Détermination du stock de sécurité d’une référence dans un maillon d’une chaîne logistique – amont par Vincent Giard

Sommaire

La chaîne logistique - amont est composée de l'ensemble des maillons contribuant à la fabrication d'un produit fini, allant jusqu'au maillon effectuant la dernière transformation de ce produit fini. Dans l'industrie automobile, ce dernier maillon correspond à la chaîne d'assemblage des véhicules. On se placera dans un contexte de politique d'approvisionnement calendaire, c'est-à-dire caractérisée par des décisions périodiques d'approvisionnement prises à intervalle régulier. Dans ce contexte, si la production globale quotidienne est régulière, la demande à couvrir pour un composant demandé par le maillon final est nécessairement aléatoire si le composant est optionnel ou alternatif ; si le composant est systématiquement monté et que le délai d'approvisionnement est aléatoire, la demande à couvrir est elle aussi aléatoire. Dans les deux cas, le risque de rupture doit être contré par un stock de sécurité. On tiendra compte, en temps utile de l'incidence des problèmes de qualité sur le stock de sécurité à détenir

On commencera par apporter quelques précisions sur les caractéristiques aléatoires de la demande d'un composant, dans le contexte étudié. Cette connaissance de la distribution de probabilités de la demande conditionne en effet l'application de démarches scientifiques de gestion des approvisionnements. On verra ensuite dans la section II quels sont les déterminants des stocks de sécurité à partir d'un modèle de base ce qui permettra de remettre en cause certaines pratiques courantes dans l'industrie. Dans une section III, on examinera et illustrera les politiques de recomplètement périodiques dans le cas de composants approvisionnés ou de composants produits, ces politiques reposant sur une connaissance en probabilités de la structure de la demande finale et des demandes certaines parvenues, avec ou sans prise en compte de problème de lotissement et de qualité. Dans une section IV on discutera du problème du régime de croisière et de l'évolution de la structure de la demande. La dernière section fournit le code VBA d'une fonction permettant de traiter facilement sous Excel les problèmes numériques posés ici.

I. Remarques sur le caractère aléatoire de la demande d'un composant dans la chaîne logistique amont

Alors que la production quotidienne d'une ligne d'assemblage est constante, la demande quotidienne d'un composant alternatif ou optionnel est aléatoire. On peut illustrer ce caractère aléatoire de la demande en nous appuyant sur l'exemple suivant des 6 références de moteur susceptibles d'être montés sur un poste d'assemblage-véhicules qui traite 962 véhicules par jour. Chaque véhicule a une probabilité p_i de se voir affecter le moteur i au montage, selon le tableau de probabilités ci-dessous. Cette structure de probabilité est supposée stable (ou à évolution lente[1]).

Référence i	Pourcentage de la demande p_i
Moteur 1	54,46 %
Moteur 2	13,29 %
Moteur 3	3,58 %
Moteur 4	21,51 %
Moteur 5	5,13 %
Moteur 6	2,03 %

Tableau 1. Répartition de la demande des moteurs

Les deux figures suivantes illustrent la convergence de la distribution Binomiale vers la distribution Normale pour deux valeurs extrêmes de probabilité (moteur 1 et moteur 6) justifiant une possibilité d'approximation de la distribution Binomiale par la distribution Normale[2] (bénéficiant d'algorithmes

[1] Ce point sera abordé à la section IV.

[2] Plusieurs règles empiriques ont été proposées. L'une des plus robustes (voir Giard, *Statistique appliquée à la Gestion*, 8e édition, p.153) établit que si les paramètres de la variable aléatoire X suivant la loi Binomiale $X \sim \mathcal{B}(\mathrm{n}, \mathrm{p})$ sont tels que n>5 et $\left|\sqrt{p/(1-p)} - \sqrt{(1-p)/p}\right| / \sqrt{n} < 0{,}3$, alors la loi Binomiale peut être approximée par la loi Normale $\mathcal{N}(\mathrm{n}p, \sqrt{\mathrm{n}p(1-p)})$.

de calcul très performant). Cela étant, le calcul direct des différentes probabilités d'une loi Binomiale ne pose pas de problème[3].

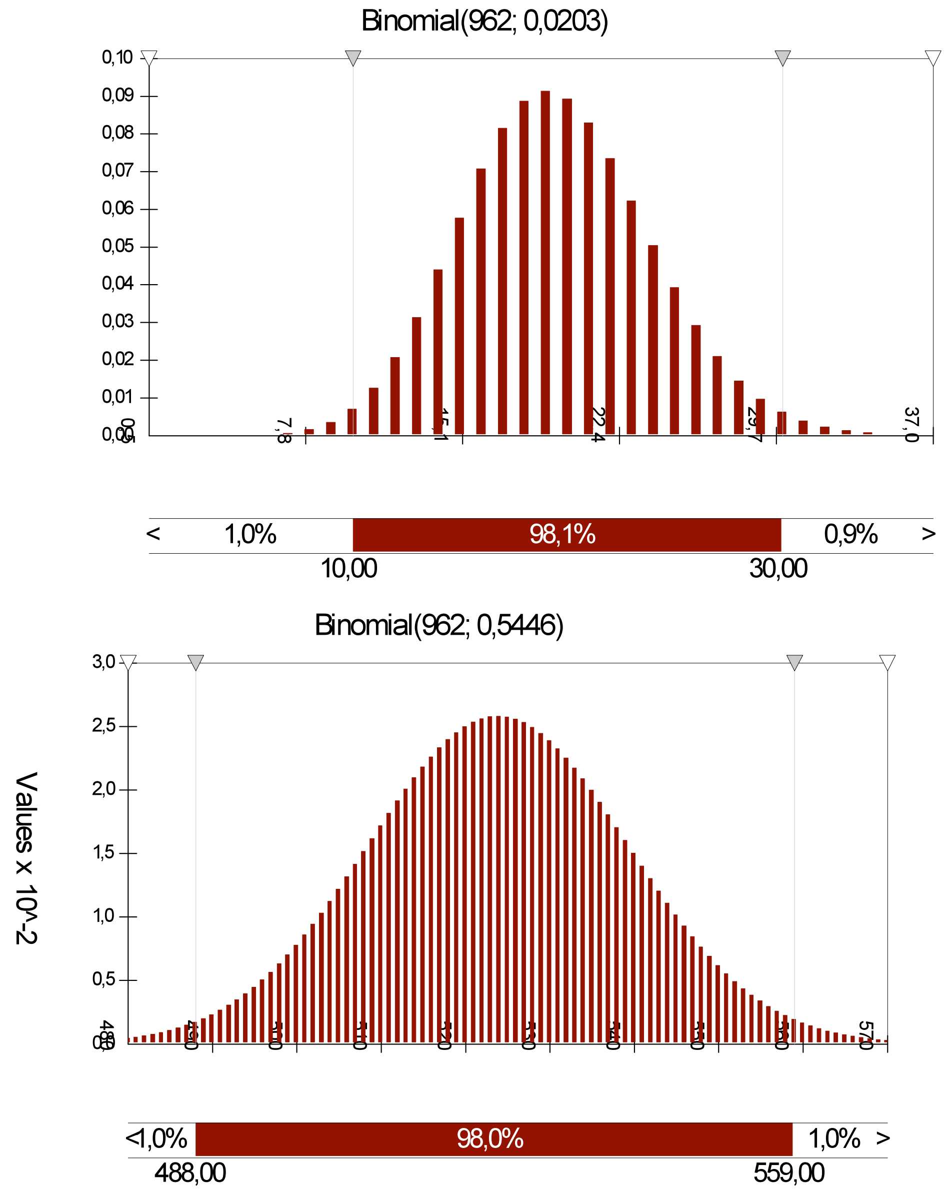


Figure 1. Distribution de probabilités de deux lois de demande Binomiale $\mathcal{B}\ \{n\ ;\ p_i\}$ avec n = 962 et p = 54,46% et 2,03%

A. Demande aléatoire définie sur une période d'amplitude certaine

[3] Voir code VBA de la fonction inverse de la loi Binomiale pour Excel dans la section V.

La structure observée pour un jour quelconque diffère nécessairement de cette structure moyenne, puisque nous sommes en présence d'une réalisation de la loi Multinomiale de paramètres $\{n = 962\ ;\ p_i\}$, avec $\sum_{i=1}^{6} X_i = 962$, X_i représentant la demande quotidienne du moteur i. Le tableau 2 est un exemple de génération aléatoire de cette distribution multinomiale suivant la distribution de probabilité du tableau 1. La figure 2 retrace une cinquantaine de réalisations indépendantes de cette variable aléatoire multinomiale.

jour	Moteur 1	Moteur 2	Moteur 3	Moteur 4	Moteur 5	Moteur 6	Demande totale
1	520	137	32	204	46	23	962
2	508	121	35	233	49	16	962
3	516	146	38	192	51	19	962
4	531	137	30	205	46	13	962
5	511	109	36	225	64	17	962
6	518	126	38	210	47	23	962
7	534	133	36	203	44	12	962
8	500	137	35	224	52	14	962
9	514	107	38	228	50	25	962
10	550	119	36	193	50	14	962
11	524	132	29	213	43	21	962
12	555	120	19	203	49	16	962
13	510	138	33	205	56	20	962
14	526	132	31	211	43	19	962
15	544	117	41	189	52	19	962
16	509	139	40	213	46	15	962
17	526	134	33	206	42	21	962
18	520	126	35	212	48	21	962
19	549	134	23	201	39	16	962
20	527	129	47	205	37	17	962
21	510	118	40	220	47	27	962
22	521	119	28	222	53	19	962
23	549	104	40	201	43	25	962
24	530	124	27	212	50	19	962

Tableau 2. Exemple de la demande des moteurs

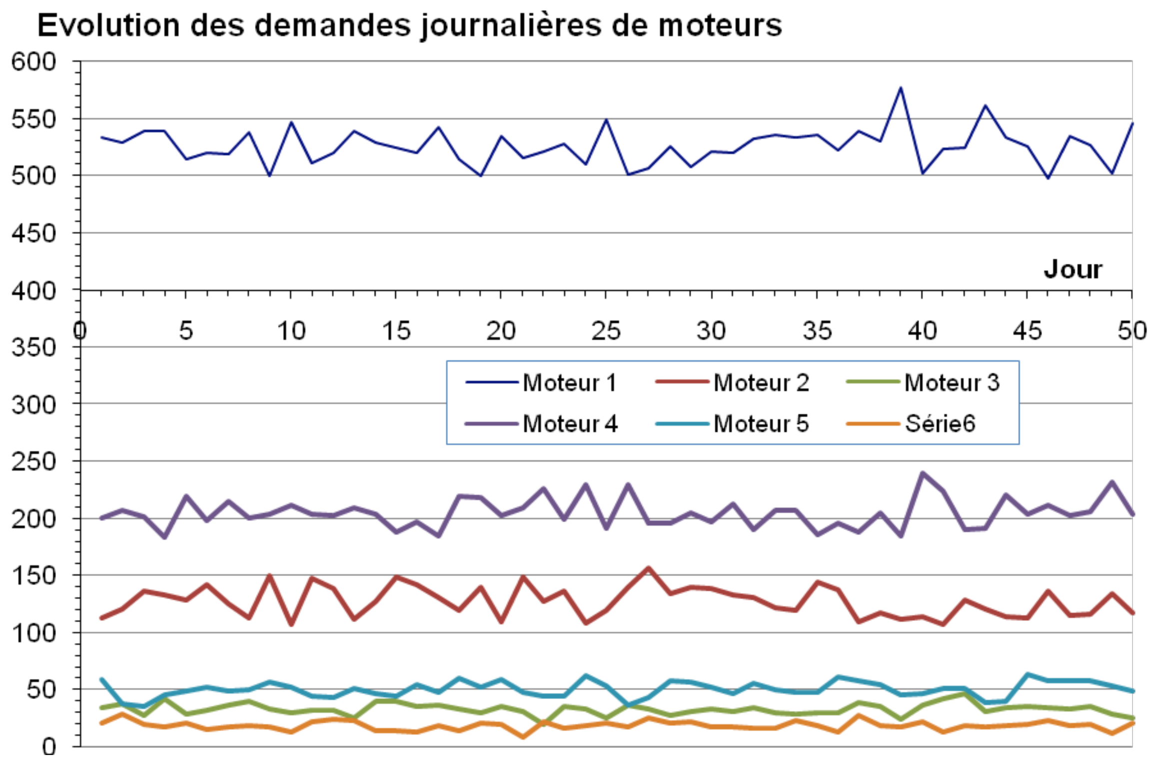


Figure 2. Simulation de la demande de références i suivant une loi Multinomiale$\{n\ ;\ p_i\}$

Si nous prenons le cas du moteur 1 qui est le plus demandé, nous notons que l'amplitude maximale observée est de 50 unités. Le fait que la demande totale soit certaine (demande quotidienne constante de 962 moteurs) et sa structure connue en probabilité n'empêche pas, comme nous venons de l'illustrer, que la demande de chaque moteur i varie d'un jour à l'autre, tout en ayant $\sum_{i=1}^{6} X_i = 962$.

