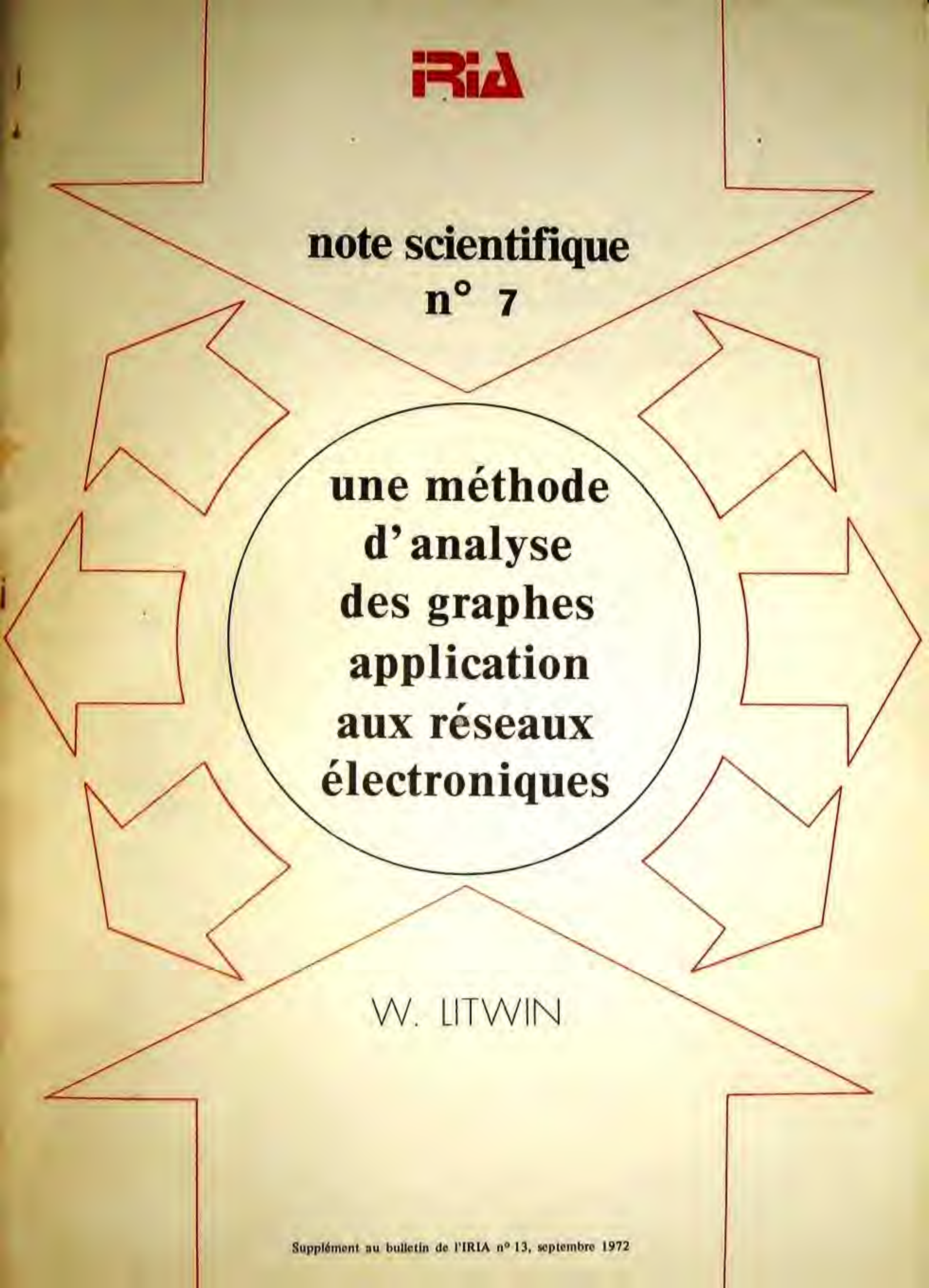


note scientifique
n° 7



**une méthode
d'analyse
des graphes
application
aux réseaux
électroniques**

W. LITWIN

une méthode d'analyse des graphes application aux réseaux électroniques

W. LITWIN

RÉSUMÉ

On présente une méthode d'analyse des réseaux, dite méthode des nombres structuraux. Ses avantages principaux sont les suivants :

- Description simple et compacte de la structure des réseaux importants.
- Calcul algébrique de différentes transformations de structure (court-circuits, interruptions, etc. . .).
- Calcul des formules des différents paramètres des réseaux électroniques sans passer par des équations linéaires et donc ni par des calculs matriciels ni par des calculs de déterminants.
- Mise sur ordinateur des calculs facile.

Dans cette publication on a cherché à formaliser cette méthode proposée par Monsieur le Professeur S. Bellert de l'Ecole Polytechnique de Varsovie. On donne aussi des exemples d'analyse de dipôles et de quadripôles et les formules de calcul littéral des paramètres caractéristiques. On explique la mise sur ordinateur et on présente des exemples de calcul de formules d'impédance faites par ordinateur pour quelques réseaux typiques.

ABSTRACT

In this paper, we expose one method of network analysis, called structural numbers method. Its principal feature are :

- Simple and compact description of large network structures.*
- Algebraic computation of different structure transforms (short-circuits interruptions, etc. . .).*
- Computation of the expressions for the different parameters of electronic network, without using matrix and determinant computation techniques.*
- Easy implementation on digital computers.*

This approach was first proposed by S. Beillert, professor in Warsaw Polytechnic School. In this paper, we tried to formalize this method. We give exemples of dipole and quadripole analysis and the expressions for the formal computation of the characteristic parameters. We explain how it can be implemented on a computer and we give some exemples of impedance formular computation by computer for some typical networks.

sommaire

1. – Algèbre des nombres structuraux	3
2. – Rappels sur les graphes	9
3. – Interprétation géométrique des nombres structuraux	12
4. – Généralisation des nombres structuraux	21
5. – Analyse des réseaux passifs	24
5.1 – Dipôle	24
5.2 – Analyse du quadripôle	29
6. – Analyse des réseaux par ordinateur	31
6.1 – Représentation machine de NS	31
6.2 – Quelques points particuliers	32
6.3 – Exemple des calculs par ordinateur	33
7. – Bibliographie	39

algèbre des nombres structuraux

Etant donné l'ensemble X , on note $P(X)$ l'ensemble des sous-ensembles finis de X .

DÉFINITION 1.1

On appelle nombre structural (NS) chaque élément de $P(P(X))$. On note par $\alpha, \beta, \delta, \dots$ les éléments de X ; par $a, b, c, \dots$ les éléments de $P(X)$; par $A, B, C, \dots$ les éléments de $P(P(X))$.

DÉFINITION 1.2

Soient A, B deux nombres structuraux, soit :

$$D_{AB} = \{ d = (a, b) ; a \in A, b \in B, a \cap b = \emptyset \}$$

soit f application de $D_{AB} \rightarrow P(X)$ telle que :

$$f : (a, b) \rightarrow a \cup b$$

un produit de deux NS A et B , note $A \cdot B$ ou AB , est un NS tel que :

$$A \cdot B = \{ c : c \in f(D_{AB}), \text{ card } (f^{-1}(c)) \text{ impair} \}$$

une somme de deux NS A et B , notée $A + B$, est un NS tel que :

$$A + B = \{ c : (c \in A \text{ ou } c \in B) \text{ et } c \notin A \cap B \}$$

on voit que la somme de A et B est leur différence symétrique, en tant que parties de $P(X)$.

La construction de la loi " $\cdot$ " permet à $C = A \cdot B$ appartenir à $P(P(X))$.

REPRÉSENTATION DU NS

On fait une indexation de nombre structural A par $I_A = \{1, 2, \dots, N\}$

$$A = (a_i)_{i \in I_A} = [a_1, a_2, \dots, a_n]$$

les éléments de chaque a_i seront indexés par les :

$$J_i = \{1, 2, \dots, N_i\}, i \in I_A$$

on obtient donc un tableau :

$$A = (a_i)_{i \in I_A} = [(\alpha_{ji})_{i \in I_A, j \in J_i}]$$

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{1k} & \alpha_{1m} \\ \alpha_{21} & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \alpha_{jk}^k & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{j1}^1 & \vdots & \vdots & \alpha_{jn}^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \alpha_{j2}^2 & \vdots & \vdots \end{bmatrix}$$

EXEMPLES

1) $X = N$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \\ 5 & \end{bmatrix}$$

2) $X = P(N)$

$$A = \begin{bmatrix} \{1,2\} & \{3,7,5\} & \phi \\ \{1\} & \{2\} & \end{bmatrix}$$

3) $X = \{r, L, c\}$

$$A = \begin{bmatrix} r & c & r \\ L & c & \end{bmatrix}$$

Avec cette représentation, la définition du NS implique :

- a) Les colonnes sont des ensembles non ordonnés d'éléments de X .
- b) Le tableau est un ensemble nonordonné de colonnes, éléments de $P(X)$.
- c) Il n'y a pas de colonnes contenant deux ou plusieurs éléments identiques.
- d) Il ne peut pas y avoir de colonnes identiques.

EXEMPLES : (pour $\alpha_{jk} \in X = N$)

1) **Egalité :**

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 7 & 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 7 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

Deux nombres structurels sont égaux si ils contiennent les mêmes colonnes dans n'importe quel ordre.

2) **Somme :**

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 3 & 6 & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 2 & 2 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 3 & 6 & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 2 & 4 \\ 4 & 5 & 6 & \end{bmatrix}$$

La somme contient toutes les colonnes de A et B sauf les colonnes identiques.

3) **Multiplication :**

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 2 & 7 \\ 2 & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 & 2 & 3 & 2 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 3 & 1 & 4 & 3 & 1 & 4 & 3 \\ 4 & 4 & 4 & 2 & 2 & 2 & 7 & 7 & 7 \\ & & & 2 & 2 & 2 & & & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 2 & 7 \\ & & 2 & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \\ 4 & 7 \\ 2 & \end{bmatrix}$$

Le produit de A par B définit un NS qui en tant qu'ensemble est la réunion de toutes les combinaisons des colonnes de A et B, en éliminant le nombre pair maximum des colonnes identiques ; et sans colonnes comprenant deux ou plusieurs éléments identiques.

PROPOSITION 1.3

- 1) Le nombre $[\]$, (le NS qui est un ensemble vide) est l'élément neutre pour l'addition.
- 2) Le nombre $[\phi]$ (qui contient un seul élément étant un ensemble vide), est l'élément neutre pour la multiplication.

DÉMONSTRATION

- 1) Par définition de l'addition.
- 2) On note a un élément de A , (a est une colonne).

$$a \cup \phi = a \Rightarrow [a_1 \dots a_n] [\phi] = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ \phi & \phi & \dots & \phi \end{bmatrix} = [a_1 \dots a_n] = A$$

PROPOSITION 1.4

Soit E ensemble des NS pour un X donné. Alors :

- a) Par rapport à l'addition E est un groupe abélien.

