. Dans ce cas, on peut se ramener au cas général en travaillant sur un poste fictif réunissant les postes concernés.

### 3.2.1.2 Formulation alternative par les contraintes d'espace

Le nombre de contraintes peut diminuer très fortement si le nombre de temps opératoires se limite à 2 que l'on notera  $T_k^{max}$  (présence du critère A, toit ouvrant, par exemple) et  $T_k^{min}$  (absence du critère A, noté  $\bar{A}$ ).

Supposons que le premier véhicule ordonnancé ( $h = 1$ ) possède le critère A  
 $N$   
 $(\theta_{ik} = \sum_{i=1}^N \theta_{ik} x_{i1} = T_k^{max})$ . Lors de la conception de la ligne on a défini le report

maximal  $R_k^{max}$  comme devant être supérieur ou égal au report  $R_{k,1} = T_k^{max} - \bar{\theta}$  enregistré après avoir ordonnancé ce premier véhicule.

Le véhicule ordonnancé suivant ne peut posséder le critère A que si le temps résiduel  $R_k^{max} - R_{k,1} = R_k^{max} - (T_k^{max} - \bar{\theta})$  est supérieur à l'accroissement de report  $(T_k^{max} - \bar{\theta})$ . Le nombre maximal  $v_k$  de véhicules consécutifs «consommant» ce report maximal  $R_k^{max}$  est donc l'entier inférieur du quotient  $R_k^{max} / (T_k^{max} - \bar{\theta})$ . À la conception de la chaîne, on a intérêt donc à définir  $R_k^{max}$  comme un multiple de  $(T_k^{max} - \bar{\theta})$ , ce que nous supposons par la suite sans perte de généralité. Si les  $v_k$  premiers véhicules possèdent le critère A, le véhicule suivant, de rang  $h = v_k + 1$ , ne peut pas posséder ce critère sans violer la contrainte du report maximum. Ce véhicule de rang  $v_k + 1$  permet de diminuer le retard cumulé  $R_{k,v_k} = R_k^{max}$  après le placement du véhicule de rang  $v_k$ , d'un temps égal à  $(\bar{\theta} - T_k^{min})$ . Sauf si l'excédent de travail  $(T_k^{max} - \bar{\theta})$  du temps opératoire d'un véhicule avec option par rapport au temps de cycle est inférieur au temps inutilisé  $(\bar{\theta} - T_k^{min})$  par un véhicule sans option, il faudra plusieurs véhicules sans option avant de pouvoir replacer un véhicule avec option. Ce nombre de véhicules  $\mu_k$  est égal à la partie entière supérieure du quotient  $(T_k^{max} - \bar{\theta}) / (\bar{\theta} - T_k^{min})$ . Il s'ensuit que  $v_k$  véhicules consécutifs ayant le critère A sont nécessairement suivis de  $\mu_k$  véhicules n'ayant pas ce critère. Mais, sur les  $v_k + \mu_k$  premiers véhicules consécutifs, les  $v_k$  véhicules ayant le critère A peuvent ne pas être consécutifs parce qu'il est évident qu'une telle situation conduit nécessairement le report  $R_{k,v_k+\mu_k}$  du véhicule de rang  $v_k + \mu_k$  à être inférieur à  $R_k^{max}$ . Dès lors, si la condition «**au plus  $v_k$  véhicules avec critère sur  $v_k + \mu_k$  véhicules consécutifs**» est respectée, les contraintes des relations 3 sont respectées, avec  $T_k^{max} - \bar{\theta} \leq R_k^{max} \leq 2(T_k^{max} - \bar{\theta})$ .

Cette démonstration permet de remplacer, pour chaque poste  $k \in K_1$ , les  $4 \cdot N$  contraintes des relations 3 par les  $[N - (v_k + \mu_k) + 1]$  contraintes des relations 4, qualifiées de **contraintes d'espace**. Celles-ci jouent sur des fenêtres glissantes de temps (ou de séquences de véhicules, ce qui revient au même) bornées supérieurement par  $h$  et inférieurement par  $h - (v_k + \mu_k) + 1$ . Le temps de traitement du véhicule  $h$  sur le poste  $k$

N  
 $\sum_{i=1}^N \theta_{ik} x_{ih}$  est égal à  $T_k^{min}$  ou à  $T_k^{max}$  mais, dans la transformation de la formulation, on ne s'intéresse plus qu'au fait que les véhicules séquencés possèdent ou non le critère A. Cette information est donnée par  $\delta_{ik}$  qui vaut 1 si le véhicule  $i$  possède le critère A et 0, dans le cas contraire. Le nombre de véhicules possédant le critère A sur la fenêtre glissante de  $(v_k + \mu_k)$  véhicules est  $\sum_{j=\{h-(v_k+\mu_k)+1\}}^h \sum_{i=1}^N \delta_{ik} \cdot x_{ij}$ . Comme on l'a vu, ce nombre doit être inférieur à  $v_k$ , ce qui conduit aux relations 4:

$$\sum_{j=\{h-(v_k+\mu_k)+1\}}^h \sum_{i=1}^N \delta_{ik} \cdot x_{ij} \leq v_k, \text{ pour } h = v_k + \mu_k, \dots, N \text{ et } k \in K_1 \text{ avec}$$

$$\mu_k = (T_k^{max} - \bar{\theta}) / (\bar{\theta} - T_k^{min}) \text{ et } v_k = R_k^{max} / (T_k^{max} - \bar{\theta}) \quad \text{relations 4}$$

Ces contraintes d'espace, utilisées depuis un certain temps dans l'industrie automobile, ont été introduites dans la littérature depuis quelques années (Smith et al., [23], 1996, Giard, [6], 1997; Choi et al., [4], 1997). Leurs justifications et limites par l'analyse fine du processus de production n'ont jamais été apportées à notre connaissance.

### 3.2.1.3 Remarques

Six remarques peuvent être faites.