Pour déterminer la valeur la plus basse de R_i telle que la demande quotidienne X_i du moteur i ait une probabilité inférieure à □ d'être dépassée, cette contrainte n'intervient pas. En effet, l'analyse porte sur ce moteur i contre le regroupement de tous les autres moteurs, ce qui conduit à considérer que la variable aléatoire X_i suit une loi Binomiale de paramètre p_i et $n = 962$ (et n = 12x962 = 11544, pour répondre à un besoin ultérieur). Pour illustrer ce qui vient d'être dit, les seuils les plus élevés R_i tels que $\mathrm{P}(X_i \geq R_i) \leq \alpha$, pour quelques valeurs de □ allant de 5 % à 0,01 % sont calculés dans le tableau 3.

		Moteur 1		Moteur 2		Moteur 3		Moteur 4		Moteur 5		Moteur 6	
	pi	54,46 %		13,29 %		3,58 %		21,51 %		5,13 %		2,03 %	
	n	962	11544	962	11544	962	11544	962	11544	962	11544	962	11544
	5,00%	549	6375	145	1594	44	446	228	2556	61	631	27	260
	1,00%	560	6411	153	1620	48	460	237	2586	66	648	30	270
	0,10%	571	6452	161	1648	53	476	247	2620	72	667	34	283
	0,01%	581	6486	168	1671	58	489	255	2648	77	682	38	293

Tableau 3. Caractéristiques des distributions de probabilité des X_i avec $X_i \sim \mathcal{B}$ (962, p_i) ou

$X_i \sim \mathcal{B}$ (11544, p_i)

B. Demande aléatoire définie sur une période d'amplitude aléatoire

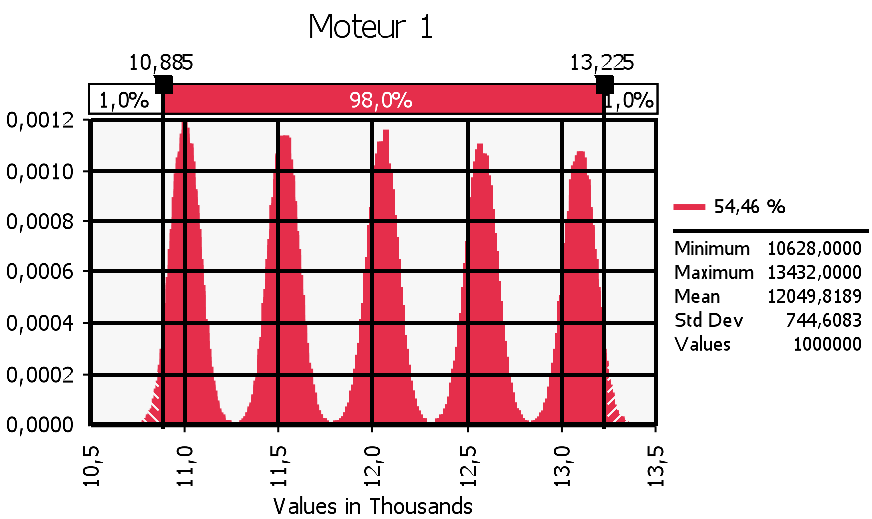
On supposera ici que le délai d'obtention L suit une distribution discrète uniforme de bornes 21 et 25 jours ($L \sim \mathcal{U}$ (21, 25)), que la production quotidienne de véhicules est de 962 et que la distribution de la demande de moteurs est celle du tableau 1. Dans ce contexte, la loi de la demande de X_{iL} suit la loi Binomiale $\mathcal{B}$ (962.L, p_i). La détermination de cette distribution de probabilité est compliquée analytiquement (même dans le cas relativement simple traité ici) Le plus simple consiste à obtenir empiriquement cette distribution en utilisant l'approche de Monte Carlo pour laquelle de nombreux logiciels existent On a déterminé empiriquement la distribution des demandes de ces six moteurs en utilisant l'add-in @Risk d'Excel (de loin le plus répandu) en effectuant un million de simulations. Le tableau 4 retrace les principaux paramètres de ces distributions et quelques fractiles définis pour des niveaux de risque faibles (ce qui explique le nombre de simulations effectuées).

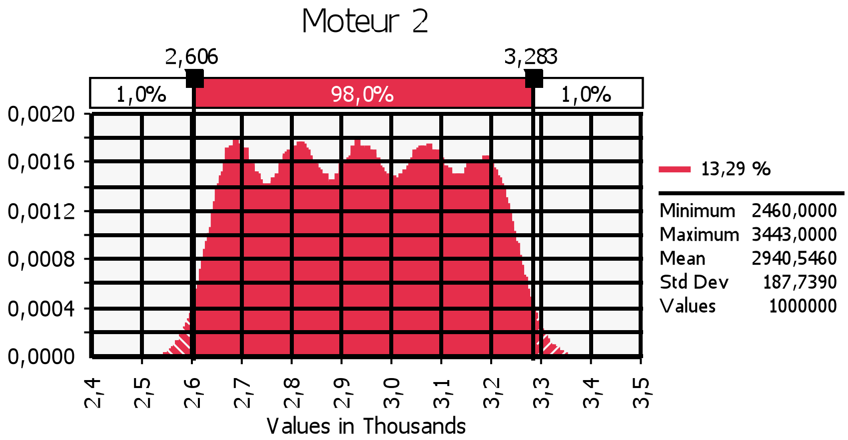
		Moteur 1	Moteur 2	Moteur 3	Moteur 4	Moteur 5	Moteur 6	Total
Probabilité p_i		54,46 %	13,29 %	3,58 %	21,51 %	5,13 %	2,03 %	100,00 %
Moyenne		12049,8	2940,5	792,1	4759,3	1135,1	449,2	22126
Ecart-type		744,7	187,7	56,0	298,9	77,1	34,7	
R_i tel que $P(X_{iL} > R_i)$=	5,00%	13150	3232	883	5216	1258	506	24245
	1,00%	13224	3283	909	5278	1290	526	24510
	0,10%	13295	3332	936	5337	1323	546	24769
	0,01%	13354	3369	957	5385	1347	562	24974

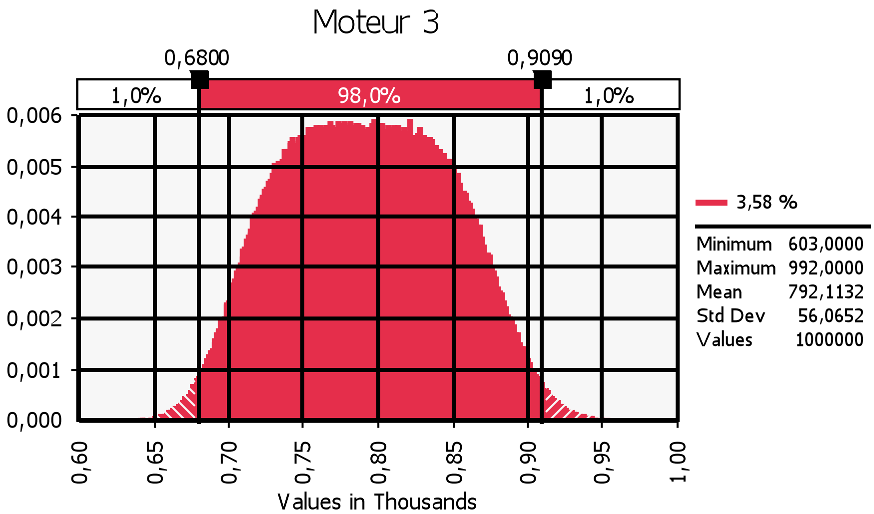
Tableau 4. Caractéristiques des distributions de probabilité des X_{iL} avec $X_{iL} \sim \mathcal{B}(962.L,$ $p_i)$ et $L \sim \mathcal{U}(21, 25)$

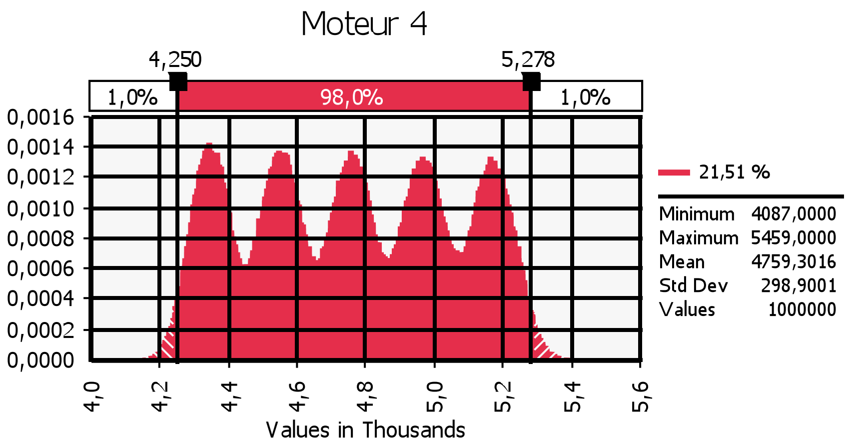
Il est intéressant d'analyser ces distributions de probabilité illustrées aux pages suivantes, à partir des résultats du million de simulation. Plusieurs commentaires peuvent être apportés :

- L'intervalle de confiance à 98 % a été retenu pour permettre une visualisation du risque de 1 % d'avoir une demande supérieure à la borne supérieure à l'intervalle, risque correspondant à l'un des seuils du tableau 2.
- Lorsque la probabilité p_i est élevée, les chevauchements entre les distributions de probabilités définies pour les différentes valeurs discrètes de L sont faibles, ce qui explique les « dents de scie » d'autant plus marquée que p_i est élevé. Plus p_i est faible, plus la distribution « s'apparente » à une distribution normale. Ces observations restent valables lorsque l'on n'est pas dans une situation d'équiprobabilité des délais d'obtention possibles.
- Cette démarche de détermination des fractiles (valeur de X ayant une probabilité prédéterminée d'être dépassée) est facile à mettre en œuvre sans à avoir à passer par un tableur (code Visual Basic relativement court).
- L'intérêt de la colonne « Total » apparaîtra lorsque l'on précisera le concept de stock de sécurité ; on remarque que $\sum_{i=1}^{6} S_i > \sum_{i=1}^{6} \bar{x}_{iL}$ et varie en sens inverse du risque (les fonctions de répartition étant monotones croissantes.