DÉMONSTRATION

Soit A, B deux NS. Par la définition de la loi "+" on a :

- 1) $A + B \in E$ d'où E est fermé pour "+".
- 2) $A + B = B + A$ d'où la commutativité.
- 3) $A + [\] = A$ (prop. 3) d'où $[\]$ élément neutre pour "+".
- 4) $A + A = [\]$ d'où A inverse de A pour la loi "+".
- 5) $(A + B) + C = A + (B + C)$ d'où associativité.

- b) Par rapport à la multiplication E est un monoïde commutatif :

DÉMONSTRATION :

- 1) $A \cdot B \in E$
- 2) $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$ par la construction de la loi "."
- 3) $A \cdot [\phi] = A$ proposition 1.3
- 4) $A \cdot B = B \cdot A$ par définition de "."

- c) On pose :

$$[\] \stackrel{df}{=} 0 \quad [\phi] \stackrel{df}{=} 1$$

Alors évidemment $0 \neq 1$

CORROLAIRE :

L'ensemble E de NS (pour les opérations "+" et "." définies dans la définition 2) la structure d'un anneau commutatif, unitaire, avec les diviseurs de zéro.

DÉMONSTRATION

La définition de la loi "+" et "." implique que :

$$(A+B) \cdot C = AC+BC \quad A, B, C \in P(P(X))$$

Avec les propriétés a, b, c de la proposition précédente, c'est précisément une définition d'anneau. Pour montrer l'existence des diviseurs de zéro il suffit de voir que $\forall A \in E$ tel que $A \not\equiv \phi$ on a : $A \cdot A = 0$ C.Q.F.D.

PROPOSITION 1.5

Chaque NS $[(\alpha_{i,k})]$, $i \in [1, \dots, m_k]$, $k \in [1, \dots, n]$ peut être décomposé de la façon suivante :

$$[(\alpha_{i,k})] = \sum_k \prod_i [\alpha_{ik}]$$

DÉMONSTRATION

$$[(\alpha_{i,k})] = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{m_1 1} & \dots & \alpha_{m_1 n} \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^n \begin{bmatrix} \alpha_{1k} \\ \alpha_{m_1 k} \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^n \prod_{i=1}^{m_k} [\alpha_{ik}]$$

EXEMPLE :

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} = [1] [3] + [2] [4]$$

PROPOSITION 1.6

Dans l'anneau des NS quelque soit A, B :

$$A + B = A - B$$

DÉMONSTRATION

On rappelle (proposition 1.4) que $\forall A, A + A = 0$, alors :

$$A + B = A + B + 0 = A + B + (-B - B) = A + (B - B) - B = A + 0 - B = A - B$$

On a démontré (corrolaire de la proposition 1.3) que l'anneau E des nombres structuraux admet les diviseurs de zéro. On sait que l'ensemble des diviseurs de zéro de A est un idéal dans un anneau commutatif. Si on pose : $A^* = \{X : X \in E \text{ et } AX = 0\}$ et si $X_1, X_2 \in A^*, C \in E$, on peut exprimer cette propriété de la façon suivante :

$$AX = 0 \Rightarrow A(CX) = A(XC) = (AX)C = 0 \Rightarrow CX, XC \in A^*$$

$$AX_1 = 0 \wedge AX_2 = 0 \Rightarrow A(C_1 X_1 + C_2 X_2) = AC_1 X_1 + AC_2 X_2 = 0 + 0 \Rightarrow C_1 X_1 + C_2 X_2 = 0$$

A^* est l'ensemble de tous les diviseurs de zéro par rapport à A. On peut déterminer cet ensemble comme suit :

$$A = \{X : \forall x \in X, a \in A ; a \cap x \neq \emptyset \text{ ou } \text{card}(f^{-1}(a \cup x)) \text{ pair}\}$$

Si on regarde la définition de la multiplication on voit que la condition ci-dessus est nécessaire et suffisante pour que $A \cdot X = 0$, avec $X \neq 0$.

PROPOSITION 1.7

Etant donné l'équation $A = X \cdot B ; A \neq 0$.

- 1) Si une solution X de cette équation existe, alors :
 $\forall a \in A, \exists b \in B \text{ tel que } b \subset a$
- 2) Si $\emptyset \notin X$ alors :
 $\forall a \in A \exists b \in B \text{ tel que } b \subset a$
 $\neq$
- 3) Si $\emptyset \in B$ alors :
 $X = A \cdot B$
- 4) Si $\emptyset \notin B$ alors :
 $A \cdot B = 0$

Exemple de NS qui n'est pas à lignes constantes.

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \\ 6 & 6 \end{bmatrix}$$

Dans ce qui suit A est supposé à lignes constantes.

DÉFINITION 1.9

On appelle décomposition canonique du NS A, la décomposition de A en un produit de diviseurs premiers contenant uniquement les éléments des $a_k \in A$; $k = 1, 2, \dots, N$ (a_k - k-ième colonne). Ces diviseurs sont dits facteurs canoniques.

PROPOSITION 1.10

Soit F_j , facteur canonique à une ligne. Soit :

$$A = \prod_{i=1}^m F_i$$

On pose :

$$F_j' = \sum_{i=1}^m \epsilon_i F_i \quad \epsilon_i = 0, 1 ; \epsilon_j = 1 ; 1 \leq j \leq m$$

Alors :

$$A = F_j' \prod_{\substack{i=1 \\ j \neq i}}^m F_i$$

DÉMONSTRATION :

$$F_j' \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^m F_i = \left(\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^m \epsilon_i F_i + F_j \right) \prod_{\substack{i=1 \\ j \neq i}}^m F_i = 0 + F_j \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^m F_i = A$$

EXEMPLE

$$A = [2 \ 3 \ 7] [3 \ 4 \ 5] = [2 \ 3 \ 7] [2 \ 7 \ 4 \ 5] = [2 \ 7 \ 4 \ 5] [3 \ 4 \ 5]$$

PROPOSITION 1.11

Etant donné n NS, notés $P_1, P_2, \dots, P_n$ et tels que

$$\forall a \in P_i, \exists j_1, j_2, \dots, j_{2k-1} \neq i, \text{ tels que } a \in P_{j_1}, P_{j_2} \dots P_{j_{2k-1}}.$$

Alors

$$P_1 \cdot P_2 \cdot \dots \cdot P_n = 0$$

DÉMONSTRATION

On a :

$$a \in P_1 + P_2 + \dots + P_{n-1} \Rightarrow a \in P_n$$

et :

$$a \in P_n \Rightarrow a \in P_1 + P_2 + \dots + P_{n-1}$$

Cela équivaut à :

$$P_1 + P_2 + \dots + P_{n-1} = P_n$$

et on a :

$$P_1 \cdot P_2 \dots P_n = P_1 \cdot P_2 \dots P_{n-1} \cdot (P_1 + P_2 + \dots + P_{n-1}) = 0$$



rappel sur les graphes

2.1 – Simplex unidimensionnel : homeomorphisme de segment (fig. 2.1).

Le simplex non orienté est noté $\{x,y\}$, le simplex orienté de x à y est noté (x,y) .



Fig. 2.1

2.2 – Un graphe (réseau), est un ensemble des simplexes. Dans ce qui suit on suppose que cet ensemble est fini.



Fig. – 2.2

2.3 – Un graphe est non orienté, (partiellement orienté) [orienté] si ses simplexes sont non orientés, (ne sont pas tous orientés), [sont tous orientés].

2.4 – L'ensemble des sommets de réseau est l'ensemble des extrémités des simplexes.

2.5 – Deux graphes S_1, S_2 sont homeomorphes si $\exists f$ bijective bicontinue $S_1 \rightarrow S_2$

La relation d'homeomorphisme définit une partition de l'ensemble de graphes. La classe des graphes homeomorphes est appelée la structure. Deux graphes homeomorphes sont appelés isostructuraux.

2.6 – On appelle chaîne, la séquence des simplexes :

$$\{ \{x_1, y_1\}, \{x_2, y_2\}, \dots, \{x_n, y_n\} \} \text{ telle que :}$$

$$\forall i \quad x_i = y_{i-1}$$

on dit qu'une chaîne est élémentaire (fig. 2.2) si tout sommet se trouvant sur cette chaîne n'est rencontré qu'une fois. Une chaîne élémentaire telle que :

$$y_n = x_1$$

est appelée cycle élémentaire (fig. 2.3) ou plus simplement cycle).

2.7 – Un graphe est connexe si pour tout couple de sommets distincts $\exists$ une chaîne allant de l'un à l'autre. Dans ce qui suit, un graphe est supposé être connexe.

2.8 — Une dendrite est un graphe sans cycles élémentaires (fig. 2.3).

2.9 — Soit S un graphe avec N sommet. Soit S' un sous ensemble strict de l'ensemble des simplexes du graphe S avec N' sommets. Si $N' \subsetneq N$. Alors S' est dit sous graphe du graphe S . Si $N = N'$ alors S' est dit graphe partiel de S . Si S' est une dendrite (un cycle) on dit que c'est une dendrite (un cycle) de S .

2.10 — Soit S un graphe. Soit X un ensemble, dit espace descriptif. Soit f une application injective de S dans X , dite fonction descriptive. On appelle graphe déterminé (réseau déterminé) le couple (S, f) . $\text{Im}_f(S)$ est dite description de S .



Fig. - 2.3

2.11 — Un arbre est une dendrite déterminée. Un arbre du graphe (arbre du réseau, arbre maximal) est un arbre contenant tous les sommets du graphe. Si A , est un arbre de G , alors l'ensemble des simplexes qui n'appartient pas à A , est un co-arbre de G .

2.12 — Soit A_1 , un arbre du réseau déterminé (S_1, f_1) , soit A_2 un arbre du réseau déterminé (S_2, f_2) . On dit que les deux arbres A_1 et A_2 sont similaires si :

$$\text{Im}_{f_1}(A_1) = \text{Im}_{f_2}(A_2)$$

Dans ce cas on note $A_1 \sim A_2$.



Fig. - 2.4

Exemple des arbres similaires, mais pas tous isostructuraux.

Deux arbres isostructuraux sont évidemment similaires. La réciproque n'est pas toujours vraie (fig. 2.4).

2.13 – Soit (S_1, f_1) , (S_2, f_2) deux graphes déterminés. Soit A_1^* l'ensemble des «arbres du graphe» de (S_1, f_1) ; A_2^* l'ensemble des «arbres du réseau» de (S_2, f_2) . Soit K , une bijection de A_1^* sur A_2^* telle que :

$$\forall A_1 \in A_1^* , A_1 \sim K(A_1)$$

Alors on dit que les réseaux (S_1, f_1) et (S_2, f_2) sont similaires et on note $(S_1, f_1) \sim (S_2, f_2)$.

La relation de similarité des réseaux déterminés est une relation d'équivalence. Une classe d'équivalence est appelée classe des similarités. Deux réseaux égaux, aux branches en court-circuit près, sont dans la même classe des similarités.



interprétation géométrique des nombres structuraux

DÉFINITION 3.1

Soit A un NS, $A \in P(P(X))$, A à lignes constantes, $A \neq 0$, $A \neq 1$.