- **Lissage.** Si un seul poste est concerné par cette variabilité, on se retrouve implicitement dans le cas d'un problème de lissage, si la contrainte d'espace se rapproche de  $1/N$ . Dans le cas contraire, sauf si les modèles sont définis à partir de critères exclusifs mettant en jeu des postes capacitaires (ou non capacitaires) différents, les formulations ne sont pas équivalentes.
- **Contraintes  $1 / (v + \mu)$ .** Dans la pratique, ces relations 4 se retrouvent le plus souvent avec  $v_k = 1$ ; les contraintes d'ordonnancement sont alors du type «  $1 / (v + \mu)$  »: « pas plus d'un toit ouvrant sur 5 véhicules consécutifs » ( $\mu_k = 4$ ).
- **Simplification possible du problème général.** Si la variété des temps opératoires sur le poste  $k$  est supérieure à deux, il est possible de se ramener à ce cas en retenant comme temps opératoire de chaque critère  $f$  de l'ensemble  $F_k$  des critères affectant la durée de travail de ce poste  $k$ :  $T_k^{max} = \text{Max}_f \{ \theta_{fk} \}$  et,

$$T_k^{min} = \text{Max}_{\{f \in F_k \mid \theta_{fk} < \bar{\theta}\}} \{ \theta_{fk} \}, \text{ dans le cas contraire. Cette simplification permet}$$

de limiter la taille du problème (usage des relations 4 au lieu des relations 3) mais elle contraint le problème d'ordonnancement plus que nécessaire.

- **Ségrégation de flux sur deux brins ligne.** Ce type de contrainte peut être utilisé pour gérer la ségrégation des flux lorsqu'une ligne se partage momentanément en deux pour permettre de traiter une quantité de travail plus importante sur un brin que sur l'autre, la ségrégation s'appuyant sur un critère mobilisant des processus techniques différents. Par exemple, en imposant que sur 3 véhicules consécutifs on ait un seul véhicule au plus ayant le critère A, on permet de dériver les véhicules ayant cette caractéristique A vers le brin de ligne  $\alpha$  et les autres véhicules vers le brin de ligne  $\bar{\alpha}$ , les deux flux fusionnant ensuite au niveau du poste sur lequel les deux brins convergent, en respectant l'ordre initial. Cette synchronisation implique que la cadence d'entrée sur chacun des postes de travail de l'un des brins soit celle de la ligne (par exemple le brin  $\bar{\alpha}$  comportant  $\kappa_{\bar{\alpha}}$  postes). Sur l'autre brin ( $\alpha$ ), le nombre de postes peut être plus faible ( $\kappa_{\alpha} < \kappa_{\bar{\alpha}}$ ), pour une charge de travail identique ( $\bar{\theta} \cdot \kappa_{\bar{\alpha}}$ ), ce qui permet d'avoir un temps de cycle plus élevé ( $\theta_{\alpha} \leq \theta \cdot (\kappa_{\bar{\alpha}} / \kappa_{\alpha})$ ) en conservant la synchronisation des flux<sup>1</sup>. Le non-respect de cette contrainte provoque nécessairement un arrêt de la ligne par saturation, le véhicule ayant le critère A et violant la contrainte étant obligé d'attendre la libération du premier poste du brin de ligne  $\alpha$  si celui-ci doit exécuter un travail d'une durée égale.
- **Limitation des séquences de véhicules ayant le même critère.** Ces formulations de contrainte d'espacement peuvent être utilisées pour éviter que l'ordonnement ne conduise à des séries trop longues de véhicules présentant un même critère; dans ce cas, ce n'est pas la variabilité des temps opératoires qui justifie la contrainte d'espacement mais des raisons techniques (sur-chauffe...). Par exemple, en imposant que sur 10 véhicules consécutifs on ait un seul véhicule au plus ayant le critère A (critère fictif destiné à limiter la séquence), on limite à 9 la plus longue séquence de véhicules n'ayant pas ce critère.
- **Contraintes sur critères croisés.** Cette formulation de contrainte d'espacement peut être adaptée pour forcer un véhicule possédant le critère B à être suivi d'au moins  $\mu_{BA}$  véhicules ne possédant pas ce critère B avant de trouver un véhicule possédant le critère A, ces deux critères étant exclusifs<sup>2</sup>. On parle alors de contraintes sur **critères croisés**, ces contraintes étant utilisées depuis des années dans l'industrie automobile. Elles sont utilisées notamment lorsque le changement de critère amène l'opérateur du poste à changer d'outillage normalement en temps masqué, ce qui n'est possible que si un nombre suffisant de véhicules sépare le véhicule possédant le critère A, du véhicule possédant le critère B. En général on a

---

1. Exemple:  $\theta_{\bar{\alpha}} = \theta = 1$ ,  $\kappa_{\bar{\alpha}} = 8$ ,  $\kappa_{\alpha} = 2 \Rightarrow \theta_{\alpha} \leq 4$ . Le temps de cycle du brin  $\alpha$  peut donc être 300 % supérieur à celui du brin  $\bar{\alpha}$  (et donc du reste de la ligne). En réalité, c'est le temps de cycle  $\theta_{\alpha}$  du brin  $\alpha$  qui conditionne l'espacement, le nombre minimal de véhicules de critère A devant s'intercaler dans l'ordonnement entre deux véhicules de critère A étant l'arrondi supérieur du rapport  $(\theta_{\alpha} - \theta_{\bar{\alpha}}) / \theta_{\bar{\alpha}}$  ( $= (\theta_{\alpha} - \theta) / \theta$ ), sachant que ce temps de cycle  $\theta_{\alpha}$  et le nombre de postes  $\kappa_{\alpha}$  et  $\kappa_{\bar{\alpha}}$  concernés par cette scission du flux  $\alpha$  doivent conduire à une même charge de travail sur chacun des brins et à effectuer des opérations similaires sur les postes suivants.