Moteur 2
2,606
3,283
1,0%
98,0%
1,0%
0,0020
0,0016
0,0012
0,0008
0,0004
0,0000
2,4
2,5
2,6
2,7
2,8
2,9
3,0
3,1
3,2
3,3
3,4
3,5
Values in Thousands
13,29 %
Minimum 2460,0000
Maximum 3443,0000
Mean 2940,5460
Std Dev 187,7390
Values 1000000


Moteur 3
0,6800
0,9090
1,0%
98,0%
1,0%
0,006
0,005
0,004
0,003
0,002
0,001
0,000
0,60
0,65
0,70
0,75
0,80
0,85
0,90
0,95
1,00
Values in Thousands
3,58 %
Minimum 603,0000
Maximum 992,0000
Mean 792,1132
Std Dev 56,0652
Values 1000000


Moteur 4
4,250
5,278
1,0%
98,0%
1,0%
0,0016
0,0014
0,0012
0,0010
0,0008
0,0006
0,0004
0,0002
0,0000
4,0
4,2
4,4
4,6
4,8
5,0
5,2
5,4
5,6
Values in Thousands
21,51 %
Minimum 4087,0000
Maximum 5459,0000
Mean 4759,3016
Std Dev 298,9001
Values 1000000

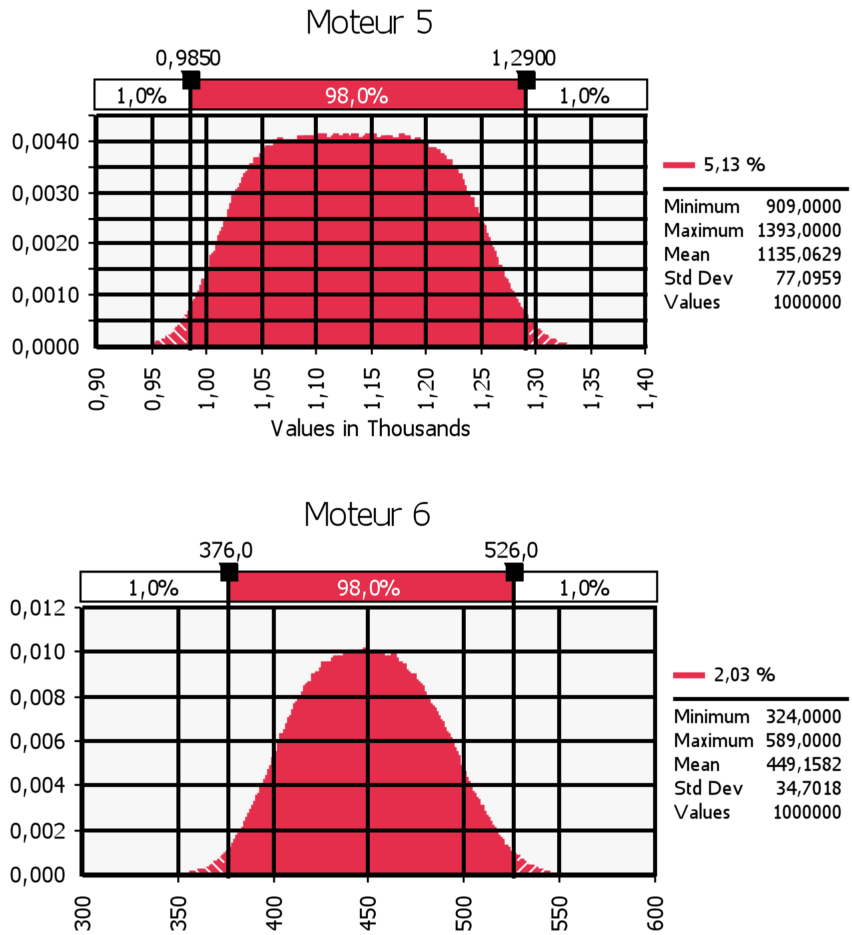


Figure 3. Distributions de probabilités de demandes suivant une loi Binomiale, avec un nombre aléatoire d'épreuves (définition de la demande sur une durée aléatoire)

C. Demande certaine définie sur une période d'amplitude aléatoire

Pour les composants montés systématiquement sur un véhicule, la demande quotidienne est certaine. Si l'on s'intéresse à un composant de cette nature, approvisionné chez un fournisseur éloigné pour lequel le délai d'obtention est aléatoire, la distribution de probabilités de la demande $X = 962.L$ se déduit directement de celle de L (variable aléatoire définie par multiplication d'une autre variable aléatoire par une constante). Si la probabilité associée à la valeur discrète la plus forte L_{max} de L est supérieure au risque de rupture de stock □ que l'entreprise est prête à courir, la politique périodique d'approvisionnement sera définie par un niveau de recomplètement correspondant à $962.L_{max}$.

II. Déterminants du stock de sécurité

A. L'objet du stock de sécurité

D'une manière générale, le stock de sécurité d'un produit est créé par un maillon de la chaîne logistique pour faire face aux aléas d'une demande ou d'une production qui surviendra au cours d'une période à venir. Considérons une sous-chaîne logistique composée des maillons A, B et C, les flux de produits allant de A (amont de cette partie de la chaîne) vers C (aval de cette partie de la chaîne) et intéressons-nous aux stocks de sécurité constitués par le maillon intermédiaire B. Pour illustrer le propos, on considérera que le maillon A est une usine de carters, le maillon B une usine mécanique produisant des moteurs et le maillon C, une usine d'assemblage de véhicules. Le produit faisant l'objet d'un stock de sécurité peut être :

- **cas 1** : un composant consommé par le maillon intermédiaire B qui s'approvisionne auprès du maillon-amont A (par exemple, une référence de carters) ; on désignera ce cas sous le nom de stock de **sécurité d'approvisionnement** ;
- **cas 2** : un composant fabriqué par ce maillon B pour être consommé par le maillon-aval, par exemple, une référence de moteurs ; on désignera ce cas sous le nom de stock de **sécurité de production**.

La littérature traitant du problème des stocks de sécurité s'appuie sur des modèles stochastiques de gestion des stocks visant à minimiser une fonction globale périodique de coûts, somme d'espérances mathématiques de coûts de possession, de passation de commande et de ruptures de stock, induites par la politique d'approvisionnement. Les politiques optimales trouvées se caractérisent toujours par la détermination d'une probabilité de rupture optimale qui est fonction de la structure de coûts unitaires utilisés. Dans une chaîne logistique-amont, ce type d'approche est sans grand intérêt en raison du coût extrêmement élevé associé aux ruptures de stock. On cherche plutôt à définir une politique d'approvisionnement conduisant à une probabilité de rupture considérée comme négligeable, par exemple 0,01 %. Cela étant, le cadre d'analyse proposé par cette littérature théorique reste pertinent pour définir des règles de pilotage mettant sous contrôle le risque et en établir les conséquences opérationnelles, notamment au niveau du stock de sécurité.

B. Stock de sécurité et politique calendaire d'approvisionnement

On a indiqué, en introduction, que les politiques d'approvisionnements retenues ici sont des politiques calendaires. Dans ce cadre, des décisions d'approvisionnement sont prises avec une périodicité constante et les livraisons sont effectuées avec la même périodicité si le délai d'obtention est constant.

Dans tous les cas, la décision prise consiste à passer commande de la différence entre un ***niveau de recomplètement*** *R* et la position de stock *PS* au moment de la prise de décision, en tenant compte, éventuellement, de contrainte de conditionnement obligeant toute commande à être un multiple d'une quantité de base. La *position de stock* est égale au stock physiquement détenu, augmenté des commandes en attente de livraison (qui n'existent que si le délai d'obtention est supérieur à l'intervalle entre deux commandes) et diminué des demandes différées en raison d'une rupture de stock, lesquelles sont négligeables ici compte tenu de la valeur très faible de la probabilité de rupture acceptée.

D'une manière générale, le ***stock de sécurité*** se définit comme la différence entre le niveau de recomplètement *R* et la demande moyenne. On verra que lorsqu'une partie de la demande est certaine, cette proposition doit être adaptée.

C. Le modèle de base de gestion calendaire

Tous les modèles de gestion calendaires utilisent les informations relatives à une distribution de probabilité de la demande sur une période de référence (que l'on définira ultérieurement) et une probabilité de rupture de stock α, imposée a priori ou résultant de l'optimisation d'une fonction de coût associée à l'approvisionnement dans un régime de croisière (voir ci-dessus). Le niveau de recomplètement, et donc le stock de sécurité, dépend du risque de rupture α et de l'écart-type de la distribution de demande. On va expliciter cette détermination, mettre en évidence l'importance du coefficient de variation et montrer l'incohérence des règles de gestion définissant les stocks de sécurité comme une fraction de la demande moyenne. Pour ce faire, on supposera que demande étudiée suit une loi Normale principalement ici parce qu'elle constitue une bonne approximation de la loi Binomiale pour des composants pas trop faiblement demandés (voir figure 1). En tout état de cause, la démarche présentée se généralise sans difficulté pour toutes les distributions de probabilités.

Dans le cas général d'une variable aléatoire *X* suivant une loi Normale de paramètres $\bar{x}$ et σ, la valeur *R* de *X* telle que P(*X* > *R*) = *α* est $R = \bar{x} + t_\alpha \sigma$, où *α* est le risque retenu et t_α, la valeur de la variable centrée-réduite *T* suivant la loi $\mathcal{N}$(0, 1), telle que P ($T > t_\alpha$)) = *α*. En utilisant le coefficient de variation *h* = $\sigma / \bar{x}$, *R* peut encore s'écrire $\bar{x}(1 + t_\alpha h)$.

$R = \bar{x}(1 + t_\alpha h)$, avec $h = \sigma / \bar{x}$ Relation 1

La figure 4 illustre le calcul de la demande R ayant une probabilité d'être dépassée.

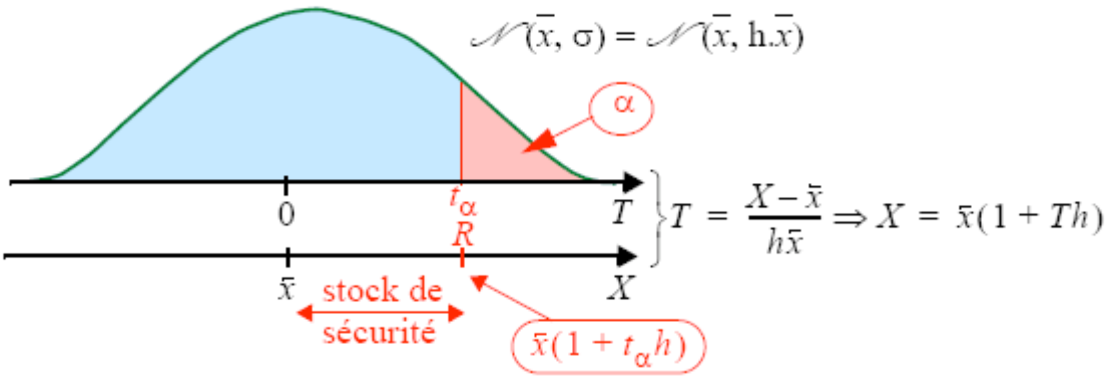


Figure 4. Détermination du stock de sécurité

Si X est une demande et R le stock initial destiné à satisfaire cette demande, alors $t_\alpha \sigma$ est le stock de sécurité, lequel peut encore s'écrire $\bar{x} t_\alpha h$, pour bien montrer qu'il dépend du risque encouru, de la demande moyenne et du coefficient de variation. Dans la suite, est appelé ***coefficient de sécurité***.