On note a une colonne de A . Soit G le graphe déterminé, $G = (S, f)$, $f : S \Rightarrow X$.

On note T un "arbre du graphe" de G . Si $\exists$ la bijection $g : A \Rightarrow G$, $g : a \Rightarrow T$ — telle que :

$$\text{Im}_f(g(a)) = a$$

alors G est appelé l'image géométrique de A , et noté $G = \text{Im}(A)$. On obtient donc la correspondance "arbre du graphe", colonne du NS ; (figure 3.1). A un NS, correspond une classe des similarités.

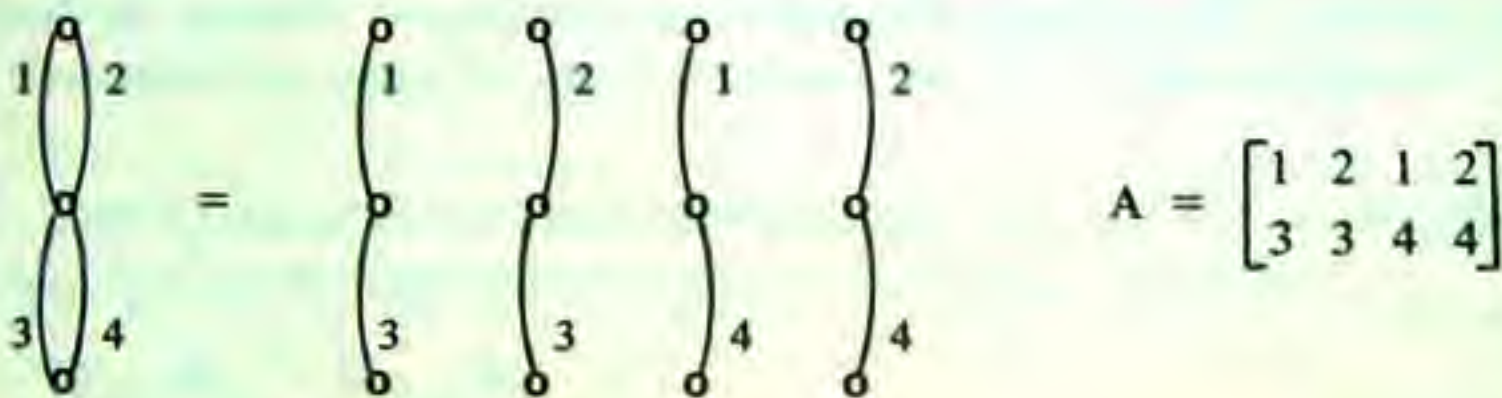


Fig. - 3.1

On pose :

$\text{Im}(0) = G$ non connexe

$\text{Im}(1) = G$ avec un seul sommet

PROPOSITION 3.2

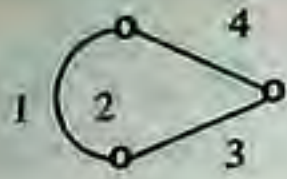
Soit A un NS ayant une image $G = (S, f)$ connexe avec n sommets, $n \geq 2$.

Soit S_i , l'ensemble des branches du i -ème sommet de G , sauf les branches en court-circuit.

Soit P_i un facteur premier à une ; $F_i = \text{Im } f(S_i)$. Alors on peut décomposer A sous la forme :

$$A = \prod_{i=1}^{n-1} P_i$$

Le choix des $n-1$ sommets est sans importance (figure 3.2)



$$A = [1 \ 2 \ 4] \ [3 \ 4] = [1 \ 2 \ 4] \ [1 \ 2 \ 3] =$$

$$= [1 \ 2 \ 3] \ [3 \ 4] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 4 & 4 & 4 \end{bmatrix}$$

Fig. - 3.2

DÉMONSTRATION

Explication graphique (figure 3.2). La proposition est vraie pour le graphe avec un ou deux sommets. Supposons que G à n sommets. Faisons le court circuit entre deux nœuds, par exemple 1 et 2.

On obtient le graphe G^* dans lequel les anciens sommets 1 et 2 deviennent par exemple le nœud numéro 1 ; $G^* = \text{Im}(A^*)$ ou A^* est égale par hypothèse :

$$(1) \quad A^* = P_1^* \ P_3^* \ \dots \ P_{n-1}^*$$

Le réseau étant inchangé dans les sommets $3, \dots, n-1$ donc :

$$(2) \quad A^* = P_1^* \ P_3^* \ \dots \ P_{n-1}^* = P_1^* \ A^{**}$$

De la définition de l'addition dans l'anneau de nombres structurels :

$$(3) \quad P_1^* = P_1 + P_2$$

Supposons que les sommets 1 et 2 ont k branches communes $(s_1, \alpha_1), (s_2, \alpha_2), \dots$

(s_k, α_k) ; $\alpha_i = f(s_i)$, $i = 1, 2, \dots, k$.

On pose :

$$P_1 = P_1' + \sum_{i=1}^k [\alpha_i] = P_1' + [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k]$$

$$P_2 = P_2' + \sum_{i=1}^k [\alpha_i] = P_2' + [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k]$$

on voit que $[\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k] = P_1 \cap P_2$ et que (prop. 1.4) :

$$(4) \quad P_1 + P_2 = P_1' + \sum_{i=1}^k [\alpha_i] + P_2' + \sum_{i=1}^k [\alpha_i] = P_1' + P_2'$$

On remarque que chaque "arbre du graphe" de G , est un "arbre du graphe" de G^* avec une branche en plus : soit α_i ; $i = 1, 2, \dots, k$; soit une des branches qui lient le sommet 1 ou 2 aux autres sommets de G .

De la définition de multiplication du nombre structural et de la définition de son image il suit que :

$$(5) \quad A = A^* \sum_{i=1}^k [\alpha_i] + P_1' \cdot P_2' \cdot A^{**}$$

On pose :

$$A' = P_1 \cdot P_2 \cdot P_3 \cdot \dots \cdot P_{n-1} = P_1 \cdot P_2 \cdot A^{**}$$

Donc

$$\begin{aligned} A' &= (P_1' + \sum_{i=1}^k [\alpha_i]) (P_2' + \sum_{i=1}^k [\alpha_i]) A^{**} \\ &= (P_1' + P_2') A^{**} \sum_{i=1}^k [\alpha_i] + \left(\sum_{i=1}^k [\alpha_i] \right)^2 \cdot A^{**} + P_1' \cdot P_2' A^{**} \end{aligned}$$

Le deuxième terme est égal à zéro car, $\forall A \notin \phi$:

$$A^2 = O$$

D'après (4), (3), (2) :

$$(P_1' + P_2') A^{**} = (P_1 + P_2) A^{**} = P_1^* A^{**} = A^*$$

Il résulte d'après (5) que :

$$A = A'$$

C.Q.F.D.

Corollaires :

- 1) $\forall i, \forall [\alpha]$ tel que $[\alpha] \cap P_i \neq \phi$, $\exists$ au plus un $j \neq i$ tel que $[\alpha] \cap P_j \neq \phi$.
- 2) $\exists i, \exists [\alpha]$ tels que $\forall j \neq i \quad [\alpha] \cap P_i \neq \phi \Rightarrow [\alpha] \cap P_j = \phi$

La première condition vient du fait que les branches α ont deux extrémités uniquement. Ceci implique, d'autre part, que $A \notin \phi$ a tels que $\text{card } f^{-1}(a) = 3, 5, \dots$; f étant défini dans la définition 1.2. Les α de la deuxième condition correspondent aux branches du n -ième sommet de G .

$$3) \quad (\nexists P_i, P_j \text{ tels que } P_i = P_j \text{ et } i \neq j)$$

$$4) \quad \nexists i, \text{ tel que } P_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n-1} \epsilon_j P_j \quad \epsilon_j = 0, 1$$

Les négations de ces deux corollaires impliqueraient $A = O$, donc G sans arbres, donc non connexe.

DEFINITION 3.3

Soit A un NS, $A \in P(P(X))$. Soit α élément de X .

Soit a élément de A tel que $\alpha \in a$. Alors la dérivée de A par rapport à α , est le NS noté $\partial A / \partial \alpha$ tel que :

$$\frac{\partial A}{\partial \alpha} = \{b : b = a \setminus \{\alpha\}\}$$

Autrement dit c'est l'ensemble de colonnes de A contenant α , avec l'élément α ensuite supprimé.

EXEMPLE

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 & 3 & 5 \\ 3 & 9 & 7 & 4 & 8 \end{bmatrix} \quad \frac{\partial A}{\partial 1} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 3 & 4 & 7 \end{bmatrix} \quad \frac{\partial A}{\partial 2} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} \quad \frac{\partial A}{\partial 5} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$$

Les propriétés :

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} (A1 + A2) = \frac{\partial A1}{\partial \alpha} + \frac{\partial A2}{\partial \alpha}$$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} (A1 \cdot A2) = \frac{\partial A1}{\partial \alpha} \cdot A2 + \frac{\partial A2}{\partial \alpha} \cdot A1$$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} [\alpha] = 1$$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_1} [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_K] = 1$$

DÉFINITION 3.4

On appelle co-dérivée de $A \in P(P(X))$ par rapport à l'élément $\alpha \in X$, le NS noté $\delta A / \delta \alpha$ tel que

$$\frac{\delta A}{\delta \alpha} = \{b : b \neq \alpha, b \in A\}$$

EXEMPLE

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 & 3 & 5 \\ 3 & 4 & 7 & 4 & 8 \end{bmatrix} \quad \frac{\delta A}{\delta 1} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \\ 4 & 8 \end{bmatrix} \quad \frac{\delta A}{\delta 2} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 5 & 5 \\ 3 & 4 & 7 & 8 \end{bmatrix} \quad \frac{\delta A}{\delta 5} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 3 \\ 3 & 4 & 4 \end{bmatrix}$$

Propriétés :

$$\frac{\delta}{\delta \alpha} (A_1 + A_2) = \frac{\delta A_1}{\delta \alpha} + \frac{\delta A_2}{\delta \alpha}$$

$$\frac{\delta}{\delta \alpha} (A_1 \cdot A_2) = \frac{\delta A_1}{\delta \alpha} A_2 + \frac{\delta A_2}{\delta \alpha} A_1 + A_1 \cdot A_2 = \frac{\delta A_1}{\delta \alpha} + \frac{\delta A_2}{\delta \alpha}$$

$$\frac{\delta}{\delta \alpha} (1) = 0$$

$$\frac{\delta}{\delta \alpha} 1 = 1$$

DÉFINITIONS 3.5

On appelle complément de A , le NS noté A^d tel que :

$$A^d = \{b : b = X_A \setminus a, a \in A, X_A = \cup a\}$$

Evidemment

$$(A^d)^d = A$$

EXEMPLE

$$A = [a_1, a_2, a_3] = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 2 \end{bmatrix} \quad X_A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$B = [b_1, b_2, b_3] = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 3 \\ 5 & 5 & 4 \end{bmatrix}$$

On voit que, si $A = \text{Im}(G)$, alors :

$$A^d = \{b : b = \text{Im}_f(g) ; g \text{ étant co-arbre de } G\}$$

DÉFINITION 3.6

On appelle co-image de A , le graphe déterminé G tel que $G = \text{Im}(A^d)$. Dans ce cas on écrit :

$$G = \text{Im}^d(A).$$

On voit que, quel que soit G' similaire à G , également $G' = \text{Im}^d(A)$. Chaque colonne de A est une description d'un co-arbre de G . Tous les co-arbres de G sont décrits par A , car tous les arbres de G sont décrits par A^d et $(A^d)^d = A$. Aussi, si on pose $G = \text{Im}(A)$, alors :

$$G = \text{Im}((A^d)^d) = \text{Im}^d(A^d)$$

PROPOSITION 3.7

Si $G = \text{Im}(A)$ et G possède n sommets et m branches, alors

$$A^d = \prod_{i=1}^{m-n+1} P_i$$

ou P_i sont les facteurs premiers à une ligne, et chaque P_i est une description de i -ième cycle indépendant.