2. Exemple: «un véhicule présentant le critère B ne peut suivre un véhicule possédant le critère A qu'à condition que 3 véhicules ne possédant pas le critère B les séparent»). Les séquences B -  $\bar{B}$  -  $\bar{B}$  -  $\bar{B}$  - A et B -  $\bar{B}$  -  $\bar{B}$  -  $\bar{B}$  - A sont autorisées mais la séquence B -  $\bar{B}$  -  $\bar{B}$  - A est interdite

$\mu_{BA} = 1$ . Si la contrainte est symétrique<sup>1</sup>, il faut poser une seconde contrainte. Examinons comment adapter les contraintes des relations 4. Le véhicule de rang  $h$  possède le l'option A si  $\sum_{i=1}^N \delta_{iA} \cdot x_{ih} = 1$ , avec  $\delta_{iA} = 1$  si le véhicule  $i$  possède l'option A et  $\delta_{iA} = 0$ , dans le cas contraire. On s'intéresse au nombre de véhicules possédant le critère B sur la fenêtre  $\{h - \mu_{BA}, \dots, h - 1\}$ . Ce nombre est donné par

$\sum_{l=h-\mu_{BA}}^{h-1} \sum_{i=1}^N \delta_{iB} \cdot x_{il}$ . L'interdiction recherchée est alors obtenue par la satisfaction des relations 5

$$\sum_{l=h-\mu_{BA}}^{h-1} \sum_{i=1}^N \delta_{iB} \cdot x_{il} < \left( 1 - \sum_{i=1}^N \delta_{iA} \cdot x_{ih} \right) \mu_{BA} \text{ pour } h - \mu_{BA} + 1, \dots, N \text{ relations 5}$$

En effet, si le véhicule de rang  $h$  possède le critère A, alors  $1 - \sum_{i=1}^N \delta_{iA} \cdot x_{ih} = 0$ ,

ce qui implique  $\sum_{l=h-\mu_{BA}}^{h-1} \sum_{i=1}^N \delta_{iB} \cdot x_{il} = 0$  : les  $\mu_{BA}$  précédents ne possèdent pas

le critère B. Dans le cas contraire, c'est-à-dire  $1 - \sum_{i=1}^N \delta_{iA} \cdot x_{ih} = 1$  (le véhicule de rang  $h$  ne possède pas le critère A), les relations 5 autorisent les  $\mu_{BA}$  véhicules précédents à éventuellement tous posséder l'option B.

- **Prise en compte de l'ordonnancement glissant.** Le processus de production sur une ligne est continu: le soir on arrête le travail sur la ligne, pour reprendre le lendemain matin le travail là où il s'était arrêté. Pour apprécier l'impact de l'ordonnancement glissant, il faut expliciter de manière plus précise ce qui se passe dans le temps et dans l'espace, d'autant plus que cette mise au point sera indispensable pour l'analyse des renforts (§ 3.2.2.2, page 250). Jusqu'ici, seul le rang d'arrivée d'un véhicule sur le poste  $k$  a été pris en considération, le passage du rang au numéro de période de traitement du véhicule s'effectuant immédiatement en raison de la constance du temps de cycle. Ce repérage temporel est «local», le traitement de ce véhicule pouvant se faire le jour du lancement ou le lendemain. En effet, l'ordonnancement décidé pour une journée (période arbitraire utilisée ici pour fixer

1. Pour reprendre le même exemple: «un véhicule présentant le critère A ne peut suivre un véhicule possédant le critère B qu'à condition que 3 véhicules ne possédant pas le critère A les séparent».

les idées) ne produit ses effets qu'en partie au cours de la journée. Supposons que la ligne se caractérise par un temps de cycle d'une minute ( $\bar{\theta} = 1$ ), qu'elle comporte  $K = 200$  postes ( $\Rightarrow$  charge de travail de 200 minutes) et que le temps quotidien d'ouverture de la ligne soit de  $T = 700$  minutes, ce qui conduit à un ordonnancement quotidien de 700 véhicules sur la ligne. En début de journée, au lancement du premier véhicule (première décision mise en œuvre pour le nouvel ordonnancement), les  $K = 200$  postes de travail de la ligne sont occupés, le premier par le premier véhicule ordonnancé et les  $K - 1 = 199$  postes suivants par les  $K - 1$  derniers véhicules ordonnancés la veille; les  $K - 1$  derniers véhicules de l'ordonnancement du jour seront donc traités en partie ce jour et en partie le lendemain<sup>1</sup>. L'ordonnancement des  $N$  véhicules pour la nouvelle journée doit nécessairement tenir compte des décisions prises la veille pour respecter correctement les contraintes d'espacement pour chaque critère et les contraintes croisés. Il s'ensuit que pour les contraintes définies par les relations 4 et 5 sont à adapter pour les premiers véhicules à placer. Par exemple, les relations 4 étaient définies pour  $h = v_k + \mu_k, \dots, N$ . En pratique, elles sont définies pour  $h = 1, \dots, N$  mais les  $v_k + \mu_k$  premières contraintes sont liées aux décisions de la veille, lesquelles conduisent à avoir déjà en amont du poste  $k$  une séquence de véhicules lancés la veille<sup>2</sup>.

### 3-2.2 Prise en compte des contraintes des postes non capacitaires

Comme on l'a indiqué, les postes non capacitaires ( $k \in K_2$ ) sont soumis aux mêmes contraintes que les postes capacitaires à la différence près que ces contraintes peuvent être violées parce qu'il est possible d'accroître momentanément la capacité du poste de travail pour faire face à la surcharge de travail. Le personnel utilisé en renfort est amené à se déplacer en fonction de la localisation dans le temps et dans l'espace de ces pointes d'activité et des limites de polyvalence qui le caractérise. Il prend alors en charge un nouveau

1. Le dernier véhicule des 700 véhicules ordonnancés le jour  $J$  passe sur le premier poste de la ligne en fin de cette journée  $J$  et passera sur les 199 postes restants au cours de la journée  $J + 1$ . Le véhicule ayant le rang 501 est le dernier des véhicules ordonnancés le jour  $J$  et à être traité en totalité à la fin du jour  $J$ .