Appliquons ce qui vient d'être dit au cas d'un composant alternatif i monté sur une station d'une ligne d'assemblage de production quotidienne D. La demande quotidienne X_i est définie par la loi Binomiale X_i avec $X_i \sim \mathcal{B}(D, p_i)$.

La demande X_{iL} de ce composant sur L jours consécutifs suit alors la loi Binomiale $\mathcal{B}(D.L, p_i)$. Si cette loi Binomiale peut être approximée par la loi Normale $\mathcal{N}(DLp_i, \sqrt{p_i(1-p_i)DL})$, ce qui est généralement le cas avec ce niveau de production quotidien et les valeurs usuelles de probabilité de montage d'un composant alternatif, le coefficient de variation est alors $\sqrt{(1-p_i)/(DLp_i)}$, ce qui fait que le coefficient de sécurité, pour une demande sur L jours consécutifs est $t_\alpha \sqrt{(1-p_i)/(DLp_i)}$. Le coefficient de sécurité varie donc en sens inverse des probabilités de montage et proportionnellement à l'inverse de la racine carrée de D et de L.

Il s'ensuit que la valeur R_{iL} telle que P $(X_{iL} > R_{iL})) = \alpha$ est donné par la relation 2.

$$R_{iL} = DLp_i + t_\alpha \sqrt{DLp_i(1-p_i)} = DLp_i(1 + t_\alpha \sqrt{\frac{1-p_i}{DLp_i}}) \qquad \text{Relation 2}$$

On peut illustrer l'évolution du coefficient de sécurité, pour un risque donné (ici □ = 0,01%), différentes valeurs de probabilité p_i de montage d'un composant alternatif et le niveau de production ; dans la figure 5, ce niveau varie de 400 à 1000.

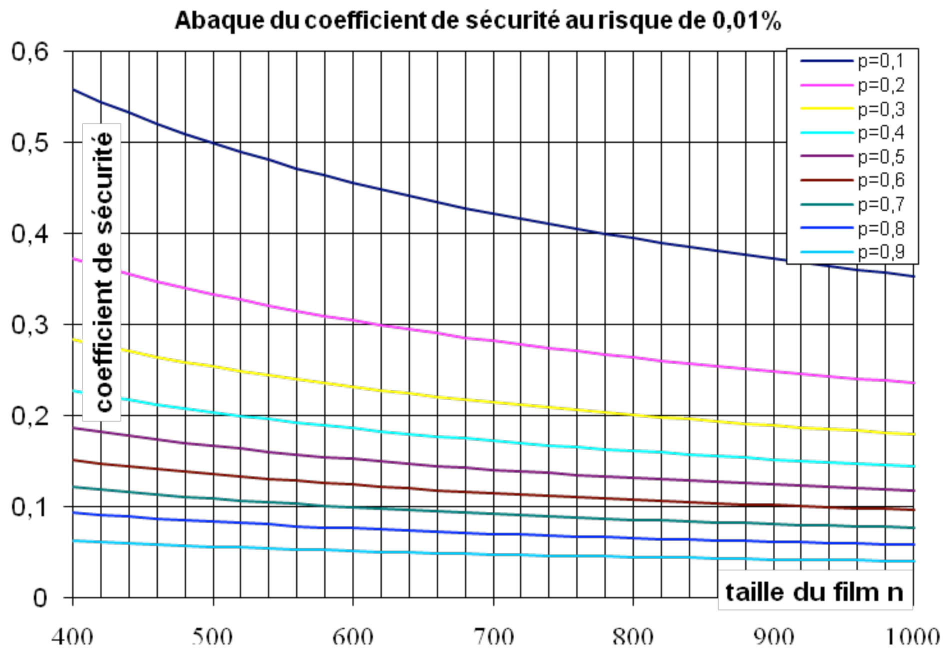


Figure 5. Evolution du coefficient de sécurité en fonction de la probabilité de montage d'un composant et le volume de production concerné

Cette analyse montre clairement que l'usage d'une règle fixant les stocks de sécurité par le biais d'un coefficient empirique imposé pour l'ensemble de références aboutit mécaniquement à des risques de rupture de stock variables d'une référence à une autre pour une même production totale. Le coefficient de sécurité garantissant la même protection pour toutes les références (même risque □ de rupture de stock) ne peut être que $t_\alpha \sqrt{(1-p_i)/(DLp_i)}$.

Le tableau 5 retrace l'évolution[4] des stocks de sécurité et des coefficients de sécurité pour les moteurs 1 (p_1 = 54,46%) et 5 (p_5 = 5,13%) pour une production quotidienne de 962 véhicules et un nombre T de jours de couverture du risque variant de 1 à 30 et une probabilité de rupture de stock de 0,01 %.

i	*i* = 1 (Moteur 1; 54,46%)	*i* = 5 (Moteur 5 ; 5,13%)

[4] Les calculs doivent être effectués avec la correction de continuité pour tenir compte du caractère discret de la variable aléatoire et en retenant la valeur numérique conduisant à un risque immédiatement inférieur au risque - cible (ici 0,01%). Il est aussi simple d'effectuer un calcul direct.(voir le § 5 de ce document)

T	1	3	5	9	12	30	1	3	5	9	12	30
962T	962	2886	4810	8658	11544	28860	962	2886	4810	8658	11544	28860
D_i	523,9	1571,7	2619,5	4715,1	6286,9	15717,2	49,4	148,1	246,8	444,2	592,2	1480,5
R_i	581	1671	2748	4887	6486	16032	77	194	306	522	682	1622
SS_i	57,1	99,3	128,5	171,9	199,1	314,8	27,6	45,9	59,2	77,8	89,8	141,5
Coef SS_i	10,90%	6,32%	4,90%	3,64%	3,17%	2,00%	56,03%	31,04%	24,01%	17,53%	15,16%	9,56%

Tableau 5. évolution des coefficients de sécurité pour les moteurs 1 et 5 en fonction de T (□ = 0,01%)

On démontre que l'espérance mathématique $I_p(R)$ du stock résiduel à la fin de la période sur laquelle s'exprime la demande X que l'on cherche à satisfaire avec le stock initial R est donnée par la relation 3 dans laquelle intervient l'espérance mathématique $I_r(R)$ de la rupture de stock. Cette relation 3 est valable quelle que soit la distribution de probabilité de X.

$$\mathrm{I_p}(R) = R - \bar{x} + \mathrm{I_r}(R), \qquad \text{Relation 3}$$

Lorsque la probabilité de rupture est négligeable, $I_r(R)$ est voisin de 0 le stock résiduel moyen $I_p(R)$ très peu différent de $R - \bar{x}$, c'est-à-dire du stock de sécurité. Il faut ajouter que si le stock de sécurité est constitué pour mettre sous contrôle l'importance des ruptures de stock, c'est sur le stock résiduel moyen $I_p(R)$ que pèse le coût supporté par l'entreprise

Dans le cas d'une loi Normale, l'espérance mathématique $I_r(R)$ de la rupture de stock est donnée[5] par la relation 4

$$\mathrm{I}_r(R) = \sigma\left[\mathrm{f}(t_R) - t_R \mathrm{P}(t > t_R)\right], \text{ avec } t_R = (R - \bar{x})/\sigma \text{ et } \mathrm{f}(t_R) = e^{-t_R^2/2}/\sqrt{2\pi} \qquad \text{Relation 4}$$

L'application de cette relation 3 à l'approximation de la loi Binomiale par la loi Normale (après vérification du bien fondé de cette approximation) conduit à utiliser cette relation 4 avec $t_R = (R - \mathrm{n}p)/\sqrt{\mathrm{n}p(1-p)}$. Le tableau 6 donne les ruptures de stock moyennes et les stocks résiduels moyens pour les moteurs 1 et 5 et différents niveaux de recomplètement associés aux différentes probabilités de rupture choisie pour illustrer numériquement ce document.

		n = 962			n = 11544		
		R	$I_r(R)$	$I_p(R)$	R	$I_r(R)$	$I_p(R)$
□	5,00%	549	0,31344	25,40824	1594	1,087010	89,224610
	1,00%	560	0,04609	36,14089	1620	0,179716	124,317316
	0,10%	571	0,00442	47,09922	1648	0,014529	165,152129
	0,01%	581	0,00036	57,09516	1671	0,001219	199,138819

Tableau 6. Evolution de la rupture moyenne de stock $I_r(R)$ et du stock résiduel moyen $I_p(R)$ pour différents risques □ et deux longueurs de période différentes

[5] Voir V. Giard, *Gestion de la production et des flux*, Economica, 3^e édition, p.675.

III. Application de la démarche générale aux problèmes d'approvisionnement de la chaîne logistique amont

On commencera par traiter le cas du stock de sécurité d'un composant approvisionné (§A), avant d'aborder celui d'un composant produit (§B)

A. Les déterminants du stock de sécurité d'un composant approvisionné

On s'intéresse ici aux stocks de sécurité de composante approvisionnés, stocks constitués chez le client et non le fournisseur. On commencera par considérer ces approvisionnements comme indépendants avant de faire quelques remarques importantes sur le cas d'un approvisionnement de l'ensemble des composants alternatifs chez un même fournisseur.

1. Cas d'approvisionnements indépendants de composants chez un fournisseur

On s'intéresse ici à l'approvisionnement du maillon B, producteur de moteurs, auprès de son fournisseur de carters, maillon A de la chaîne logistique. On notera :

- □ l'intervalle de temps séparant deux commandes du maillon B à son fournisseur A ; cette périodicité est normalement la même que celle des livraisons du fournisseur A à son client B ; cet intervalle de temps □ est considéré ici comme certain (on lèvera ultérieurement cette hypothèse) ;
- □ l'intervalle de temps séparant la réception de la commande du client B par le fournisseur A, de la livraison de cette commande dans le site du client B ; cet intervalle de temps □, également considéré ici comme certain, inclut le temps de transport (au sens large) et, le cas échéant un temps de production ; si le fournisseur produit pour stock, le délai d'obtention □ n'intègre pas de temps de production ; le délai négocié dans le contrat passé entre le client et le fournisseur intègre ou non un délai de production.

La commande reçue par le fournisseur, à la fin du jour *t,* lui donne une production à exécuter jusqu'à la prochaine réception d'une commande à la date t + □. Cette production peut être destinée à remplacer ce qui a été prélevé dans le stock si le fournisseur A doit envoyer immédiatement les composants commandés (il produit alors pour stock). Cette commande peut aussi être lancée en production, si le délai d'obtention □ intègre un temps de production. Dans ce dernier cas, il travaillera entièrement à la commande si la commande passée peut être exécutée entre t et t + □, sinon il ne pourra produire que pour stock, à moins que la commande arrivée s'ajoute à des commandes en cours d'exécution, arrivées en t - □, t – 2□ …, la condition pour travailler à la commande étant que la durée du cycle de production des références ne dépasse pas □ fois le nombre de commandes en cours d'exécution plus un (celle qui vient d'arriver).