EXEMPLE

$$A^d = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A = [3 \ 2 \ 1]$$

$$A^d = [1 \ 2] [2 \ 3] \quad 1 \quad 2 \quad 3$$

PROPOSITION 3.8

- 1) $\text{Im} \left(\frac{\partial A}{\partial \alpha} \right) = \text{Im}(A)$ avec branche α en court-circuit
- 2) $\text{Im} \left(\frac{\partial A^d}{\partial \alpha} \right) = \text{Im}^d(A)$ avec une extrémité de la branche α déconnectée.
- 3) $\text{Im} \left(\frac{\delta A}{\delta \alpha} \right) = \text{Im}(A)$ avec une extrémité de l' α déconnectée, et connectée à l'autre.
- 4) $\text{Im} \left(\frac{\delta A^d}{\delta \alpha} \right) = \text{Im}^d(A)$ avec les deux extrémités de l' α court-circuitées, et une de ces extrémités est déconnectée ensuite.

DÉMONSTRATION

- 1) Supposons que la branche α appartienne aux sommets P_1 et P_2 .
D'après le corollaire 1 de la proposition 3.2 :

$$A = P_1(\alpha) \cdot P_2(\alpha) \cdot P_3 \cdot P_{n-1} \quad n = \text{nombre de sommets de } \text{Im}(A)$$

D'après les propriétés (2), (3), (4) de la dérivée :

$$\begin{aligned} \frac{\partial A}{\partial \alpha} &= \frac{\partial P_1}{\partial \alpha} \cdot P_2 \cdot \dots \cdot P_{n-1} + \frac{\partial P_2}{\partial \alpha} \cdot P_1 \cdot P_3 \cdot \dots \cdot P_{n-1} = \\ &= (P_1 + P_2) \cdot P_3 \cdot \dots \cdot P_{n-1} = A^* \end{aligned}$$

$\text{Im}(A^*)$ c'est $\text{Im}(A)$ avec α en court-circuit (P_1 et P_2 mis en court-circuit, proposition 3.2).

La preuve de 2,3 et 4 est faite de la même manière.

DÉFINITION 3.9

On appelle déterminant de NS A par rapport à la lettre Z , une fonction notée $\det_Z A$ défini de la façon suivante :

$$\det_Z A = \det_Z \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{m_1 1} & \dots & \alpha_{m_1 n} \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^n \prod_{i=1}^{m_k} Z_{\alpha_{ik}}$$

EXEMPLE

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix} \quad \det_Z A = Z_1 Z_2 + Z_3 Z_4 + Z_5 Z_6$$

$$\det_Y A = Y_1 Y_2 + Y_3 Y_4 + Y_5 Y_6$$

On a :

$$\det_Z \frac{\delta A}{\delta \alpha} = \frac{\delta}{\delta Z \alpha} \left[\det_Z A \right] \quad \frac{\delta}{\delta Z \alpha} \text{ désigne la dérivée dans le sens classique}$$

DÉFINITION 3.10

On appelle intersection de NS A et B , NS $A \cap B$ tel que :

$$A \cap B = \{ c : c \in A \text{ et } c \in B \}$$

EXEMPLE

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad A \cap B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Evidemment :

$$A \cap B = A \cup B + (A + B) \quad A \cup B = \{ c : c \in A, \text{ ou } c \in B \}$$

DÉFINITION 3.11

On appelle fonction de simultanéité des NS A et B , $A \cap B \neq 0$, une fonction définie de la façon suivante :

$$\text{Sim}_Z (A, B) = \sum_{k=1}^N f(\phi) \prod_{i=1}^{m_K} Z_{\alpha_{ik}}$$

avec :

$$Z_{\alpha_{ik}} \text{ une variable, } \alpha_{ik} \in c_k \in A \cap B, f(\phi) = \begin{cases} 1 & \text{si condition } \phi - \text{vrai} \\ -1 & \text{si condition } \phi - \text{fausse} \end{cases}$$

EXEMPLE

Soit α, β deux branches orientées du réseau partiellement orienté. On pose :

$$\text{Sim}_Z \left(\frac{\partial A}{\partial \alpha}, \frac{\partial A}{\partial \beta} \right) = \sum_{k=1}^N f(\phi) \prod_{i=1}^{m_K} Z_{\alpha_{ik}}$$

avec :

$$\alpha_{ik} \in c_k \in \frac{\partial A}{\partial \alpha} \cap \frac{\partial A}{\partial \beta}, f(\phi) = \begin{cases} 1 & \alpha, \beta \text{ ont la même orientation, les branches} \\ & \text{décrites par } C_K \text{ étant interrompues.} \\ -1 & \alpha, \beta \text{ contrairement orientées, les branches} \\ & \text{décrites par } C_K \text{ étant interrompues.} \end{cases}$$

Le réseau G est montré sur la fig. 3.3. Soit $G = \text{Im}^d(A)$. Alors (proposition 3.7) :

$$A = [1 \ 3 \ 5] \ [1 \ 4 \ 6] \ [2 \ 4 \ 5]$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ 4 & 6 & 6 & 6 & 1 & 1 & 1 & 4 & 4 & 6 & 6 & 6 & 1 & 4 & 6 & 6 \\ 2 & 2 & 4 & 5 & 2 & 4 & 5 & 2 & 5 & 2 & 4 & 5 & 2 & 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial A}{\partial 1} = \begin{bmatrix} 4 & 6 & 6 & 6 & 3 & 3 & 3 & 5 \\ 2 & 2 & 4 & 5 & 2 & 4 & 5 & 2 \end{bmatrix} \quad \frac{\partial A}{\partial 2} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 3 & 3 & 5 & 5 & 5 \\ 4 & 6 & 1 & 4 & 6 & 1 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial A}{\partial 1} \cap \frac{\partial A}{\partial 2} = \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\text{Sim}_Z \left(\frac{\partial A}{\partial 1}, \frac{\partial A}{\partial 2} \right) = Z_5 \ Z_6 - Z_3 \ Z_4$$

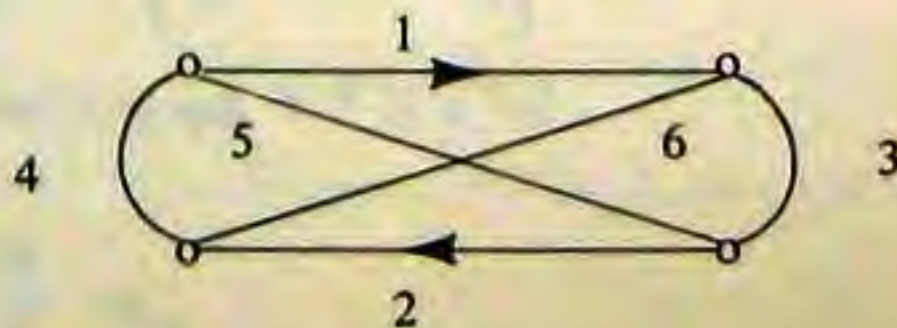


Fig. - 3.3

(*) On peut démontrer que si on supprime, dans la co-image G de A , des branches déterminées par l'expression

$$(*) \quad \frac{\partial A}{\partial \alpha} \cap \frac{\partial A}{\partial \beta} \neq 0 \quad \alpha \neq \beta$$

alors G se réduit à un cycle (et peut être les autres branches, qui ne forment pas cependant de cycles). Le cycle unique contient chaque fois les branches α et β .

DÉFINITION 3.12

On dit que le graphe G est fortement connexe, si chaque couple de sommets appartient au moins à un cycle.

PROPOSITION 3.13

Soit A un NS, soit G graphe, $G = \text{Im}^d(A)$. Alors G est fortement connexe si $\forall$ simplexes $\alpha, \beta \in G$

$$(**) \quad \frac{\partial A}{\partial \alpha} \cap \frac{\partial A}{\partial \beta} \neq 0$$

DÉMONSTRATION

Considérons quatre sommets : $X_\alpha, Y_\alpha, X_\beta, Y_\beta$, de G .

En vertu de (*) la condition (**) implique que $\forall \alpha, \beta \exists$ un cycle contenant α et β .
Soit :

$$\alpha = (X_\alpha, Y_\alpha) \quad \beta = (X_\beta, Y_\beta)$$

Alors $X_\alpha, X_\beta, Y_\alpha, Y_\beta$ appartient au même cycle, donc G est fortement connexe.



généralisation des nombres structuraux

DÉFINITION 4.1

On note $\frac{P(P(P \dots P(X))}{K+1 \text{ fois}}$ comme ${}^k C$. On note ${}^k E$, l'élément de ${}^k C$. On appelle le nombre structural de k -ième catégorie chaque élément de ${}^k C$.

Du fait que $\frac{P(P(P \dots P(X))}{K+1 \text{ fois}} = P(P(Z))$ ou $Z = \frac{P(P(P \dots (X))}{K-1 \text{ fois}}$,

Les lois " + " et " · " sont définissables pour chacune des catégories séparément.

DÉFINITION 4.2

Soit P^h une application injective $P^h : {}^r C \rightarrow {}^{r+h} C$

$P^h : {}^r E \rightarrow {}^{r+h} E$ c'est-à-dire $P^h({}^r E) = \underbrace{[[[[E^r]]]]}_{h \text{ fois}} = {}^{r+h} E$

On ordonne donc l'ensemble $\{{}^1 C, {}^2 C, \dots, {}^k C\}$ par inclusion. On peut remarquer que l'application P^h n'est pas un homomorphisme pour $h \geq 1$. Par exemple

$$P^1({}^1 0) = P^1([]) = \begin{bmatrix}] \\] \end{bmatrix} = {}^2 1$$

EXEMPLE

$$P \left(\begin{bmatrix} [1 \ 2] \\ [1] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} [1 \ 2] \\ [1] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

On rappelle (proposition 2.5) que $\forall {}^k E \in {}^k C$

$${}^k E = \sum_{i=1}^N \prod_{j=1}^{N_j} {}^k B_{ij}$$

ou ${}^k B_{ij}$ a une colonne avec un élément seulement.

$$\begin{bmatrix} [1 \ 2] & [1] \\ [3] & \\ [4] & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [1 \ 2] \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} [1] \end{bmatrix}$$

Soit V une application définie de la façon suivante :

$$V : {}^k C \rightarrow {}^{k-1} C$$

$$V({}^k E) = \begin{cases} (P^1)^{-1} ({}^k E) & \text{si } {}^k E \in \text{Im } P^1 ({}^{k-1} C) \text{ et } {}^k E \neq {}^k 0 \\ {}^{k-1} 0 & \text{si } {}^k E = {}^k 0 \\ {}^{k-1} 1 & \text{si } {}^k E = {}^k 1 \\ \sum_{i=1}^N \prod_{j=1}^{m_i} (P^1)^{-1} ({}^k B_{ij}) & \text{pour les autres } {}^k E : \\ & {}^k E = \sum_{i=1}^N \prod_{j=1}^{N_j} {}^k B_{ij} \end{cases}$$

On note V^{-h} application $\frac{V : V : V \dots : V}{h \text{ fois}}$

DEFINITION 4.3

$V^{-h} ({}^{k+h} E)$ est appelé le substitut de ${}^{k+h} E$ dans la catégorie ${}^k C$, ($k \geq 1$).