2. Supposons par exemple que  $v_k = 1$ ,  $\mu_k = 3$  et que sur les trois derniers véhicules ordonnancés, seul celui du milieu possède le critère A. Dans ces conditions, on a:

- pour  $h = 1$ :  $0 + 1 + 0 + \sum_{i=1}^N \delta_{iA} \cdot x_{i1} < 1 \Rightarrow \delta_{iA} \cdot x_{i1} = 0 \Rightarrow$  interdiction de commencer l'ordonnancement par un véhicule possédant le critère A.

- pour  $h = 2$ :  $1 + 0 + \sum_{j=1}^2 \sum_{i=1}^N \delta_{iA} \cdot x_{ij} < 1 \Rightarrow \delta_{iA} \cdot x_{i2} = 0 \Rightarrow$  le deuxième véhicule ne peut également pas posséder le critère A.

- pour  $h = 3$ :  $0 + \sum_{j=1}^3 \sum_{i=1}^N \delta_{iA} \cdot x_{ij} < 1 \Rightarrow$  le troisième véhicule peut ou non posséder le critère A.

- pour  $h > 3$  on repart sur la relation générale:  $\left( \sum_{j=h-3}^h \sum_{i=1}^N \delta_{iA} \cdot x_{ij} < 1 \right)$ .

véhicule pendant que le titulaire du poste achève le travail en cours sur le véhicule précédent.

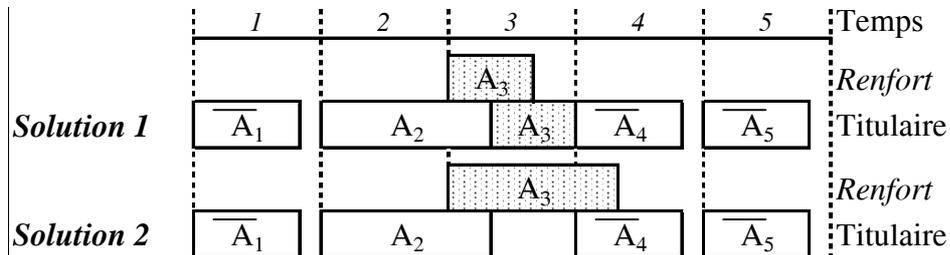
Ces violations ont donc un coût imputable à la fois aux caractéristiques de l'ensemble à ordonnancer mais aussi de la qualité de l'ordonnancement. Il est alors nécessaire d'introduire une fonction économique d'évaluation permettant de qualifier les ordonnancements possibles. Le problème passe alors de la définition d'un ordonnancement admissible, à celui d'un ordonnancement admissible minimisant une fonction de coût. L'introduction d'une fonction-objectif dans la formalisation du problème se fait à ce stade de la formalisation générale du problème. Elle sera complétée ensuite avec la prise en compte de l'incidence de l'ordonnancement sur d'autres coûts (§ 3.3, page 253). On commencera par décrire la transformation des contraintes (§ 3.2.2.1) avant de déterminer le nombre de renforts découlant de l'ordonnancement (§ 3.2.2.2, page 250) et d'en tirer les conséquences sur la fonction économique (§ 3.2.2.3, page 252).

### 3.2.2.1 Adaptation des contraintes d'espace

Le raisonnement qui a conduit aux relations 4 implique que si les  $v_k$  premiers véhicules possèdent le critère A et que le véhicule de rang  $v_k + 1$  possède également ce critère, le retard maximal  $R_k^{max}$  que ce poste peut absorber est dépassé, l'excédent de charge étant  $T_k^{max} - \bar{\theta}$ . A priori, ce dépassement peut être pris en charge par un opérateur en renfort, le titulaire du poste étant occupé par ailleurs, jusqu'au moment où l'excédent est résorbé, ce qui se produit au bout de  $(T_k^{max} - \bar{\theta}) / (\bar{\theta} - T_k^{min})$  cycles, après quoi le titulaire du poste peut éventuellement prendre la relève du renfort pour achever le travail que celui-ci avait commencé. Pour bien comprendre ce qui se passe physiquement et expliquer les alternatives organisationnelles que l'on a, un exemple est nécessaire.

- Supposons que  $T_k^{max} = 80$ ,  $T_k^{min} = 50$ ,  $\bar{\theta} = 60$  et  $R_k^{max} = 20$ . Il s'ensuit que  $v_k = 1$  et  $\mu_k = 2$ . La surcharge de travail (20) occasionnée par un véhicule ayant le critère A est absorbée par la sous-charge de travail (10) des deux premiers véhicules suivants ne possédant pas le critère A.
- À partir du moment où la charge de travail excédentaire retombe à 20, le véhicule suivant peut à nouveau posséder le critère A, la contrainte «pas plus de un véhicule possédant le critère A dans une séquence de 3 véhicules» étant respectée, à condition que les deux véhicules suivants ne possèdent pas ce critère.
- Avec la séquence  $\bar{A} - A - A - \bar{A} - \bar{A}$ , l'évolution de la charge de travail excédentaire à la fin des 5 premiers cycles est  $\{0, 20; 40; 30; 20\}$ , ce qui nécessite la présence d'un renfort au cours de la période 3 avant de retrouver le report maximal

admissible. Le Gantt des ressources permet de visualiser deux solutions physiquement possibles.



La première solution conduit à un partage du travail à effectuer sur le troisième véhicule et à l'évolution suivante de la charge de travail excédentaire:  $\{0; 20; 0; 0; 0\}$ . À la fin de la troisième période, tout se passe comme si, pour le choix des véhicules suivants, on recommençait l'ordonnement sans que les véhicules précédents (2 et 3) possèdent le critère A.