On retrouve là l'intérêt du concept de point de pénétration de commande[6]. Si le client dispose d'informations fiables, il a intérêt à permettre à son fournisseur de travailler à la commande, ce qui élimine le besoin en stock de sécurité lié à la méconnaissance des demandes à venir. Toutefois, ce stock de sécurité peut s'imposer au fournisseur si la qualité de sa production n'est pas complètement garantie.

On examinera ultérieurement le problème de la maîtrise du risque par le fournisseur. Ce qui nous préoccupe ici c'est le problème posé au client (maillon B) qui doit définir des règles d'approvisionnement tenant compte du fait que la commande passée en t lui parviendra en t + □ et que la connaissance de ses besoins, liées aux informations transmises par son propre client (maillon C, celui de l'assemblage final), ne couvrent pas cette échéance. Il lui faut alors utiliser les informations dont il dispose, à savoir sa connaissance du volume quotidien de production du client final (ligne d'assemblage du produit fini) et la structure de la demande, supposée stable ou à évolution très lente. La commande qu'il passe exploite cette connaissance, la position de stock de la référence considérée et le niveau de recomplètement déterminé pour le risque □ retenu de rupture de stock.

Si le client B n'est pas contraint par une contrainte d'emballage dans la détermination de sa commande (emballage unitaire), la règle de décision est relativement simple ainsi que le calcul du stock de sécurité qui en résulte. Dans le cas contraire (emballage par lot de composants identiques), il faudra adapter la règle et le calcul du stock de sécurité. Dans les deux cas, on supposera que les composants livrés sont de bonne qualité. On examinera dans un dernier temps le problème additionnel posé par la possibilité de livraisons de lots pouvant comporter des pièces défectueuses.

Il convient d'ajouter que les demandes de composants définies sur la période □ sont définies par la structure de probabilités de la demande finale, sans distorsion introduite par l'ordonnancement retenu par le client B (et en cascade par son propre client, le maillon C d'assemblage final). Autrement

---

[6] Voir V. Giard & G. Mendy, « De l'approvisionnement synchrone à la production synchrone dans la chaîne logistique », *Revue Française de Gestion*, 2007, vol. 33, n° 171, p. 65-88, 2007.

dit, cette connaissance probabiliste peut être utilisée par le client B dans ses relations avec le fournisseur A s'il ne dispose pas d'informations certaines d'une longueur suffisante en provenance de son propre client C.

a) Approvisionnement unitaire

La modélisation du problème d'approvisionnement calendaire est compliquée lorsque le délai d'obtention n'est pas nul et d'autant plus compliqué que ce délai d'obtention est grand par rapport à la période calendaire séparant deux décisions successives, cette difficulté étant liée à l'existence possible de ruptures de stock [7]. Dans le cas étudié ici, la probabilité de rupture de stock est très faible ce qui permet une simplification de la modélisation[8], Dans ce cadre, on démontre alors que le niveau de recomplètement *R* doit être défini en utilisant une distribution de probabilité sur la période $\theta + \lambda$ Autrement dit, il faut utiliser la distribution $\mathcal{B}\left[\mathrm{n}(\theta+\lambda), p\right]$, où n est la production quotidienne[9]. Cette distribution, dans les problèmes de l'industrie automobile conduit à pouvoir utiliser la distribution approchée $\mathcal{N}\left\{\mathrm{n}(\theta+\lambda)p\,,\ \sqrt{\mathrm{n}(\theta+\lambda)p(1-p)}\right\}$ (sachant que le calcul direct ne pose guère de problème) qui permet d'utiliser la relation 5, à rapprocher de la relation 2.

$$R_{\theta+\lambda} = \mathrm{n}(\theta+\lambda)p + t_{\alpha}\sqrt{n(\theta+\lambda)p(1-p)} \qquad \text{Relation 5}$$

Dans les conditions retenues, la position de stock à la passation de commande *PS* est la somme du stock observé *S* lors de la passation de la commande et des *k* livraisons attendues ($k = \lfloor \lambda/\theta \rfloor$, où $\lfloor A \rfloor$ représente l'arrondi inférieur de A), d'où : $PS = S + \sum_{j=1}^{k} q_{t-j\theta}$.

Illustrons l'application de ces principes par un exemple numérique portant sur l'approvisionnement du carter C_1 qui n'est monté que sur le moteur M_1 (p_1 = 54,46%). Supposons qu'une commande soit passée tous les deux jours ($\theta = 2$; commandes passées les numéros de jour pairs) en fin de journée sur la base de la différence entre le niveau de recomplètement R_t et la position de stock PS_t ; par ailleurs, supposons que le délai d'obtention soit de 10 jours ($\lambda = 10$). Dans ce contexte, la distribution de probabilité à utiliser est définie sur $\theta + \lambda = 12$ jours,

---

[7] Voir V. Giard, *Gestion de la production et des flux*, Economica, 3e édition, 2003, p.729-749.

[8] Techniquement, on n'est pas obligé de passer par un mécanisme de convolution pour déterminer la distribution de probabilité à utiliser.

[9] Si cette demande quotidienne n'est pas stable, il suffit de remplacer $\mathrm{n}(\theta + \lambda)$ par la demande prévue sur ces $\theta + \lambda$ jours.

ce qui conduit à la loi Binomiale $\mathcal{B}$ (12x962 ; 0,5446). Pour un risque de rupture □ = 0,01 %, le niveau de recomplètement est $R_1 = 6486$ (voir tableau 3 ; le calcul direct donne le même résultat que celui obtenu avec l'approximation normale). Le tableau 5 illustre l'utilisation de cette politique d'approvisionnement sur 24 jours, avec des demandes générées aléatoirement.

Plusieurs remarques peuvent être faites.

- Une convention graphique permet de retrouver les commandes en attente de livraison ; c'est ainsi qu'aux jours 3 et 4, le cumul des commandes en attente de livraison (5201) correspond aux livraisons qui seront faites au jour 13 (1050, commande du jour 2), au jour 11 (1037, commande du jour -1), au jour 9 (1026, commande du jour -3), au jour 7 (1057, commande du jour -5) et au jour 5 (1031, commande du jour -7).
- On vérifie également la propriété selon la quelle, en régime de croisière, la commande passée correspond au cumul des demandes observées depuis la précédente passation de commande[10] ($q_4 = 1047 = D_3 + D_4 = 516 + 531$; $q_6 = 1029 = D_5 + D_6 = 511 + 518$; etc.). Cette observation est importante pour le §2 suivant car il revient à dire que les commandes passées sont des réalisations de variables aléatoires indépendantes.

[10] Ceci s'explique par le fait que la position de stock après passation de commande en t est égale au niveau de recomplètement ; il en est de même en t + □. La position de stock avant passation de commande en t + □ est égale à celle observée en t avant passation de commande, diminuée des demandes entre t et t + □ , diminution à compenser par la commande à passer en t + □ pour retrouver le niveau de recomplètement. Les livraisons entre ces 2 dates ne modifient pas la position de stock.

jour	Livraison	Stock début	Demande	Stock fin	En attente de livraison	PS	Commande
1	1038	1270	520	750	5194	5944	
2		750	508	242	5194	5436	1050
3	1043	1285	516	769	5201	5970	
4		769	531	238	5201	5439	1047
5	1031	1269	511	758	5217	5975	
6		758	518	240	5217	5457	1029
7	1057	1297	534	763	5189	5952	
8		763	500	263	5189	5452	1034
9	1026	1289	514	775	5197	5972	
10		775	550	225	5197	5422	1064
11	1037	1262	524	738	5224	5962	
12		738	555	183	5224	5407	1079
13	1050	1233	510	723	5253	5976	
14		723	526	197	5253	5450	1036
15	1047	1244	544	700	5242	5942	
16		700	509	191	5242	5433	1053
17	1029	1220	526	694	5266	5960	
18		694	520	174	5266	5440	1046
19	1034	1208	549	659	5278	5937	
20		659	527	132	5278	5410	1076
21	1064	1196	510	686	5290	5976	
22		686	521	165	5290	5455	1031
23	1079	1244	549	695	5242	5937	
24		695	530	165	5242	5407	1079

Tableau 7. Simulation de la politique d'approvisionnement des carters avec conditionnement unitaire – commande passée tous les 2 jours – délai d'obtention de 10 jours

□ Il faut ajouter que si le délai d'obtention est aléatoire, la détermination du niveau de recomplètement associé à un risque □ prédéterminé suppose seulement de déterminer préalablement la distribution de probabilité d'une demande aléatoire définie sur une durée aléatoire, comme cela a été fait au §I.B. Une simulation du type de celle du tableau 5 est possible et conduit à avoir éventuellement des livraisons simultanées. Il convient de s'interroger sur la possibilité de permutation d'ordre des livraisons par rapport aux expéditions. Il est alors sans doute judicieux de remplacer l'hypothèse d'indépendance des délais de deux livraisons consécutives par des relations définies en probabilité, ce qui ne pose pas de problème technique avec des add-ins comme @Risk

b) Approvisionnement avec contraintes de lotissement

En l'absence de contrainte de lotissement, le client commande une quantité $q = R - PS$. Si le client ne peut passer de commande que sur un multiple d'un conditionnement de base □. En ayant choisi de définir une politique d'approvisionnement basée sur un risque de rupture prédéterminé faible, la prise en compte de la contrainte de lotissement revient à commander soit q, si q est un multiple de □, soit l'une de deux quantités multiples de □, encadrant q : q_{inf} =

$\kappa \lfloor q/\kappa \rfloor$ et $q_{sup} = \kappa \lceil q/\kappa \rceil$. En mettant de côté le cas où q est un multiple de □ ($q = q_{inf} = q_{sup}$), la solution de majoration (q_{sup}) diminue le risque de rupture que l'on accepte de courir tandis que la solution de minoration (q_{sup}) augmente ce risque. Deux attitudes sont alors possibles. La première consiste à accepter systématiquement la minoration du risque, solution qui augmente l'espérance du stock de sécurité et donc le coût qui lui est associé. La seconde solution consiste à accepter la solution de minoration à la condition expresse que le risque encouru, supérieur au risque □ initialement accepté, ne soit pas supérieur à un risque □, légèrement supérieur au risque □.

Reprenons l'exemple du paragraphe précédent et supposons maintenant que le carter considéré soit transporté par conteneur de □ = 18 unités. Le risque □ est de 0,01 %, ce qui conduit à R = 6486. Considérons que l'on accepte un risque □ de 0,015 %. Sachant que $q = R - PS$ □ $R = q + PS$, le remplacement de q par q_{inf} revient à diminuer R d'un entier compris entre 0 et □ – 1 puisque que la différence $q - q_{inf}$ est un entier compris entre 0 et □ – 1. Dans cet exemple, tant que $q - q_{inf}$ reste inférieur à 6, le choix de conduit à une prise de risque ne dépassant pas □.