EXEMPLE : $V = {}^2 C \rightarrow {}^1 C$

$$\begin{aligned} {}^2 E &= \begin{bmatrix} [1 \ 2] & [4] \\ [3] & \end{bmatrix} = [[1 \ 2]] \cdot [[3]] + [[4]] \quad V({}^2 E) = [1 \ 2] \cdot [3] + [4] \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 3 & \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Soit ${}^h A \in {}^h C$; ${}^m B \in {}^m C$. Soit ${}^k A, {}^k B \in {}^k C$ substituts de ${}^h A$ et ${}^m B$

Soit R une relation définie sur $\{{}^k C, {}^{k+1} C, \dots, {}^h C, \dots, {}^m C, \dots\}$

$${}^h A R {}^m B \iff {}^k A = {}^k B$$

On voit alors que R est une relation d'équivalence.

Si ${}^k A$ et ${}^k B$ appartiennent à la même classe d'équivalence, on dit qu'ils sont structurellement égaux.

Soit r une application canonique sur l'ensemble quotient.

On définit les lois $\circ$ et $\odot$ de façon suivante :

$$r({}^h A) \circ r({}^m B) = r({}^k A + {}^k B)$$

$$r({}^k A) \odot r({}^m B) = r({}^k A \cdot {}^k B)$$

Le passage au quotient permet donc de passer d'une catégorie de NS à l'autre et de faire des opérations algébriques sur les éléments de catégories différentes, s'ils ont les substituts

dans la même catégorie inférieure. On va représenter $\circ$ et $\otimes$ comme $+$ et $\cdot$ dans la catégorie des substituts qui seront à leur tour les représentants de leurs classes d'équivalence.

EXEMPLE

$$r \left(\begin{bmatrix} [1 \ 2] \\ [1] \end{bmatrix} \right) \circ [3] = r \left([1 \ 2] +_2 [1] \right) \text{ or } ([3]) = ([1 \ 2] + [1]) + [3] =$$

$$= [2] + [3] = [2 \ 3]$$

$+_2$ signifie l'addition dans le sens de 2C

on voit que

$$r(h_A + h_B) = r(h_A) \circ r(h_B)$$

$$r(h_A \cdot h_B) = r(h_A) \otimes r(h_B)$$

REMARQUE

On peut aussi définir les catégories de nombres structuraux comme des anneaux sans élément 1.

Dans ce cas on définit :

$$1_C \stackrel{\text{df}}{=} P(P(X) \setminus \phi)$$

$$K+1_C \stackrel{\text{df}}{=} P(K_C \setminus \phi)$$

les applications p et v définies précédemment se changent convenablement.



analyse des réseaux passifs

5.1 — Dipôle

On peut distinguer deux cas :

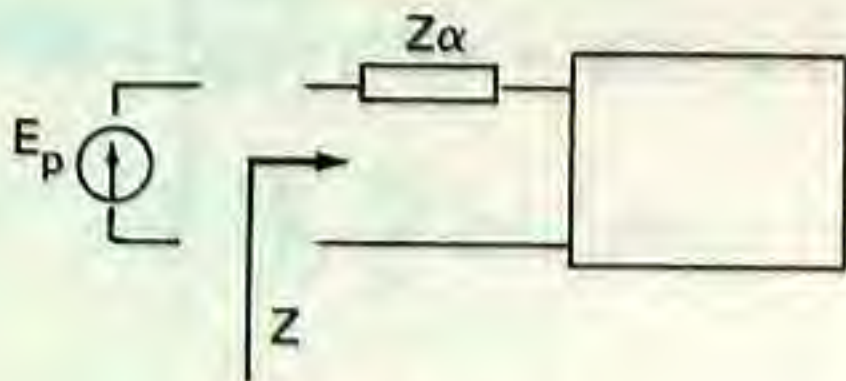


Fig. — 5.1 a

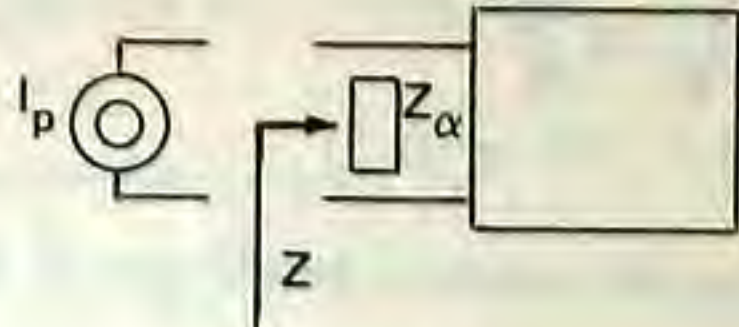


Fig. — 5.1 b

On peut démontrer la validité des expressions suivantes, pour déterminer la formule de l'impédance :

Dans le cas a)

$$Z = \frac{\det_Z A^d}{\det_Z \frac{\partial A^d}{\partial \alpha}} = \frac{\det_Z B}{\det_Z \frac{\partial B}{\partial \alpha}} = \frac{1}{Y\alpha} = \frac{\det_Y A}{\det_Y \frac{\delta A}{\delta \alpha}}$$

Dans le cas b)

$$Z = Z\alpha \frac{\det_Z \frac{\delta A^d}{\delta \alpha}}{\det_Z A^d} = \frac{\det_Z \frac{\delta B}{\delta \alpha}}{\det_Z B} = \frac{\det_Y \frac{\partial A}{\partial \alpha}}{\det_Y A}$$

Dans les deux cas, le graphe du dipôle est supposé être l'image de A (image réciproque de $B = A^d$). La lettre Z se réfère aux impédances, Y aux admittances du dipôle, $Y = 1/Z$.

A peut être calculé comme produit des branches de $(n-1)$ sommets du graphe (proposition 3.3). B comme le produit de tous les cycles indépendants du dipôle.

Les formules pour les deux dipôles se démontrent de façon similaire. Par exemple on démontre qu'il est vrai que :

$$Z = \frac{\det A^d}{\det_Z \frac{\partial A^d}{\partial \alpha}}$$

DEMONSTRATION

On sait que l'on peut décrire le réseau à éléments linéaires avec une équation matricielle.

$$(1) \quad U = Z \cdot I$$

Soit pour le dipôle avec n cycles indépendants :

$$(2) \quad \begin{bmatrix} E_p \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{11} & \dots & z_{n1} \\ \vdots & & \vdots \\ z_{n1} & \dots & z_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ \vdots \\ I_n \end{bmatrix}$$

avec :

U — vecteur des sources de tension

I — vecteur des courants circulaires

Z — matrice des impédances :

z_{ii} — impédance propre du i -ième cycle (la somme de toutes les impédances du cycle.

z_{ik} — impédance commune de i -ième et k -ième cercle ($i \neq k$)

$$Z_{ik} = \sum_{L=1}^{N_{ik}} \pm Z_L$$

ou

N_{ik} est le nombre des impédances communes aux cycles i et k

Z_L impédance commune aux cycles i et k

Le choix de $\pm$ dépend des courants I_i et I_k , (de même directions (+), sens inverse (-)), sur l'impédance Z_L , $L = 1, 2, \dots, N_{ik}$.

La matrice Z est symétrique.

L'impédance d'entrée du dipôle est donnée par la formule :

$$(3) \quad Z_e = \frac{E_p}{I_1}$$

On sait (méthode de Cramer) que la solution de (2) par rapport à I_1 est déterminée par l'équation :

$$I_1 = \frac{\Delta_{11}}{\Delta} E_p \quad \Delta = \det Z$$

$$\Delta = \det \begin{bmatrix} z_{22} & \dots & z_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ z_{n2} & \dots & z_{nn} \end{bmatrix}$$

On voit que Δ_{11} est un nouveau déterminant Δ du nouveau réseau obtenu par la suppression de la branche contenant E_p . Pour montrer que :

$$\Delta = \det_Z A^d$$

Il suffit de rappeler le théorème d'Ahrens (1897) qui dit, que Δ est une somme avec le signe + uniquement, de toutes les combinaisons des impédances, telles que leurs branches forment un co-arbre maximal du réseau en question.

A titre d'exemple pour le réseau à deux cycles (figure 5.2) on a :

$$\Delta = |Z| = \begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{bmatrix} = z_{11} z_{22} - z_{12} z_{21}$$

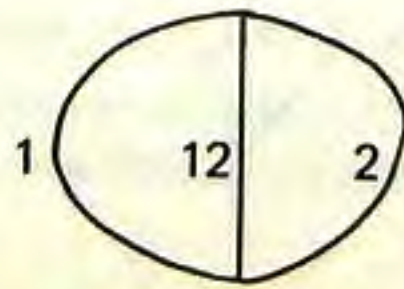
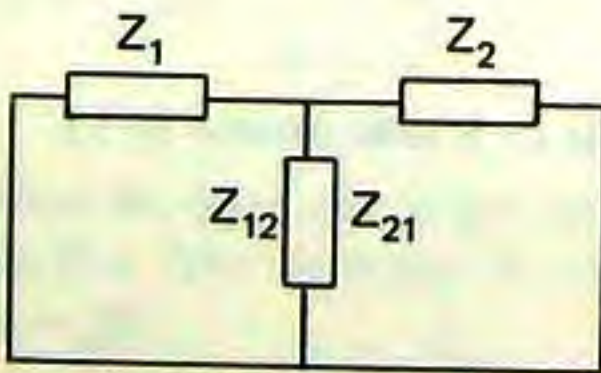
Parce que :

$$z_{11} = z_1 + z_{12}$$

$$z_{22} = z_2 + z_{21} = z_1 + z_{12}$$

Alors :

$$\begin{aligned} \Delta = |Z| &= z_{11} z_{22} - z_{12} z_{21} = (z_1 + z_{12})(z_2 + z_{21}) - z_{12} z_{21} = \\ &= z_1 z_2 + z_2 z_{12} + z_1 z_{21} = \det_Z A^d \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} A^d &= [1, 12] \cdot [2, 12] = \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 12 & 12 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Fig. - 5.2

On a vu que :

$$\begin{bmatrix} z_{22} & \dots & z_{2n} \\ \vdots & & \\ z_{n2} & \dots & z_n \end{bmatrix} = \Delta_{11}$$

c'est une description du réseau initial avec la branche, contenant E_p supprimée. Dans l'algèbre de NS c'est équivalent à la dérivation de A^d .