La seconde solution est sans doute plus réaliste car le partage du travail entre deux opérateurs n'est pas sans problème, en particulier lorsque le temps de cycle est court. De surcroît, elle desserre les contraintes d'ordonnement comme nous allons le voir. Avec cette solution, l'évolution de la charge de travail excédentaire reste  $\{0; 20; 0; 0; 0\}$  et à la fin de la troisième période, tout se passe toujours comme si, pour le choix des véhicules suivants, on recommençait l'ordonnement sans que les véhicules précédents (2 et 3) possèdent le critère A.

À partir de ces observations, il est possible d'adapter les contraintes des relations 4. L'hypothèse organisationnelle que l'on retiendra est celle correspondant à la seconde solution parce qu'elle semble la plus réaliste (sinon, il faut adapter les relations 3). On introduit alors la variable  $z_{hk}$  qui vaut 1 si, sur le poste  $k$  non capacitaire, on ordonnance en rang  $h$  un véhicule possédant le critère A et violant la contrainte du report cumulé maximal. L'impact de cette variable sur la fonction-objectif la conduit à prendre la valeur 0, sauf en cas de violation de contrainte. La variable  $z_{hk}$  traduit l'intervention ou non d'un renfort sur le véhicule de rang  $h$ .

On retiendra pour commencer le cas ( $R_k^{max} \leq \bar{\theta}$ ), qui conduit à une remise à zéro de l'excédent de charge de travail  $R_{kh}$  à résorber après traitement du véhicule de rang  $h$  lorsque celui-ci implique la présence d'un renfort. Ceci se traduit, dans la formulation des relations 4, par une remise à zéro du nombre de véhicules ayant le critère A, sur la fenêtre glissante de  $(v_k + \mu_k)$  véhicules de rang inférieur ou égal à  $h$ . Ce nombre pouvant être remis à zéro, il faut introduire la variable  $m_{kh}$  correspondant à ce cumul glissant, ce qui conduit aux relations 6.

$$m_{kh} = m_{k, h-1} + \sum_{i=1}^N \delta_{ik} \cdot x_{ih} - \gamma_{k, h-(v_k + \mu_k)} - z_{kh} \cdot (v_k + 1) \leq v_k, \text{ pour } h = 1, \dots, N \text{ et}$$

$$k \in \mathbf{K}_2 \quad \text{relations 6}$$

où  $\gamma_{k, h-(v_k + \mu_k)}$  prend la valeur 1 si le véhicule de rang  $h - (v_k + \mu_k)$  possède l'option et si aucun renfort n'est intervenu sur les véhicules de rang  $\{h - (v_k + \mu_k), \dots, h - 1\}$ . La variable  $\gamma_{k, h-(v_k + \mu_k)}$  répond à la définition:

$$\gamma_{k, h-(v_k + \mu_k)} = \left[ \sum_{i=1}^N \delta_{ik} \cdot x_{i, h-(v_k + \mu_k)} \right] \cdot \prod_{l=h-(v_k + \mu_k)}^{h-1} (1 - z_{kl}) \quad (\text{relations 6 -$$

suite)

Cette expression de  $\gamma_{k, h-(v_k + \mu_k)}$  est quadratique, linéarisée par les 5 relations suivantes:

$$\gamma_{k, h-(v_k + \mu_k)} \leq \sum_{i=1}^N \delta_{ik} \cdot x_{i, h-(v_k + \mu_k)}$$

$$\gamma_{k, h-(v_k + \mu_k)} \geq 1 - \varepsilon_{k, h-(v_k + \mu_k)}, \text{ avec } \varepsilon_{k, h-(v_k + \mu_k)} \in \{0, 1\}$$

$$\gamma_{k, h-(v_k + \mu_k)} \geq \sum_{i=1}^N \delta_{ik} \cdot x_{i, h-(v_k + \mu_k)} - \varepsilon_{k, h-(v_k + \mu_k)}$$

$$\prod_{l=h-(v_k + \mu_k)}^{h-1} z_{kl} \leq (v_k + 1) \varepsilon_{k, h-(v_k + \mu_k)}$$

$$\prod_{l=h-(v_k + \mu_k)}^{h-1} z_{kl} \geq \varepsilon_{k, h-(v_k + \mu_k)} \quad (\text{relations 6 - fin})$$

Dans le premier membre de cette relation, la variable  $z_{hk}$  correspond à un dépassement de capacité par mobilisation de renfort si elle est amenée à prendre la valeur 1.

$$\begin{aligned}
 - \quad v_{hk} + z_{hk} &= v_{(h-1)k} \cdot (1 - z_{(h-1)k}) \\
 &+ \sum_{i=1}^N \delta_{ik} \cdot x_{ih} - \left( \sum_{i=1}^N \delta_{iA} \cdot x_{i(h-v_k+\mu_k+1)} - s_{hk} \right) \\
 \text{avec } s_{hk} &= \left( \sum_{i=1}^N \delta_{ik} \cdot x_{i(h-v_k+\mu_k+1)} \right)_{j=h-(v_k+\mu_k)+1}^{h-1} \sum_{j=h-(v_k+\mu_k)+1}^{h-1} v_{jk} \\
 \text{et } s_{hk} &\leq 1 \text{ pour } h > (v_k + \mu_k) + 1 \text{ et } k \in \mathbf{K}_2 \text{ (relations 6 - fin)}
 \end{aligned}$$

Avant d'examiner l'impact économique de l'usage des renforts il convient d'abord de pouvoir les décompter et donc de pouvoir déterminer l'évolution de la charge temporelle des véhicules, ce qui oblige à passer d'une logique locale d'analyse d'un poste, à une logique globale d'analyse simultanée de l'ensemble des postes et implique d'utiliser un même repérage temporel.