R	6486	6485	6484	6483	6482	6481	6480	6479	6478
P(X>R)	0,0094%	0,0101%	0,0109%	0,0117%	0,0126%	0,0136%	0,0146%	0,0157%	0,0168%
R	6477	6476	6475	6474	6473	6472	6471	6470	6469
P(X>R)	0,0181%	0,0194%	0,0209%	0,0224%	0,0240%	0,0258%	0,0276%	0,0296%	0,0317%

Tableau 8. Détermination de la règle d'approvisionnement dans le cas d'une contrainte de conditionnement (conteneur de 18 carters) a = 0,1% ; b = 0,015% ; n = 11544 ; p = 54,46%

Avec cette nouvelle politique d'approvisionnement, on obtient la simulation du tableau 9 qui remplace celle du tableau 7. En bleu clair, les cas de minoration et en orange clair, ceux de majoration.

jour	Livraison	Stock début	Demande	Stock fin	En attente de livraison	PS	Commande par lot de 18	Commande lotissement unitaire
1	1038	1270	520	750	5194	5944		
2		750	508	242	5194	5436	1044	1050
3	1043	1285	516	769	5195	5964		
4		769	531	238	5195	5433	1062	1053
5	1031	1269	511	758	5226	5984		
6		758	518	240	5226	5466	1026	1020
7	1057	1297	534	763	5195	5958		
8		763	500	263	5195	5458	1026	1028
9	1026	1289	514	775	5195	5970		
10		775	550	225	5195	5420	1062	1066
11	1037	1262	524	738	5220	5958		
12		738	555	183	5220	5403	1080	1083
13	1044	1227	510	717	5256	5973		
14		717	526	191	5256	5447	1044	1039
15	1062	1253	544	709	5238	5947		
16		709	509	200	5238	5438	1044	1048
17	1026	1226	526	700	5256	5956		
18		700	520	180	5256	5436	1044	1050
19	1026	1206	549	657	5274	5931		
20		657	527	130	5274	5404	1080	1082
21	1062	1192	510	682	5292	5974		
22		682	521	161	5292	5453	1044	1033
23	1080	1241	549	692	5256	5948		
24		692	530	162	5256	5418	1062	1068

Tableau 9. Simulation de la politique d'approvisionnement des carters avec conditionnement par conteneurs de 18 unités – commande passée tous les 2 jours – délai d'obtention de 10 jours

c) Approvisionnement auprès d'un composant chez un fournisseur ayant des problèmes de qualité – pas de contrainte de lotissement

Supposons maintenant que le composant fabriqué par le fournisseur pose parfois des problèmes détectés au montage par le client et que la probabilité que le composant soit défectueux au montage soit □ (par exemple □ = 1%). Sur un lot de q composants livrés, le nombre de composants correct est donné par la loi $\mathcal{B}(q, 1 - □)$. Pour disposer de q composants corrects avec une probabilité □

imposée, il faut livrer une quantité *q'* définie par une loi Binomiale Négative[11]. Reprenons l'exemple du tableau 7. La probabilité de ne pas avoir au moins 1050 composants corrects sur un lot de N composants tombe en dessous de □ = 0,1 % pour un lot de 1071 pièces. Ce tableau a été constitué en utilisant la fonction de la loi Binomiale Négative d'Excel

N	1050	1051	1052	1053	1054	1055	1056	1057
P(X>=1050)	0,003%	0,030%	0,174%	0,680%	2,010%	4,814%	9,746%	17,185%
P(X<1050)	99,997%	99,970%	99,826%	99,320%	97,990%	95,186%	90,254%	82,815%
N	1058	1059	1060	1061	1062	1063	1064	1065
P(X>=1050)	27,013%	38,568%	50,804%	62,595%	81,537%	88,003%	92,590%	95,644%
P(X<1050)	72,987%	61,432%	49,196%	37,405%	18,463%	11,997%	7,410%	4,356%
N	1066	1067	1068	1069	1070	1071	1072	1074
P(X>=1050)	97,558%	98,693%	99,331%	99,672%	99,846%	99,930%	99,970%	99,987%
P(X<1050)	2,442%	1,307%	0,669%	0,328%	0,154%	0,070%	0,030%	0,013%

Tableau 10. Evolution de la probabilité d'avoir 1050 composants corrects dans un lot de N composants livrés

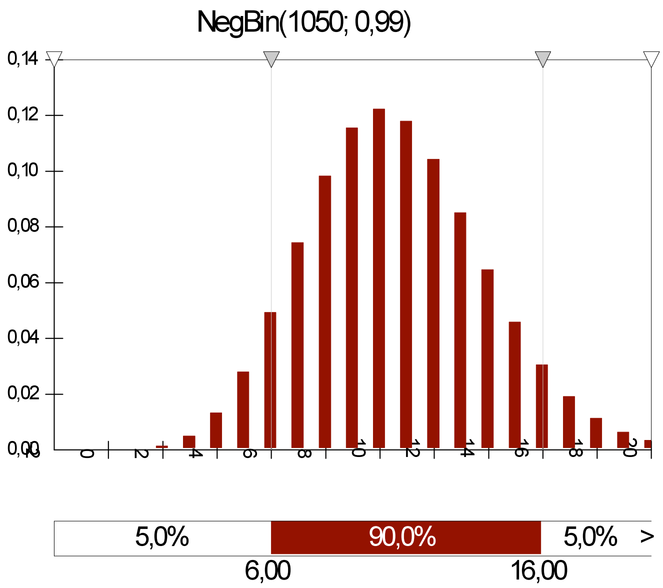


Figure 7. Distribution de probabilités du nombre de composants supplémentaires y nécessaires pour avoir 1050 composants corrects dans un lot de 1050 + y composants livrés (loi Binomiale Négative de paramètres 1050 et 99%)

Cette illustration numérique met en évidence la nécessité d'une majoration du niveau de recomplètement pour tenir compte des problèmes de qualité. La détermination d'un niveau de recomplètement conduisant à un risque □ prédéterminé (□ = 0,01%, par exemple) de rupture de stock doit se fonder sur

[11]La loi Binomiale donne la distribution de probabilités du nombre X d'événements se produisant au cours de n épreuves (chaque épreuve ayant la même probabilité p de donner naissance à l'événement considéré. La loi Binomiale Négative donne la distribution du nombre n d'épreuves nécessaires pour observer au moins x événements (n ≥x).

la distribution de la demande à satisfaire *Z*, chaque demande à satisfaire *X* étant à majorer du nombre de pièces défectueuses trouvées *Y* avant d'obtenir le nombre d'unités voulues. Cette distribution s'obtient par simulation, chaque valeur générée *x* étant utilisée comme paramètre de la loi Binomiale Négative (*x* étant le nombre de succès et 1 – □ étant la probabilité que la pièce soit correcte ; on est donc en présence d'une distribution conditionnelle) dont on génère une réalisation y, ce qui donne une valeur *z*. L'exploitation de l'ensemble des valeurs équiprobables de *Z*, générées dans la simulation permet une reconstitution fiable de la distribution de probabilité cherchée (si le nombre de simulation est grand), très difficile à établir autrement. Une simulation portant sur un million de valeurs générées en utilisant l'add-in d'Excel @Risk conduit à la distribution de la figure 7, avec □ = 1%. La moyenne de Z est supérieure à celle de *X* de 63,5 (qui s'analyse comme le nombre moyen de pièces défectueuses), ce qui correspond à la majoration moyenne obtenue en divisant E(*X*) par 0,99. Dans cette simulation, la valeur de *Z* ayant 0,01% de chances d'être dépassée est 6553, ce qui correspond à la valeur à retenir pour le niveau de recomplètement dans le problème étudié. Dans cette démarche, ce risque prend en compte simultanément des problèmes de variabilité de la demande (liée à la loi Binomiale) et de variabilité de la qualité des pièces fournies.

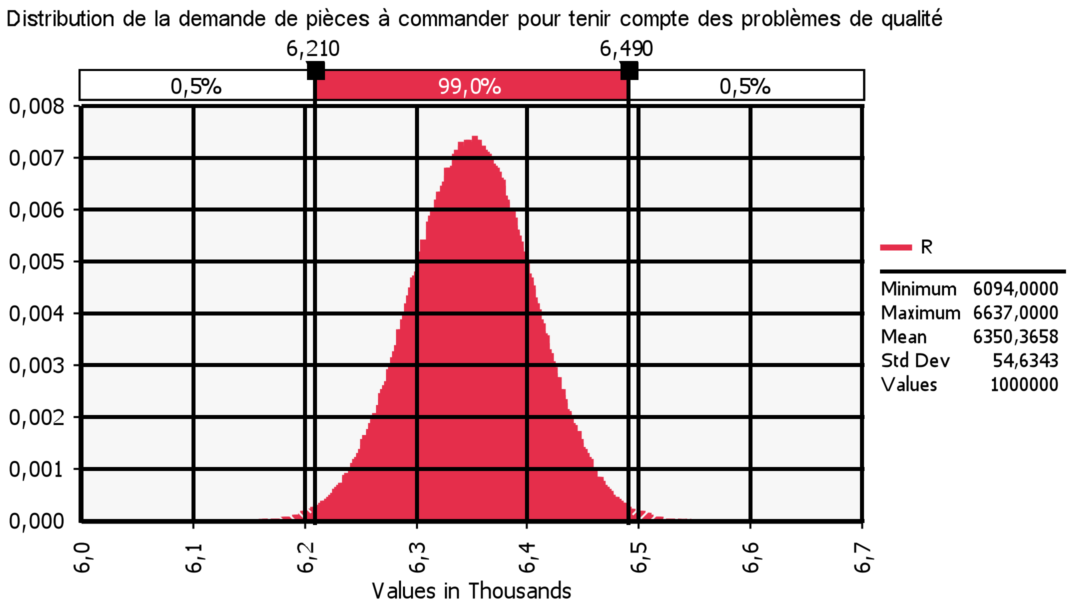


Figure 8. Distribution de probabilité du nombre *Z* de pièces à recevoir pour satisfaire une demande *X* de composants conformes ($X \sim \mathcal{B}$(962.12 ; 54,56%) sachant que chaque pièce reçue a une probabilité de 99% d'être conforme

Reprenons l'exemple précédent, en modifiant le niveau de recomplètement qui passe de 6486 à 6553 et en introduisant une différence entre la livraison reçue et la livraison de pièces effectivement conformes.

jour	Livraison	Livraison correcte	Stock début correct	Demande	Stock fin	En attente de livraison	PS	Commande
1	1053	1043	1275	520	755	5251	6006	
2			755	508	247	5251	5498	1055
3	1051	1040	1287	516	771	5255	6026	
4			771	531	240	5255	5495	1058
5	1041	1031	1271	511	760	5272	6032	
6			760	518	242	5272	5514	1039
7	1066	1056	1298	534	764	5245	6009	
8			764	500	264	5245	5509	1044
9	1045	1037	1301	514	787	5244	6031	
10			787	550	237	5244	5481	1072
11	1048	1039	1276	524	752	5268	6020	
12			752	555	197	5268	5465	1088
13	1055	1039	1236	510	726	5301	6027	
14			726	526	200	5301	5501	1052
15	1058	1052	1252	544	708	5295	6003	
16			708	509	199	5295	5494	1059
17	1039	1028	1227	526	701	5315	6016	
18			701	520	181	5315	5496	1057
19	1044	1036	1217	549	668	5328	5996	
20			668	527	141	5328	5469	1084
21	1072	1061	1202	510	692	5340	6032	
22			692	521	171	5340	5511	1042
23	1088	1082	1253	549	704	5294	5998	
24			704	530	174	5294	5468	1085

Tableau 11. Simulation de la politique d'approvisionnement des carters avec conditionnement par conteneurs de 18 unités – commande passée tous les 2 jours – délai d'obtention de 10 jours

d) Approvisionnement auprès d'un composant chez un fournisseur ayant des problèmes de qualité – avec contrainte de lotissement