Donc :

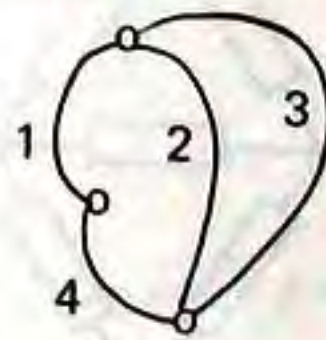
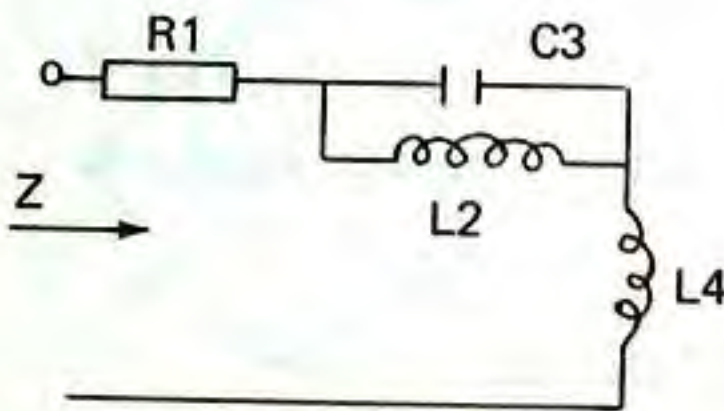
$$Z = \frac{\Delta}{\Delta_{11}}$$

est équivalent à :

$$Z = \frac{\det_Z A^d}{\det_Z \frac{\partial A^d}{\partial \alpha}}$$

C. Q. F. D.

EXEMPLE



1) Solution par NS :

$$A^d = [1 \ 2 \ 4] \cdot [2 \ 3] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 3 & 4 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial A^d}{\partial 1} = [2 \ 3]$$

$$\det_Z A^d = z_1 z_2 + z_1 z_3 + z_2 z_3 + z_2 z_4 + z_3 z_4$$

$$Z = (z_1 z_2 + z_1 z_3 + z_2 z_3 + z_2 z_4 + z_3 z_4) / (z_2 + z_3)$$

2) Solution par le système d'équations :

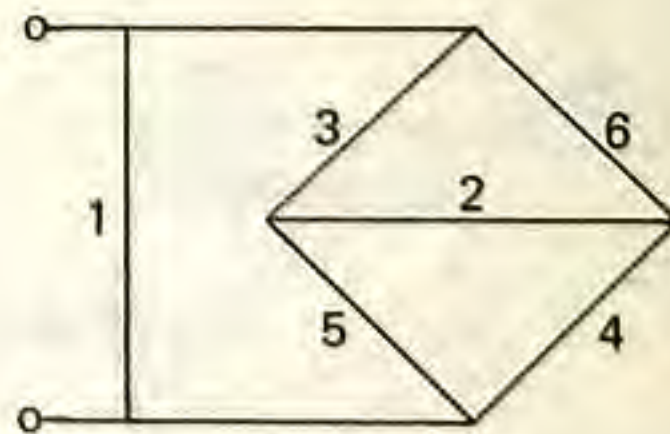
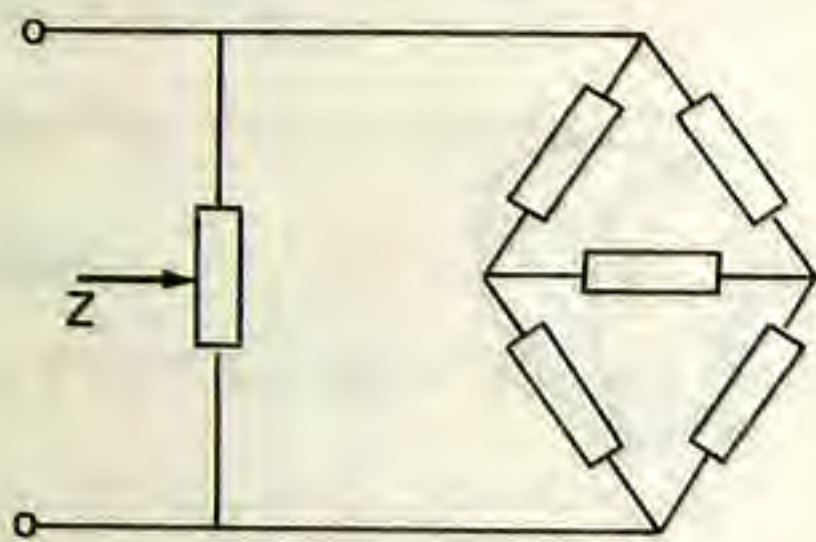
$$z_{11} = z_1 + z_2 + z_4$$

$$\Delta = \det \begin{bmatrix} z_{11} & -z_{12} \\ -z_{21} & z_{22} \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} z_1 + z_2 + z_4 - z_2 & \\ -z_2 & z_2 + z_3 \end{vmatrix} = (z_1 + z_2 + z_4) \cdot (z_2 + z_3) - z_2^2$$

$$\Delta = z_2 + z_3$$

$$Z = \frac{\Delta}{\Delta_{11}} = (z_1 z_2 + z_1 z_3 + z_2 z_3 + z_2 z_4 + z_3 z_4) / (z_2 + z_3)$$

EXEMPLE



$$A^d = [1 \ 3 \ 5] \cdot [2 \ 3 \ 6] \ [2 \ 4 \ 5] =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 3 & 3 & 3 & 3 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ 2 & 2 & 3 & 3 & 3 & 6 & 6 & 6 & 2 & 2 & 6 & 6 & 2 & 3 & 3 & 6 & 6 \\ 4 & 5 & 2 & 4 & 5 & 2 & 4 & 5 & 4 & 5 & 4 & 5 & 4 & 2 & 4 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial A^d}{\partial 1} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 & 3 & 3 & 6 & 6 & 6 \\ 4 & 5 & 2 & 4 & 5 & 2 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

$$Z = \frac{z_1 z_2 z_4 + \dots + z_5 z_6 z_4}{z_2 z_4 + \dots + z_6 z_5}$$

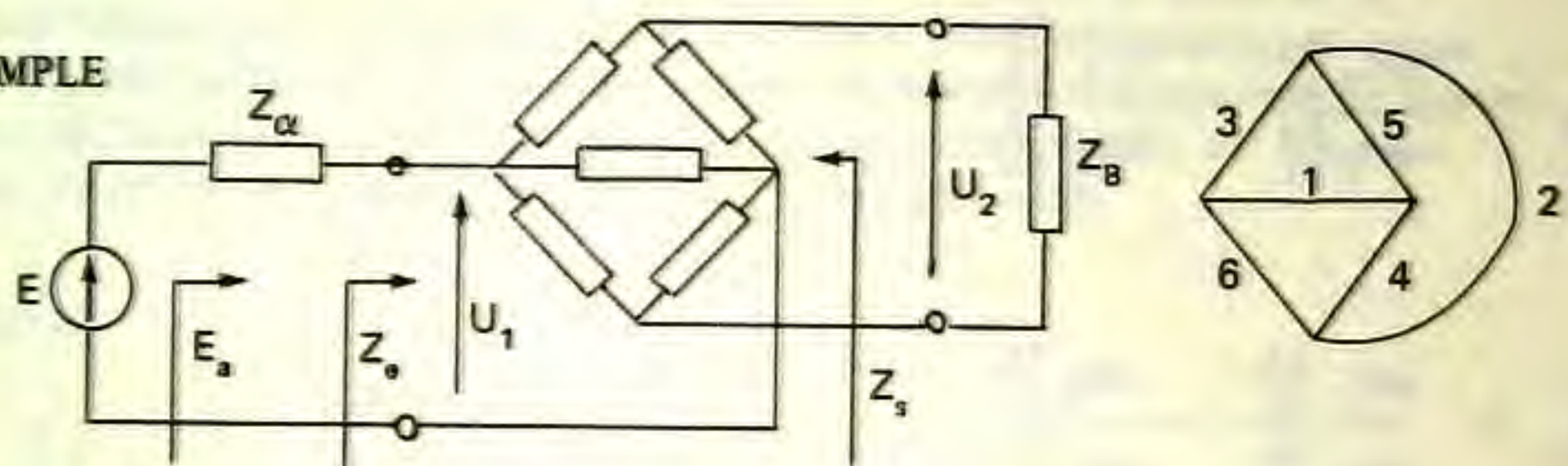
De ces deux exemples on peut tirer les conclusions suivantes :

- 1) Le $\det_z A$ est la forme la plus simplifiée du déterminant du réseau. Il ne contient aucun terme redondant qui peut être simplifié par un autre.

- 2) Son calcul est beaucoup plus simple que le calcul du déterminant de la matrice. Les paramètres du réseau sont définis par des formules algébriques calculées mécaniquement sans la résolution du système d'équations linéaires. L'élimination des opérations arithmétiques sur les signes supprime la principale cause d'erreurs.
- 3) A notre connaissance A^d écrit comme produit des facteurs premiers est la description la plus « compacte » de la structure du réseau.
- 4) La méthode est très adaptable aux calculs par ordinateur.

5.2 — Analyse du quadropole [1]