### 3.2.2.2 Détermination du nombre de renforts

L'analyse du problème de l'ordonnancement glissant (page 245) a permis d'introduire la relation entre le rang  $h$  ( $h = 1, \dots, N$ ) d'un véhicule, le poste  $k$  ( $k = 1, \dots, K$ ) sur lequel il se trouve et la date absolue  $t$  ( $t = 1, \dots, T$ ). La demande de renfort pour une journée donnée dépend donc de la position des postes non capacitaires. Le véhicule de rang  $h$  dans l'ordonnancement du jour  $J$  arrive sur le poste  $k$  au début de la période  $t = k + h - 1$  au cours de la journée  $J$  si  $k + h - 1 \leq T$  et le jour  $J + 1$ , dans le cas contraire. Par exemple, pour  $K = 200$ ,  $T = N = 700$ , une décision d'ordonnancement du véhicule  $h = 600$ , sur le poste  $k = 150$  (poste supposé non capacitaire) sera exécutée au cours de la période  $t = 150 + 600 - 1 = 749$ , c'est-à-dire au cours de la 49e minute du jour  $J + 1$ . Si cette décision implique un renfort, celui-ci n'interviendra que le lendemain de la prise de décision. Certains renforts mobilisés au cours d'une journée auront donc été décidés la veille, tandis que d'autres décidés aujourd'hui ne seront mis en place que le lendemain.

L'opérateur travaillant en renfort est nécessairement amené à partager son temps entre plusieurs postes non capacitaires (dans la pratique, rarement plus d'une demi-douzaine). Ce qui complique l'analyse économique de la décision, c'est que les renforts mobilisés pour une journée sont requis à la suite de décisions prises la veille et d'autres, de décisions prises le jour même<sup>1</sup>. Cet aspect du problème est incontournable car il découle de l'ordonnancement glissant, consistant à générer périodiquement un ordonnancement d'un nouvel ensemble de véhicules, sans attendre que soit complètement traité l'ensemble des véhicules précédemment ordonnancé. Dans l'analyse économique des renforts, trois positions, au moins, peuvent être adoptées :

---

1. Pour reprendre notre exemple, en  $J + 1$ , on a un renfort sur le poste  $k = 150$ , à partir de la période 49, Ce même renfort peut être appelé pour travailler sur le poste non capacitaire  $k' = 100$ , à partir de la période 115, ce qui résulte de l'ordonnancement décidé pour  $J + 1$ .

- On peut vouloir évaluer l'incidence économique exacte des renforts effectivement mobilisés au cours d'une journée. Cette option conduit à considérer comme des données les conséquences des décisions de renfort prises la veille et exécutées au cours de la journée. Dans cette optique, les décisions de renfort qui ne seront exécutées que le lendemain, ne sont pas prises en compte dans l'évaluation économique.
- L'inconvénient de l'option précédente est de ne pas soumettre à une évaluation économique toutes les décisions prises le jour J et d'inciter à un report de décisions de renfort vers la fin de l'ordonnancement, là où l'appel à ces renforts n'est pas pénalisé. Ce choix fait donc courir le risque de dégrader l'évaluation de l'ordonnancement du lendemain au profit de celui du jour. C'est pourquoi on peut préférer une formulation hybride dans laquelle l'évaluation économique ajoute au coût des renforts effectivement supportés pour le jour pour lequel l'ordonnancement est établi, la partie du coût des renforts du lendemain résultant de cet ordonnancement. Cet «effet de bord» est d'autant moins marqué que le nombre N de véhicules à ordonnancer est fort par rapport au nombre total K de postes.
- Une troisième option est envisageable. Elle consiste à considérer que ce problème est trop compliqué pour être pris en compte dans une formulation globale, d'autant qu'il faut tenir compte dans le calcul des renforts, de leurs déplacements d'un poste à un autre. Dans ces conditions, la minimisation du nombre d'appels de renforts va dans le sens d'une meilleure efficacité économique.

Si aucune de ces positions n'est entièrement satisfaisante, le choix de l'une d'entre elles est nécessaire pour introduire un point de vue économique permettant d'évaluer des alternatives décisionnelles à travers la fonction-objectif. La seconde de ces positions est préférable à l'évidence à la première. Son choix par rapport à la troisième se justifie par le fait que la fonction-objectif devra ultérieurement inclure d'autres éléments de coût, des arbitrages économiques pouvant être à faire entre des purges dans l'atelier de peinture et des renforts. La seconde solution évite l'arbitraire dans la définition des coefficients de la fonction-économique et donne un ordre de grandeur des enjeux économiques liés à l'ordonnancement.

On a vu au § 3.2.1.2, page 242, que le véhicule de rang  $h$  dans l'ordonnancement du jour J arrive sur le poste  $k$  au début de la période  $t = k + h - 1$  au cours de la journée J si  $k + h - 1 \leq T$  et le jour J + 1, dans le cas contraire. Au début de la période  $t$ , on traite donc sur le poste  $k$  le véhicule de rang  $t - k + 1$ . Compte tenu des hypothèses organisationnelles retenues (solution 2 du Gantt), ce renfort est présent sur un nombre de cycles correspondant à la partie entière supérieure de  $T_k^{max}/\bar{\theta}$ , que l'on notera  $\beta_k$ . Ce renfort introduit en  $t$  sur le poste  $k$  non capacitaine ( $k \in \mathbb{K}_2$ ) est donc présent sur ce poste des périodes  $t$  à  $t + \beta_k - 1$ . Ce temps de présence sur le poste  $k$  empêche le renfort d'être affecté à un autre poste. Rappelons, par ailleurs, que l'on limite à 1 le nombre de renfort par poste et par période. Il est raisonnable de supposer que la journée est partagée en deux équipes travaillant chacune pendant  $N/2$  périodes et que tout travail de renfort commencé la veille est achevé la veille.

On note  $W_1(J)$  le nombre de renforts physiquement présents le matin du jour  $J$ . Ces renforts résultent de décisions prises en  $J-1$  et en  $J$ . C'est ce nombre que l'on doit prendre en compte si l'on souhaite calculer le décaissement lors de la première demi-journée.