La combinaison des principes développés aux paragraphes b et c est immédiate. L'analyse de la distribution obtenue par la simulation (voir § c) montre que c'est à partir d'une diminution de 6 unités du niveau de recomplètement (6553) que le risque de rupture devient supérieur à 0,015 % qui est le seuil, retenu dans l'exemple du § b. Il s'ensuit que si la différence entre la quantité commandée sans contrainte de conditionnement q et la quantité q_{inf} est inférieure à 6, on peut remplacer q par q_{inf}, sinon il faut commander q_{sup} ; c'est du reste la même règle qui est utilisée en l'absence de problème de qualité.

jour	Livraison	Livraison correcte	Stock début correct	Demande	Stock fin	En attente de livraison	PS	Commande	Commande lotissement unitaire
1	1053	1043	1275	520	755	5251	6006		
2			755	508	247	5251	5498	1062	1055
3	1051	1040	1287	516	771	5262	6033		
4			771	531	240	5262	5502	1062	1051
5	1041	1031	1271	511	760	5283	6043		
6			760	518	242	5283	5525	1026	1028
7	1066	1056	1298	534	764	5243	6007		
8			764	500	264	5243	5507	1044	1046
9	1045	1037	1301	514	787	5242	6029		
10			787	550	237	5242	5479	1080	1074
11	1048	1039	1276	524	752	5274	6026		
12			752	555	197	5274	5471	1080	1082
13	1062	1039	1236	510	726	5292	6018		
14			726	526	200	5292	5492	1062	1061
15	1062	1052	1252	544	708	5292	6000		
16			708	509	199	5292	5491	1062	1062
17	1026	1028	1227	526	701	5328	6029		
18			701	520	181	5328	5509	1044	1044
19	1044	1036	1217	549	668	5328	5996		
20			668	527	141	5328	5469	1080	1084
21	1080	1061	1202	510	692	5328	6020		
22			692	521	171	5328	5499	1062	1054
23	1080	1082	1253	549	704	5310	6014		
24			704	530	174	5310	5484	1080	1069

Tableau 12. Simulation de la politique d'approvisionnement des carters avec conditionnement par conteneurs de 18 unités – commande passée tous les 2 jours – délai d'obtention de 10 jours – avec prise en compte de problème de qualité

2. Cas d'approvisionnements dépendants de composants chez un même fournisseur

Le client (maillon B de la chaîne logistique) peut passer simultanément, avec l'intervalle de □ jours une commande portant sur plusieurs composants alternatifs chez un même fournisseur (maillon A de la chaîne logistique). La charge de travail périodique qui en résulte pour ce fournisseur est aléatoire, compte tenu de la remarque faite plus haut (selon laquelle la commande passée pour un composant correspond au cumul des demandes satisfaites depuis la précédente commande). Dans ces conditions, le fournisseur doit disposer d'une capacité de production suffisante pour absorber les pics de demande.

Si le client commande tous les composants alternatifs auprès d'un même fournisseur, il faut tenir compte du fait que les commandes sont liées par le fait que l'on est en présence d'une loi Multinomiale de paramètres (n□, p_i)

qui conduit à avoir $\sum_i q_i = n\theta$. Cette remarque est importante pour le fournisseur qui, dans ce cas, bénéficie d'un niveau constant du total de commandes périodiques. Il peut alors mieux organiser sa production de manière plus efficiente.

B. Les déterminants du stock de sécurité d'un composant produit

On se situe maintenant dans le cas du maillon B de la chaîne logistique. Comme on est en régime de croisière, les commandes de composants passées périodiquement par son client (le maillon C de la chaîne logistique) varient autour d'une valeur moyenne et le producteur B doit disposer d'une capacité suffisante pour répondre sans rupture de stock aux commandes de son client. Le producteur B peut être amené à disposer d'un stock de sécurité de produits. Deux raisons, non exclusives, expliquent la nécessité d'un tel stock.

- Tout d'abord, la production de ce maillon ne peut se faire entièrement à la commande, une partie ou la totalité de la production devant se faire pour stock. Dans ce cas, le problème du stock de sécurité est lié à celui du programme de production de ce maillon B, en s'appuyant sur la connaissance de la structure la demande des composants alternatifs consommés par le client C et celle du niveau de production (production quotidienne n, dans laquelle le composant alternatif étudié sera monté). La décision d'approvisionnement se traduit concrètement par un ordre de fabrication (OF) La commande du client C conduira à prélever les composants demandés dans ce stock, le risque de ne pas être en mesure d'honorer la totalité de la commande étant parfaitement maîtrisé.
- Le processus de production du maillon B peut ne pas être totalement fiable, ce qui implique la présence d'un stock de sécurité pour remplacer les composants défectueux.

Bien évidemment, on peut avoir un stock de sécurité combinant ces deux motifs.

On supposera, sans perte de généralité, que le client C transmet quotidiennement ses commandes à son fournisseur B. La commande reçue à la fin du jour t est à expédier à la fin de la journée $t + \lambda$; elle vient éventuellement s'ajouter à des commandes antérieurement reçues et non encore expédiée (□ portefeuille de h commandes reçues et pas encore honorées après réception de cette dernière commande ; ces commandes correspondant à des informations fermes). Cette accumulation de commandes se justifie pour au moins deux raisons :

- Tout d'abord, le producteur B peut avoir organisé la production de plusieurs références dans un atelier ou sur une ligne, sur la base d'un cycle de production de H jours au cours duquel chaque référence sera successivement produite.

- Indépendamment de cela, le client a intérêt à transmettre au plus tôt à son fournisseur les informations fermes dont il dispose pour permettre à ce dernier d'organiser au mieux sa production et ses propres approvisionnements.

On supposera enfin que la périodicité des expéditions du fournisseur B à son client C coïncide avec celle de la réception des commandes, ce qui n'est pas restrictif, une périodicité plus grande n'ayant pas de sens et une périodicité plus faible conduisant à une accumulation de commandes similaire à celle évoquée ci-dessus.

L'analyse se fonde sur la programmation de la production sur le cycle de production de H jours (H pouvant être égal à 1). La quantité lancée en production est délivrée en t + m ($1 \leq m \leq H$), à partir du moment où le cycle de production est défini pour organiser la fabrication de plusieurs composants alternatifs dans le même atelier ou sur la même ligne ; bien évidemment, si ce cycle est dédié à la fabrication du seul composant auquel on s'intéresse, on devrait avoir m = H (si, pendant ce cycle, le système productif est pleinement utilisé).

1. Détermination du niveau de recomplètement en l'absence de problèmes de qualité en production

Deux cas de figure peuvent être distingués, le premier étant un cas particulier du second.

a) Livraison dès réception de la commande (□ = 0)

Dans ce cas, la production est pour stock. Le cycle de production de H jours commençant à la réception d'une commande, on s'intéresse à la décision de production à lancer en début de cycle, sachant que l'on cherche à définir le niveau de recomplètement R d'une politique de réapprovisionnement calendaire. Il convient alors de lancer en production la différence entre le niveau de recomplètement et la position de stock, la loi de demande portant sur une période de référence définie sur H + m jours, la quantité R devant couvrir les demandes jusqu'à la livraison suivante. La valeur de R peut être calculée directement à partir de la loi Binomiale $\mathcal{B}$ [n(H + m) ; p] ou en utilisant l'approximation Normale de cette loi, ce qui conduit à la relation 6.

$$R = n(H+m)p + t_{\alpha}\sqrt{n(H+m)p(1-p)}$$ Relation 6

Illustrons par un exemple numérique ce mécanisme, avec H = 5, □ = 0 (la demande arrivée en début de journée est immédiatement expédiée) et m = 4, pour la fabrication du moteur M_1 (p_1 = 54,46%), la production quotidienne n du client C étant toujours de 962 et le risque a accepté ne devant toujours pas dépasser 0,01%. Dans ce cadre, le niveau de recomplètement est R = 4887 (voir tableau 5). L'ordre de fabrication lancé à la fin du jour 1 est livré à fin du jour 5 ou, ce qui revient au même, à l'ouverture du jour 6.

Cycle	jour	Livraison (début jour)	Stock début	Demande	Stock fin	Production lancée (OF)
	1		2714	520	2194	2693
	2		2194	508	1686	
	3		1686	516	1170	
1	4		1170	531	639	
	5		639	511	128	
	6	2693	2821	518	2303	2584
	7		2303	534	1769	
	8		1769	500	1269	
2	9		1269	514	755	
	10		755	550	205	
	11	2584	2789	524	2265	2622
	12		2265	555	1710	
	13		1710	510	1200	
3	14		1200	526	674	
	15		674	544	130	
	16	2622	2752	509	2243	2644
	17		2243	526	1717	
	18		1717	520	1197	
4	19		1197	549	648	
	20		648	527	121	
	21	2644	2765	510	2255	2632
	22		2255	521	1734	
	23		1734	549	1185	
5	24		1185	530	655	

Tableau 13. Simulation de la politique de production : commande passée tous les 5 jours (*H*=5), disponibilité au bout de 4 jours (m=4), expédition à réception de la commande (□ = 0), absence de problème de qualité

b) Livraison postérieurement à la réception de la commande ($\lambda > 0$)

La différence avec le cas précédent tient au fait que le programme de production ne repose plus sur une demande aléatoire définie sur une période de H + m jours mais de H + m – λ jours, la demande des λ premiers jours étant certaine. La valeur de *R* peut être calculée directement à partir de la loi Binomiale $\mathcal{B}$ [n(*H* + m – λ) ; p] ou en utilisant l'approximation Normale de cette loi, ce qui conduit à la relation 7 (dont la relation 6 est un cas particulier).

$$R = \mathrm{n}(H + \mathrm{m} - \lambda)p + t_{\alpha}\sqrt{n(H + \mathrm{m} - \lambda)p(1 - p)} \qquad \text{Relation 7}$$

La quantité lancée en production au début d'un cycle est alors égale la somme des λ demandes connues et de la différence entre le niveau de recomplètement défini par la relation 7 et la quantité disponible en stock

Illustrons par un exemple numérique ce mécanisme, avec H = 5, λ = 2 (la demande arrivant en début de journée est livrée au début du surlendemain) et m = 4, pour la fabrication du moteur M_1 (p_1 = 54,46%), la production quotidienne n du client C étant toujours de 962 et le risque a accepté ne devant toujours pas dépasser 0,01%. Les deux commandes en attente de livraison sont respectivement 549 et 530 (valeurs générées aléatoirement) Dans ce cadre, le niveau de recomplètement (définie pour une demande calculée sur 5 + 4 – 2 = 7 jours) est R = 3818, ce qui correspond à un stock de sécurité de 151,7.

- à la fin du jour 1, au moment de déterminer la quantité à lancer en production, on a une connaissance certaines des commandes à expédier au début des jours 2 (530) et 3 (520) ; le stock final est de 2194 ; il faut donc lancer en production 530 + 520 + (3818 – 2194) = 2675 ;
- à la fin du jour 6, au moment de déterminer la quantité à lancer en production, on a une connaissance certaines des commandes à expédier au début des jours 7 (511) et 8 (518) ; le stock final est de 2285 ; il faut donc lancer en production 511 + 518 + (3818 – 2285) = 2563 ;
- etc.