EXEMPLE



$$A = [1 \ 3 \ 5] \ [1 \ 4 \ 6] \ [2 \ 4 \ 5] \quad \alpha = 1 \ \beta = 2$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ 4 & 6 & 6 & 6 & 1 & 1 & 1 & 4 & 4 & 6 & 6 & 6 & 1 & 4 & 6 & 6 \\ 2 & 2 & 4 & 5 & 2 & 4 & 5 & 2 & 5 & 2 & 4 & 5 & 2 & 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial A}{\partial 1} = \begin{bmatrix} 4 & 6 & 6 & 6 & 3 & 3 & 3 & 5 \\ 2 & 2 & 4 & 5 & 2 & 4 & 5 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial A}{\partial 2} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 3 & 3 & 5 & 5 & 5 \\ 4 & 6 & 1 & 4 & 6 & 1 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial A}{\partial 1} \cap \frac{\partial A}{\partial 2} = \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\text{Sim}_Z \left(\frac{\partial A}{\partial 1}, \frac{\partial A}{\partial 2} \right) = z_5 \ z_6 - z_3 \ z_4$$

$$\frac{\delta A}{\delta 2} = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 5 & 5 & 5 \\ 4 & 4 & 6 & 6 & 6 & 4 & 6 & 6 \\ 2 & 5 & 2 & 4 & 5 & 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\delta A}{\delta 2} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 5 \\ 6 & 6 & 1 & 1 & 4 & 6 & 6 & 6 \\ 4 & 5 & 4 & 5 & 5 & 4 & 5 & 4 \end{bmatrix}$$

$$K_u = \frac{U_z}{E} = \frac{(z_5 \ z_6 - z_2 \ z_4) \ z_2}{\det_Z A} = \frac{\text{Sim}_Z \left(\frac{\partial A}{\partial \alpha}, \frac{\partial A}{\partial \beta} \right) \ Z_\beta}{\det_Z A}$$

$$K_i = \frac{I_2}{I_1} = \frac{z_5 z_6 - z_3 z_4}{z_4 z_2 + z_6 z_2 + \dots z_5 z_2} = \frac{\text{Sim}_Z \left(\frac{\partial A}{\partial \alpha}, \frac{\partial A}{\partial \beta} \right)}{\det_Z A}$$

$$Z_1 = \frac{\det_Z A}{z_4 z_2 + z_6 z_2 + \dots z_5 z_2} = \frac{\det_Z A}{\det_Z \frac{\partial A}{\partial \alpha}}$$

$$Z_e = \frac{\det_Z \frac{\partial A}{\partial 1}}{\det_Z \frac{\partial A}{\partial 1}} = \frac{\det_Z \frac{\delta A}{\delta \alpha}}{\det_Z \frac{\delta A}{\delta \alpha}}$$

$$Z_s = \frac{\det_Z \frac{\delta A}{\delta 2}}{\det_Z \frac{\partial A}{\partial 2}} = \frac{\det_Z \frac{\delta A}{\delta \beta}}{\det_Z \frac{\partial A}{\partial \beta}}$$

$$M_s = \text{Ln} \left[\frac{E}{2U_2} \sqrt{\frac{z\alpha}{z\beta}} \right] = \text{Ln} \left[\frac{\det_Z A}{2 \text{Sim}_Z \left(\frac{\partial A}{\partial \alpha}, \frac{\partial A}{\partial \beta} \right)} \sqrt{\frac{1}{Z_\alpha Z_\beta}} \right]$$

On voit encore que cette méthode d'analyse est nettement plus simple d'utilisation que les autres dites classiques.

Les formules ci-dessus sont laissées sans démonstration. Elles ne sont pas difficiles et on les déduit rapidement à partir de formules algébriques basées sur les lois de Kirchoff.

Il faut ajouter qu'on peut obtenir ce genre de formules pour des réseaux actifs contenant plusieurs sources de courant ou tension commandés ou pas, ou feed-backs [1].

analyse des réseaux par ordinateur

6.1 – Représentation machine de NS

Chaque colonne du NS est un ensemble désordonné de ses éléments et il n'y a pas deux colonnes égales. Si le réseau a N branches, chacune d'entre elles peut être présente ou absente dans la colonne donnée. On a utilisé la représentation suivante : chaque colonne est représentée par une zone de N bits au minimum pour le réseau de N branches. Chaque bit a son numéro, qui est un numéro d'une des branches, et chaque bit a un numéro différent. Si la branche est présente (absente) dans une colonne donnée, la valeur du bit correspondant est 1 (zéro). Le NS est représenté donc par une zone-nombre qui est une réunion de zones-colonnes, toutes différentes.

EXEMPLE

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 6 \\ 5 & 2 & 2 \\ 7 & 14 & 7 \end{bmatrix}$$

On prend pour zone-colonne 1 octet. On fixe les numéros attribués à la position du bit de la façon suivante :

14 7 6 5 3 2 1

Le A sera représenté par une zone-nombre de trois octets

0	1	0	0	0	0	1	1	←→	1	2	14
0	0	1	0	1	1	0	0	←→	3	5	7
0	0	1	1	0	0	1	0	←→	6	2	7

Dans cette représentation les opérations de l'algèbre de NS deviennent très simples et se traduisent essentiellement par les intersections et réunions des zones-colonnes.

Par exemple :

- La comparaison "branche par branche" de deux colonnes a et b est une vérification de la fonction logique $a \cdot b + a \cdot b$
- L'addition de deux nombres A et B est la réunion de deux zones-nombres moins les zones-colonnes identiques.

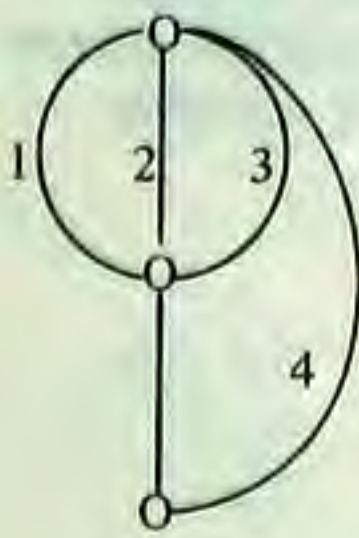
La multiplication de A par B se traduit par la réunion des zones-colonnes. La dérivée de A par rapport à une m -ième branche consiste à maintenir les zones-colonnes qui ont

un m -ième bit présent et mise à zéro de ce bit, etc. . . . Cette représentation machine permet avec une mémoire de capacité de 4 K, de calculer les formules ayant des centaines de termes.

En résumé, on peut donc représenter le nombre structural sous les formes suivantes :

- Comme un produit de NS élémentaires à une ligne
- Comme un ensemble soit des lignes, soit des colonnes, suivant la convention (représentation normale)
- Comme ensemble de zones-colonnes binaires

EXEMPLE



$$\begin{aligned}
 A &= [1 \ 2 \ 3] \cdot [4 \ 5] = \\
 &= \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 4 & 4 & 5 & 5 & 5 \end{bmatrix}}_{\text{colonnes}} \equiv \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\text{binaire}} \equiv \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 4 \\ 3 & 4 \\ 1 & 5 \\ 2 & 5 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}}_{\text{lignes}}
 \end{aligned}$$

6.2 – Quelques points particuliers

1) Division de mémoire

La mémoire nécessite la division au minimum en deux zones :

- Zone d'entrée, ou on stocke le NS sous la forme d'un produit de NS à une ligne. Chaque NS à une ligne est représenté par une zone-ligne.

EXEMPLE

$$A = [1 \ 2 \ 3] \cdot [4 \ 5] \equiv \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- Une zone principale ou NS est stockée sous sa forme binaire, (zones-colonnes).

La zone d'entrée sert comme zone réceptrice de la description du réseau, la zone principale comme zone réceptrice des résultats de la multiplication. Toutes les opérations de dérivée, co-dérivée, $\det Z$, calcul de A^d , etc. . . sont effectuées dans cette zone.

Les propriétés algébriques de NS exigent que ni dans la zone d'entrée ni dans la zone principale il n'y ait pas deux zones lignes (colonnes) égales. D'où le simple test d'erreur.

2) Programmation des opérations algébriques

La programmation des opérations d'égalité, d'addition, de soustraction, de dérivée réciproque ne pose aucun problème particulier avec la représentation proposée du NS. Ce n'est pas le cas de la multiplication qui tient beaucoup de place et de temps-machine par rapport aux autres. C'est pourquoi on donne aussi quelque point important de la réalisation machine de cette opération :

a – Accélération

Il y a un grand nombre de colonnes qui ne peuvent être synthétisées. Dès qu'on rencontre la première de la suite on peut, en calculant les index, passer directement aux colonnes possibles à réaliser.

EXEMPLE

[1 2 3] [4 2 6] [5 7 8] [9 10 11]

$$= \begin{bmatrix} 11 \dots & 11 & 10 & 9 & 11 & 10 & 9 & 11 & 11 & 10 & 9 & 11 & \dots & 9 \\ 8 \dots & 8 & 8 & 8 & 8 & 7 & 7 & 7 & 5 & 5 & 5 & 5 & \dots & 5 \\ 6 \dots & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 4 & \dots & 4 \\ 3 \dots & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

On a souligné les colonnes à éviter, grâce à l'accélération.

b – Mémoire des Places Libres (MPL)

De la définition du processus de multiplication toutes les colonnes qui se répètent un nombre pair de fois, disparaîtront des résultats finaux.

Cela crée les « trous » dans la zone où on place le résultat de la multiplication. Les adresses de ces « trous » sont collectionnées dans le MPL et avant chaque écriture de la zone on consulte le MPL, pour utiliser la première place libre.

EXEMPLE

$$[5 \ 3 \ 4 \ 2] \cdot [3 \ 4] = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 & 4 & 4 & 4 \\ 2 & 4 & 5 & 2 & 3 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 5 & 2 \end{bmatrix}$$

← passage grâce au MPL

6.3 – Exemple des calculs par ordinateur

Un exemple montre les calculs de la formule d'impédance d'entrée à l'aide des nombres

structuraux, la formule de calcul est donnée par l'expression :

$$Z = \frac{\det_Z A^d}{\det_Z \frac{\partial A^d}{\partial \alpha}}$$

où :

A^d — NS dont le graphe du réseau analysé est co-image.

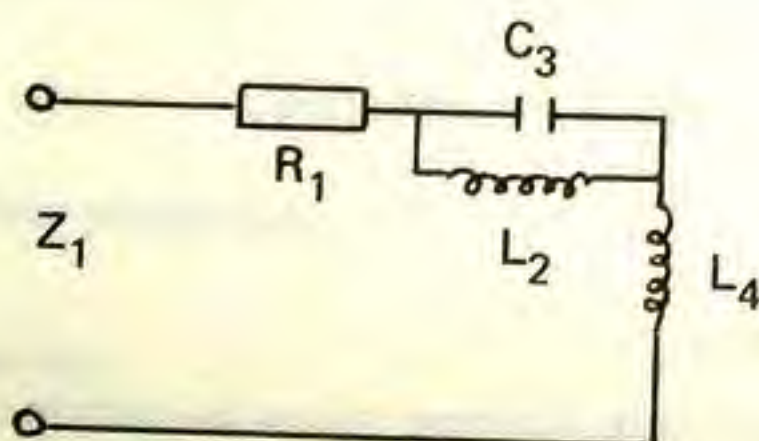
α — numéro de la branche par rapport à laquelle la formule est calculée (commande « branche dérivée »).