Soit  $W_2(J)$  le nombre de renforts physiquement présents lors de la seconde demi-journée du jour  $J$ . Ces renforts proviennent des décisions d'ordonnancement du jour  $J$ . Ils sont donc à la fois décidés et payés le jour  $J$ . Il y a ici une correspondance exacte entre la logique d'engagement et celle de décaissement.

On désigne enfin par  $W_3(J)$  le nombre de renforts décidés en  $J$  qui ne seront physiquement présents qu'en  $J+1$ . Ces renforts interviennent sur des véhicules séquencés en  $J$  mais traités en  $J+1$  lors des  $K-1$  premières périodes de  $J+1$ .

Le coût d'un renfort pour la demi-journée est fixé à  $w$ . Dans une logique de décaissement en  $J$  on chercherait à minimiser  $w \cdot [W_1(J) + W_2(J)]$ . Mais dans la logique d'engagement que nous avons retenue, on souhaite minimiser le terme

$$w \cdot [W_1(J) - W_3(J-1) + W_2(J) + W_3(J)] \quad \text{relation 7}$$

où la différence  $W_1(J) - W_3(J-1)$  représente les renforts qui sont à la fois décidés en  $J$  et présent lors de la matinée du jour  $J$ ; c'est donc l'accroissement du nombre de renforts décidés en  $J$  par rapport à ceux qui ont été décidés en  $J-1$  pour cette matinée.

Les variables  $W_1(J)$ ,  $W_2(J)$  et  $W_3(J)$  prendront les valeurs les plus basses possibles en raison de la minimisation de la fonction-objectif. Le nombre de ces renforts se détermine par le respect des contraintes :

$$\begin{aligned} \sum_{k \in K_{2s = t - \beta_k + 1}}^t z_{ks} &\leq W_1(J), \text{ pour } t = 1, \dots, N/2 \\ \sum_{k \in K_{2s = t - \beta_k + 1}}^t z_{ks} &\leq W_2(J), \text{ pour } t = N/2 + 1, \dots, N \\ \sum_{k \in K_{2s = t - \beta_k + 1}}^t z_{ks} &\leq W_3(J), \text{ pour } t = N + 1, \dots, N + K - 1 \end{aligned} \quad \text{relations 8}$$

On notera que, dans la fonction-objectif que nous allons introduire, les temps de transport d'un poste non capacitaire à un autre ne sont pas pris en compte. Celle-ci est formellement possible avec une matrice de temps de transport d'un poste non capacitaire à un autre mais elle complique la formulation en obligeant à assigner les opérateurs en renfort aux différents renforts (formulation dérivée de formulations classiques).

### 3.2.2.3 Introduction de la fonction économique

La fonction-objectif correspond au coût des renforts. Pour un coût unitaire de renfort  $w$ , la fonction-objectif est

$$\text{Min}\{w \cdot [W_1(J) - W_3(J-1) + W_2(J) + W_3(J)]\} \quad \text{relation 9}$$

### 3.3 Prise en compte des lots de peinture

Les véhicules passent tous par un atelier de peinture. Le changement de couleur dans l'atelier implique une purge des tuyaux et des pistolets, ce qui a un coût  $c$ . Le coût d'une purge peut être ou non dépendant de la couleur précédente. Il semblerait que dans l'industrie automobile, l'hypothèse d'indépendance soit suffisante. Par ailleurs, des contraintes techniques d'encrassement conduisent la taille d'une séquence de véhicules ayant la même couleur (on parle encore de rafale de teinte) à ne pas dépasser un seuil  $P$ . On se restreindra ici à un seul poste de peinture mais la généralisation est immédiate et peut concerner d'autres postes pour lesquels un changement fréquent d'outillages ou de réglages génère des coûts que l'on désire limiter.

Notons  $u_h$  la variable dichotomique valant 1 si le véhicule de rang  $h$  a une teinte différente de celle du véhicule précédent ( $h-1$ ). Dans ces conditions, la fonction-objectif de la relation 10 doit inclure le coût des purges et devient :

$$\text{Min} \left\{ w \cdot [W_1(J) - W_3(J-1) + W_2(J) + W_3(J)] + c \sum_{h=2}^N u_h \right\} \quad \text{relation 10}$$

Il faut forcer la variable  $u_h$  à prendre la valeur 1 lorsqu'il y a changement de réglages sur le poste  $k$ . Notons  $\pi_i$  le numéro de teinte utilisé par le véhicule  $i$  (avec  $\pi_i < M$ ). Le

numéro de teinte prise par le véhicule de rang  $h$  dans l'ordonnancement est  $\sum_{i=1}^N \pi_i \cdot x_{ih}$ .

Le changement de réglage entre le véhicule  $h-1$  et le véhicule  $h$  arrive lorsque la différence  $\sum_{i=1}^N \pi_i \cdot x_{ih} - \sum_{i=1}^N \pi_i \cdot x_{i,h-1}$  n'est pas nulle. Pour forcer  $u_h$  à prendre la valeur 1

en cas de changement, il faut introduire la contrainte suivante :

$$-Mu_h \leq \sum_{i=1}^N \pi_i \cdot x_{ih} - \sum_{i=1}^N \pi_i \cdot x_{i,h-1} \leq Mu_h, \text{ pour } h = 1, \dots, N \quad \text{relation 11}$$

qui conduit à l'effet recherché parce que la fonction-objectif tend à rendre nuls le plus possible de  $u_h$  et que les  $u_h$  de la relation 11 ne peuvent être nuls que si numéro de réglage du poste  $s$  ne change pas et que dans les autres cas (second terme strictement positif ou négatif),  $u_h$  est nécessairement égal à 1.