Cycle	jour	Livraison (début jour)	Stock début	Demande arrivée	Demande expédiée	Stock fin	Production lancée (OF)
	1		2714	520	549	2194	2675
	2		2194	508	530	1686	
	3		1686	516	520	1170	
1	4		1170	531	508	639	
	5		639	511	516	128	
	6	2675	2803	518	531	2285	2563
	7		2285	534	511	1751	
	8		1751	500	518	1251	
2	9		1251	514	534	737	
	10		737	550	500	187	
	11	2563	2750	524	514	2226	2667
	12		2226	555	550	1671	
	13		1671	510	524	1161	
3	14		1161	526	555	635	
	15		635	544	510	91	
	16	2667	2758	509	526	2249	2623
	17		2249	526	544	1723	
	18		1723	520	509	1203	
4	19		1203	549	526	654	
	20		654	527	520	127	
	21	2623	2750	510	549	2240	2616
	22		2240	521	527	1719	
	23		1719	549	510	1170	
5	24		1170	530	521	640	

Tableau 14. Simulation de la politique de production : commande passée tous les 5 jours (H=5), disponibilité au bout de 4 jours (m=4), expédition 2 jours après la réception de la commande (□ = 2), absence de problème de qualité

2. Détermination du niveau de recomplètement en présence de problèmes de qualité en production

On supposera ici que le contrôle de qualité est fait en fin de production. On ne se préoccupe pas ici du traitement des pièces non conformes (rebut ou retraitement) car cela n'a pas d'incidence sur le stock de sécurité. La quantité à produire doit donc être majorée pour tenir compte des pièces défectueuses. On supposera qu'il n'y a pas de problème de capacité. La démarche utilisée pour les composants approvisionnés chez le client (§III.A.1.c et (§III.A.1.d) s'adapte facilement.

On détermine par la méthode de Monte Carlo la distribution des quantités Z à produire quotidiennement, chaque quantité requise X étant à majorer du nombre Y de produits défectueux. Cette distribution s'obtient par simulation, chaque valeur générée x (loi Binomiale) étant utilisée comme paramètre de la loi Binomiale Négative (x étant le nombre de succès et 1 – p étant la probabilité que la pièce soit correcte) dont on génère une réalisation y, ce qui donne une valeur *z*. L'exploitation de l'ensemble des valeurs équiprobables de *Z*, générées dans la simulation permet une reconstitution fiable de la distribution de probabilité cherchée.

Pour cette illustration, on est reparti des données du § b ci-dessus, avec une probabilité qu'une pièce produite ne soit pas conforme égale à 5%. Une simulation portant sur un million de valeurs générées en utilisant l'add-in d'Excel @Risk conduit à la distribution de la figure 8.

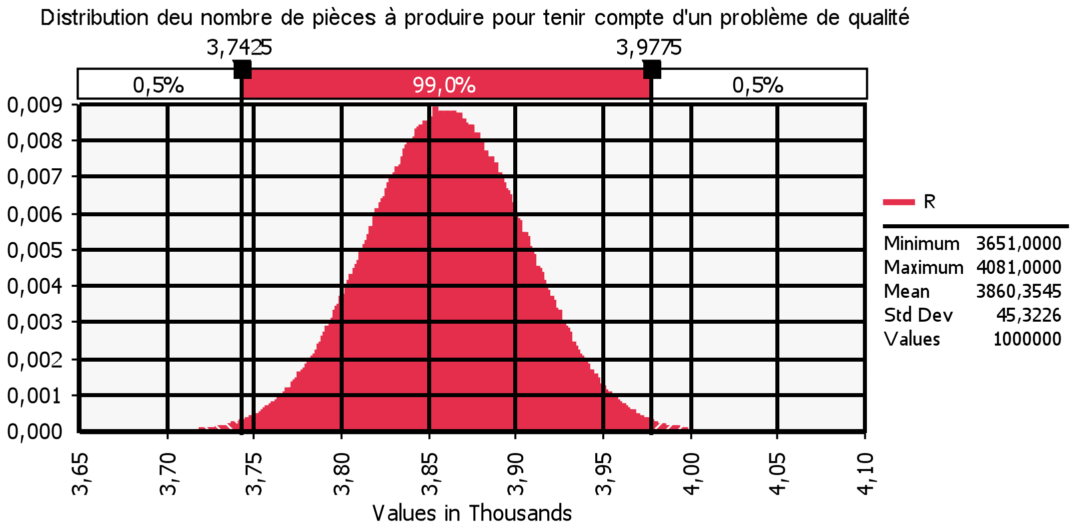


Figure 8. Distribution de probabilité du nombre *Z* de pièces à produire pour satisfaire une demande *X* de composants conformes ($X \sim \mathcal{B}$(962.7 ; 54,56%) sachant que chaque pièce produite a une probabilité de 95% d'être conforme

La valeur *R* de *Z* telle que P($Z > R$) = 0,01% est R = 4029 qui est la valeur du niveau de recomplètement à retenir pour tenir compte de ce problème de qualité. Le stock de sécurité est de 168,6 contre 151,7 en l'absence de problème de qualité. La simulation du tableau 14 est modifiée dans le tableau 15 pour tenir compte du problème de qualité

Cycle	jour	Livraison (début jour)	Livraison correcte	Stock début	Demande arrivée	Demande expédiée	Stock fin	Production lancée (OF)
	1			2714	520	549	2194	2885
	2			2194	508	530	1686	
	3			1686	516	520	1170	
1	4			1170	531	508	639	
	5			639	511	516	128	
	6	2885	2741	2869	518	531	2351	2707
	7			2351	534	511	1817	
	8			1817	500	518	1317	
2	9			1317	514	534	803	
	10			803	550	500	253	
	11	2707	2572	2825	524	514	2301	2802
	12			2301	555	550	1746	
	13			1746	510	524	1236	
3	14			1236	526	555	710	
	15			710	544	510	166	
	16	2802	2662	2828	509	526	2319	2763
	17			2319	526	544	1793	
	18			1793	520	509	1273	
4	19			1273	549	526	724	
	20			724	527	520	197	
	21	2763	2625	2822	510	549	2312	2754
	22			2312	521	527	1791	
	23			1791	549	510	1242	
5	24			1242	530	521	712	

Tableau 15. Simulation de la politique de production : commande passée tous les 5 jours (*H*=5), disponibilité au bout de 4 jours (m=4), expédition 2 jours après la réception de la commande (□ = 2), pièce produite avec une probabilité de 95% d'être correcte.

- à la fin du jour 1, au moment de déterminer la quantité à lancer en production, on a une connaissance certaines des commandes à expédier au début des jours 2 (530) et 3 (520) ; le stock final est de 2194 ; il faut donc lancer en production 530 + 520 + (4029 – 2194) = 2885 ; après contrôle de qualité, 2741 composants sont corrects, valeur générée aléatoirement à partir de la loi $\mathcal{B}$(2741 ; 0,95) ;

- à la fin du jour 6, au moment de déterminer la quantité à lancer en production, on a une connaissance certaines des commandes à expédier au début des jours 7 (511) et 8 (518) ; le stock final est de 2351 ; il faut donc lancer en production 511 + 518 + (4029 – 2351) = 2707 ;

après contrôle de qualité, 2572 composants sont corrects, valeur générée aléatoirement à partir de la loi $\mathcal{B}$(2707 ; 0,95)

- etc.

IV. Le problème du régime de croisière

Dans ce qui précède, les solutions proposées reposent sur l'hypothèse implicite d'un régime de croisière. La remise en cause de cette hypothèse ne pose pas de problème si le changement porte sur le niveau de production globale : il suffit de remplacer les niveaux de recomplètement pour que le système passe au nouveau régime de croisière avec une augmentation ou une diminution du stock de sécurité variant dans le même sens que le niveau de production.

Le changement de structure est plus compliqué à prendre en compte. Il, en général, souhaitable d'utiliser une technique de lissage exponentiel pour mettre à jour l'évolution de la structure de la demande en pondérant ce que l'on peut considérer comme relevant de la tendance, de ce que l'on peut considérer comme accidentel.

Pour mettre à jour dynamiquement cette structure, on a intérêt à utiliser le lissage exponentiel simple[12]. On note $\hat{p}_{it}$ les probabilités de demande issues d'un lissage exponentiel, avec $\hat{p}_{it} = \alpha \cdot p_{it} + (1-\alpha)\hat{p}_{it-1}$.La même technique de lissage est utilisée pour l'ensemble des références d'un même type de câblages. Dès lors, on a $\sum_i \hat{p}_{it} = \sum_i \alpha \cdot p_{it} + (1-\alpha)\hat{p}_{it-1} = \alpha \sum_i p_{it} + (1-\alpha)\sum_i \hat{p}_{it-1} = \alpha \cdot 1 + (1-\alpha) \cdot 1 = 1$.

Le choix du coefficient du lissage exponentiel α est difficile, il met en balance la prise en compte des modifications de structure qui implique un coefficient élevé avec une atténuation de l'impact de l'aléa ce qui conduit à utiliser un coefficient faible. L'évolution lente de la structure de la demande milite en faveur d'un coefficient faible, entre 0,1 et 0,2. On peut également le déterminer par une minimisation des écarts constatés (min $\sum(\hat{p}_{it} - p_{it})^2$) sur une partie de l'historique. Cette technique a pour inconvénient de générer des oscillations en raison de phénomènes d'auto-corrélation. Il s'agit de l'effet Slutsky-Yule lié à l'usage des filtres linéaires (le lissage exponentiel appartenant à cette catégorie). Il convient alors de majorer l'estimation courante pour contrer ce bai et éviter de courir un risque supérieur à celui accepté. L'analyse de

[12] Voir V. Giard, *Gestion de la production et des flux*, 3e éd., 2003, p.1046-1061.

plusieurs évolutions de structures de demandes dans l'industrie automobile a conduit à rejeter l'hypothèse de régime stationnaire pour les composants alternatifs les plus demandés Ceci amène à ne pas utiliser les résultats analytiques classiques sur la variance d'un filtre de type exponentiel simple. On préfère alors tenir compte de l'erreur de prévision $\sigma_i = \sqrt{\sum(\hat{p}_{ti} - p_{ti})^2 / \mathrm{T}}$, sur les T dernières prévisions réalisées et majorer $\hat{p}_{it}$ d'une valeur $T_\alpha \sigma_i$ en supposant acceptable l'approximation Normale de la variable aléatoire « estimateur de la proportion du composant alternatif *i* ».

V. Code VBA de calcul de la valeur de X d'une loi Binomiale, la plus faible et ayant une probabilité d'être dépassé inférieure à un seuil □

La valeur du niveau de recomplètement *R* calculé pour une demande suivant la loi Binomiale $\mathcal{B}$ (n, p), avec un risque □ d'être dépassée est obtenue avec la fonction S_opt suivante, créée sous VBA, appelée dans une cellule d'une feuille d'Excel avec trois arguments : □, n, p.

Cette fonction donne la valeur la plus faible de X telle que P($X > R$) < □, ce qui revient à diminuer le risque que l'on est prêt à prendre plutôt que de l'augmenter

```
Function S_opt(Probabilite_Cible, nombre_d_epreuves, probabilite_p)
I1 = Application.Round(nombre_d_epreuves * probabilite_p, 0)
Probabilite_Courante = 1 - Application.BinomDist(I1, nombre_d_epreuves, probabilite_p, True)
If Probabilite_Courante > Probabilite_Cible Then
  Do
    I1 = I1 + 1
    Probabilite_Courante = Probabilite_Courante - Application.BinomDist(I1, nombre_d_épreuve,
                                                                          probabilite_p, False)
  Loop While Probabilite_Courante > Probabilite_Cible And I1 < nombre_d_epreuves + 1 '*******
  S_opt = I1
Else
  Do
    Probabilite_Courante = Probabilite_Courante + Application.BinomDist(I1, nombre_d_epreuves,
                                                                          probabilite_p, False)
    I1 = I1 - 1
  Loop While Probabilite_Courante < Probabilite_Cible
  S_opt = I1 + 1
```

```
End If
End Function
```