On a ajouté les commentaires. La lettre « 0 » dans la liste des branches désigne l'élément qui n'est pas pris en compte pour les calculs. L'utilisation de la notion « 0 » pour les éléments considérés comme peu importants sert pour les calculs des formules approximatives en cas de formule stricte trop compliquée. Pour la commodité on a remplacé la capacité des condensateurs par leur élastance :

$$S = \frac{1}{C}$$

EXEMPLE

Calculer la formule d'impédance Z_1 du réseau ci-dessous :



$$S = \frac{1}{C}$$

Réseau :

/1' 2' 4' / /2' 3' / * stop *

Branches :

1' r 1 c 1 * stop *

Branche dérivée :

1' * stop *

Nombre structural (forme numérique) :

1 1 2 2 3
2 3 3 4 4

Nombre structural (forme binaire) :

1 1 0 0 0
1 0 1 0 0
1 1 0 0
1 0 1 0
1 1 0

Dérivée :

2 3

Impédance (forme z) :

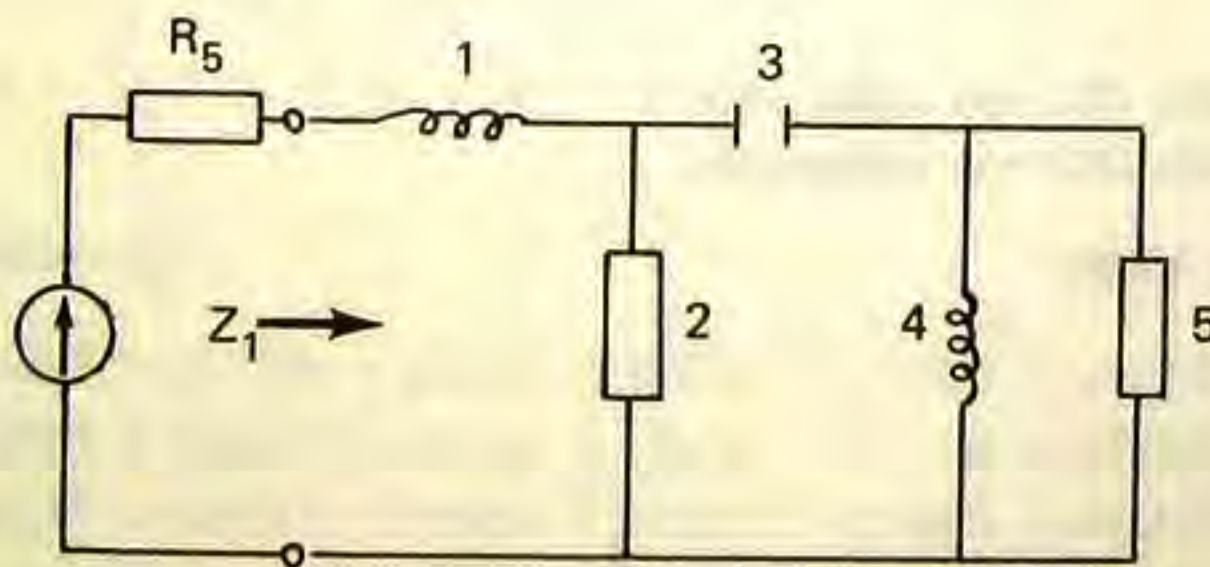
$$(z_1 z_2 + z_1 z_3 + z_2 z_3 + z_3 z_4) / (z_2 + z_3)$$

Impédance (forme rlc) :

$$(-(+L_2 L_4) \omega^2 + (+L_4 s^3 + L_2 s^3) + (+r_1 L_2) j\omega - (+r_1 s^3) j\omega^{(-1)}) / (+L_2) j\omega - (+s^3) j\omega^{(-1)}$$

EXEMPLE

Calculer la formule d'impédance Z_1 du réseau ci-dessous. Supposer R_s négligeable.



Réseau :

/ 0' 1' 2' / / 2' 3' 4' / / 4' 5' / * Stop *

Branches :

0LrcLr * stop *

Nombre structural (forme numérique) :

1 1 1 1 1 2 2 2
2 2 3 3 4 3 3 4
4 5 4 5 5 4 5 5

Branche dérivée :

1' * stop *

Dérivée :

2 2 3 3 4
4 5 4 5 5

Impédance (forme z) :

$$(z_1 z_2 z_4 + z_1 z_2 z_5 + z_1 z_3 z_4 + z_1 z_3 z_5 + z_1 z_4 z_5 + z_2 z_3 z_4 + z_2 z_3 z_5 + z_2 z_4 z_5) / (z_2 z_4 + z_2 z_5 + z_3 z_4 + z_3 z_5 + z_4 z_5)$$

Impédance (forme rLc) :

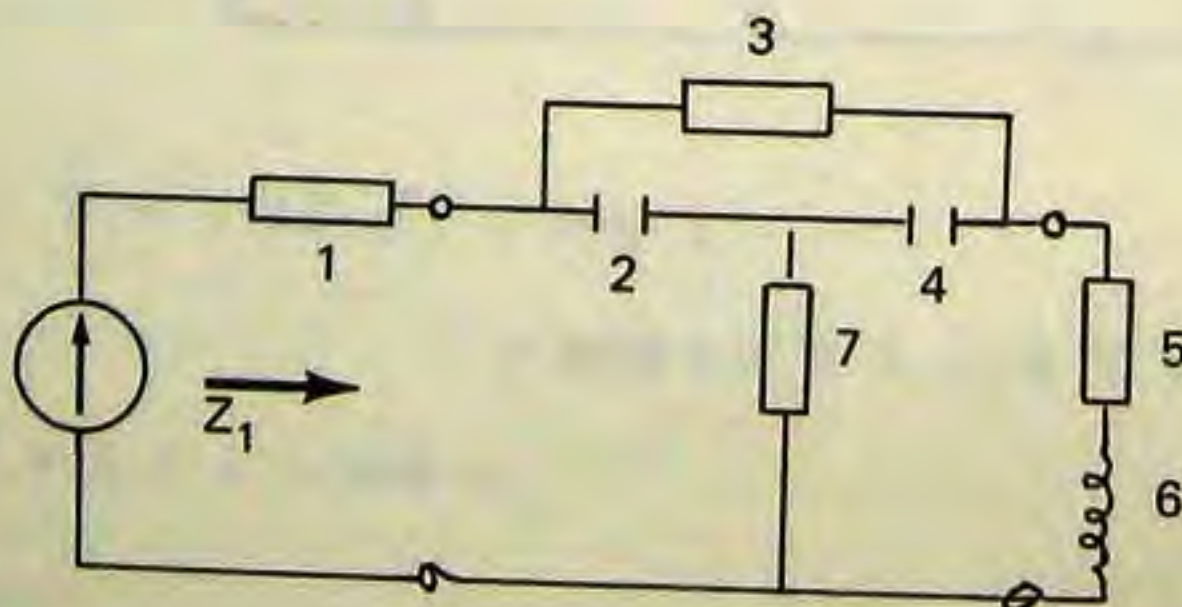
$$(- (+ r_5 L_1 L_4 + r_2 L_1 L_4) w^{**2} + (+ r_2 L_4 s^3 + r_5 L_1 s^3) + (r_2 r_5 L_4 + L_1 L_4 s^3 + + r_2 r_5 L_1) jw^{**1} - (+ r_2 r_5 s^3) jw^{**(-1)}) / ((+ L_4 s^3 + r_2 r_5) + (+ r_5 L_4 + r_2 L_4) jw - (+ r_5 s^3) jw^{** -1})$$

EXEMPLE

Calculer l'impédance Z_1 du réseau ci-dessous :

Supposez :

- a – La source est réelle (R_1 non négligeable) ;
La charge est réelle (R_5 non négligeable)
- b – Source et charge idéales



Réseau :

/ 1' 2' 7' / / 2' 3' 4' / / 4' 5' 6' 7' / * stop *

Branches :

1' rcrerLr * stop *

Branche dérivée :

1' * stop *

a - Nombre structural (forme numérique)

1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 2 2 2 2 2 2
2 2 2 2 3 3 3 3 4 4 4 3 3 3 3 4 4
4 5 6 7 4 5 6 7 5 6 7 4 5 6 7 5 6

2 2 3 3 3 4 4
5 6 4 5 6 5 6
7 7 7 7 7 7 7

Dérivée :

2 2 2 2 3 3 3 3 4 4 4
4 5 6 7 4 5 6 7 5 6 7

Impédance (forme Z) :

$$\frac{(z1z2z4 + z1z2z5 + z1z2z6 + z1z2z7 + z1z3z4 + z1z3z5 + z1z3z6 + z1z3z7 + z1z4z5 + z1z4z6 + z1z4z7 + z2z3z4 + z2z3z5 + z2z3z6 + z2z3z7 + z2z4z5 + z2z4z6 + z2z5z7 + z2z6z7 + z3z4z7 + z3z5z7 + z3z6z7 + z4z5z7 + z4z6z7)}{(z2z4 + z2z5 + z2z6 + z2z7 + z3z4 + z3z5 + z3z6 + z3z7 + z4z5 + z4z6 + z4z7)}$$

Impédance (forme rLc) :

$$\frac{((+ r7L6s4 + r3r5r7 + r7L6s2 + r3L6s2 + r1L6s4 + r2r3r7 + r1r3r5 + r1L6s2) + (r5s2s4 + r3s2s4 + r1s2s4)w^{**}(-2) + (r3r7L6 + r1r3L6)jw^{**}1 - (r5r7s4 + r3r7s4 + r3r7s4 + r5r7s2 + L6s2s4 + r3r7s2 + r3r5s2 + r1r7s4 + r1r5s4 + r1r3s4 + r1r7s2 + r1r5s2)jw^{**}(-1))}{((L6s4 + r3r7 + r3r5 + L6s2) - (s2s4)w^{**}(-2) + (r3L6)jw - (r7s4 + r5s4 + r3s4 + r3s4 + r7s2 + r5s2)jw^{**}(-1))}$$

b – Branches :

l' ocrcoLr * stop *

Nombre structural :

2	2	2	2	2	3	3	4
3	3	3	4	6	4	6	6
4	6	7	6	7	7	7	7

Dérivée :

2	2	2	3	3	3	4	4
4	6	7	4	6	7	6	7

Impédance (forme Z) :

$$(z_2 z_3 z_4 + z_2 z_3 z_6 + z_2 z_3 z_7 + z_2 z_4 z_6 + z_2 z_6 z_7 + z_3 z_4 z_7 + z_3 z_6 z_7 + z_4 z_6 z_7) / (z_2 z_4 + z_2 z_6 + z_2 z_7 + z_3 z_4 + z_3 z_6 + z_3 z_7 + z_4 z_6 + z_4 z_7)$$

Impédance (forme rLc) :

$$((r_7 L_6 s^4 + r_7 L_6 s^2 + r_3 L_6 s^2) - (r_3 s^2 s^4) w^{**(-2)} + (r_3 r_7 L_6) jw - (r_3 r_7 s^4 + L_6 s^2 s^4 + r_3 r_7 s^2) jw^{**(-1)}) / ((L_6 s^4 + r_3 r_7 + L_6 s^2) - (s^2 s^4) w^{**(-2)} + (r_3 L_6) jw - (r_7 s^4 + r_3 s^4 + r_7 s^2) jw^{**(-1)})$$



bibliographie

- [1] BELLERT S., WOZNIACKI H. – Analiza i synteza ukladow elektrycznych metoda liczb strukturalnych (Analyse et synthèse de réseaux électroniques avec la méthode des nombres structuraux). WNT – Varsovie 1968
- [2] LITWIN W. – Translator jezyka opisu elektronicznych cyfrowych elementow biernych do otrzymania formuly impedancji układu (Traducteur de langage de description des éléments électroniques passifs en vue de l'obtention de la formule d'impédance du réseau). Ecole Polytechnique de Varsovie 1969
- [3] BELLERT S. – Topological analysis and synthesis of linear systems. J. Franklin Inst. , 274, p. 425, 1969
- [4] CHIN-TAO TSAI – Short cuts methods for expanding the determinants involved in network problems. Chinese Journal of Physics, vol. 3, p. 148, 1939
- [5] DUFFIN R. – An analysis of the Wang algebra of networks. Trans. Amer. Math. Soc., p. 114, 1959