Il convient enfin d'ajouter la contrainte glissante relative au nombre maximal de purges qui est donnée par la relation 12.

$$\sum_{h=j-P+1}^j u_h \geq 1 \text{ pour } j = 1, \dots, N \quad \text{relation 12}$$

## 4 Conclusion

L'abondance de la littérature relative au problème d'ordonnancement de produits hétérogènes sur ligne d'assemblage témoigne de l'intérêt que suscite un tel problème dans un contexte de production d'une diversité sans cesse renouvelée. Un examen plus minutieux de cette littérature en révèle néanmoins les faiblesses qui prennent leur source dans les hypothèses qui sous-tendent ces modélisations et en limitent substantiellement le champ d'application. Le lancement en production implique l'usage de méthodes de séquençement prenant en compte la totalité des points de vue, qu'ils émanent de la tôlerie, de la peinture ou de l'assemblage. La modélisation proposée dans cet article représente à cet égard une avancée pour la compréhension et la résolution de cette classe de problèmes. Elle nous semble constituer un point de départ important pour la construction de méthodes heuristiques, la résolution exacte semblant compromise pour le traitement de problèmes de taille réelle en raison de l'importance des temps de calcul qu'une telle résolution exigerait. L'élaboration d'une approche heuristique est actuellement en cours et produit des résultats prometteurs sur des instances de grande taille.

## 5 Bibliographie

- [1] Bautista, J., Companys, R., Corominas, A., «Heuristics and exact algorithms for solving the Monden problem», *European Journal of Operational Research*, 1996, 101-113.
- [2] Bautista, J., Companys, R., Corominas, A., «Note on cyclic sequences in the product rate variation problem», *European Journal of Operational Research*, 2000, 468-477.
- [3] Burns, L. D., & Daganzo, C. F., «Assembly line job sequencing principles», *International Journal of Production Research*, 1987, p. 71-99.
- [4] Choi, W., Shin, H., «A real-time sequence control system for the level production of the automobile assembly line», *Computers and Industrial Engineering*, 1997, 769-772.
- [5] Ding, F.-Y., Cheng, L., «A effective mixed-model assembly line sequencing for Just-In-Time production systems», *Journal of Operations Management*, 1993, 45-50.
- [6] Giard, V., *Processus productifs et programmation linéaire*, Economica, 1997.
- [7] Giard, V., *Gestion de la production et des flux*, 3e éd., Economica, 2003.
- [8] Gottlieb, J., Puchta, M., Solnon, C., «A study of greedy, local search and ant colony optimization approaches for car sequencing problems, in Applications of Evolutionary Computing», *Lecture Notes in Computer Science*, Springer, 2003, 246-257.

- [9] Hyun, C. J., Kim, Y., Kim, Y. K., «A genetic algorithm for multiple objective sequencing problems in mixed model assembly line», *Computers and Operations Research*, 1998, 675-690.
- [10] Kim, Y. K., Hyun, C. J., Kim, Y., «Sequencing in mixed model assembly lines: a genetic algorithm approach», *Computers and Operations Research*, 1996, 1131-1145.
- [11] Korkmazel, T., Meral, S., «Bicriteria sequencing methods for the mixed-model assembly line in just-in-time production systems», *European Journal of Operational Research*, 2001, 188-207.
- [12] Kubiak, W., Sethi, S., «A note on level schedules for mixed-model assembly lines in just-in-time production systems», *Management Science*, 1991, 121-122.
- [13] Kubiak, W., Sethi, S., «Optimal just-in-time schedules for flexible transfer lines», *Journal of Flexible Manufacturing Systems*, 1994, 137-154.
- [14] Leu, Y., Matheson, L. A., Rees, L. P., «Sequencing mixed model assembly lines with genetic algorithms», *Computers and Industrial Engineering*, 1996, 1027-1036.
- [15] Macaskill, J. L., «Computer simulation for mixed production lines», *Management Sciences*, 1973, 341-348.
- [16] Mansouri, A., «A multi-objective genetic algorithm for mixed sequencing on JIT assembly lines», *European Journal of Production Research*, 2005, 676-716.
- [17] Miltenburg, J., «Level schedule for mixed-model assembly lines in just-in-time production systems», *Management Science*, 1989, 192-207.
- [18] Miltenburg, J., Sinnamon, G., «Scheduling mixed-model multi-level just-in-time production systems», *International Journal of Production Research*, 1989, 1487-1509.
- [19] Miltenburg, J., Steiner, G., Yeomans, S., «Dynamic programming algorithm for scheduling mixed-model just-in-time production systems», *Mathematical and Computer Modelling*, 1990, 57-66.
- [20] Mitsumori, S., «Optimal schedule control of conveyor line», *IEEE Trans. Auto. Control*, 1969, 633-639
- [21] Monden, Y., *Toyota Production System: An Integrated Approach to Just-In-Time*, 3e éd., Engineering & Management Press, 1998.
- [22] Murata, T., Ishibuchi, H., Tanaka, H., «Multi-objective algorithm and its application to flow shop scheduling», *Computers and Industrial Engineering*, 1996, 957-968.
- [23] Smith, K., Palaniswami, M., Krishnamoorthy, N., «Traditional heuristic versus Hopfield neural network approaches to a car sequencing problem», *European Journal of Operational Research*, 1996, 300-316.
- [24] Sumichrast, R. T., Russell, R. S., Taylor, B. W., «A comparative analysis of sequencing procedures for mixed-model assembly lines in a just-in-time production system», *International Journal of Production Research*, 1992, 199-214.

- [25] Tamura, T., Long, H., Ohno, K., «A sequencing problem to level part usage rates and work loads for a mixed-model assembly line with a bypass subline», *International Journal of Production Economics*, 1999, 557-564.
- [26] Thomopoulos, N. T., «Line balancing-sequencing for mixed model assembly», *Management Science*, 1967, 59-75.
- [27] Xiaobo, Z., Ohno, K., «Algorithms for sequencing mixed models on an assembly line in a JIT production system», *Computers and Industrial Engineering*, 1997, 47-56.