Partiel du Jeudi 5 Mars 2009
Durée : 1 heure 30 (sans document)

Exercice 1 :

La société ÇADÉGOULINE est spécialisée dans la fabrication de confiture de framboise. La plus grande partie de sa production annuelle est réalisée durant les mois de juillet, août, septembre et octobre. Pour cela elle achète les framboises qu'elle va soit utiliser directement pour produire de la confiture (elle fabrique 1kg de confiture en utilisant 1 kg de fruit), soit stocker dans des entrepôts frigorifiés afin de les utiliser les mois suivants pour la production. A la fin du mois de juin, ÇADÉGOULINE dispose dans son stock de 2000 kg de framboises et elle souhaite finir le mois d'octobre avec un stock nul. Les entrepôts ont une capacité de stockage maximale qui est de 7000 kg. Le coût de stockage d'un kilogramme de framboises dans les entrepôts durant un mois est estimé à 0,10 euros.
ÇADÉGOULINE peut acheter au maximum :
- 5000 kg de framboises au début du mois de juillet au prix unitaire de 0,50 euros,
- 12000 kg de framboises au début du mois d'août au prix unitaire de 0,45 euros,
- 9000 kg de framboises au début du mois de septembre au prix unitaire de 0,65 euros,
- 8000 kg de framboises au début du mois d'octobre au prix unitaire de 0,85 euros.

Les framboises achetées en début de mois et utilisées le même mois pour la production n'ont pas besoin d'être stockées dans les entrepôts frigorifiques. Nous supposerons que les framboises venant du stock et utilisées pour fabriquer de la confiture sortent toutes du stock au début du mois de production.

Par ailleurs, elle connaît la demande des épiceries fines avec lesquelles elle travaille depuis de nombreuses années sur ce produit et qui est donnée dans le tableau suivant :

Mois	Juillet	Août	Septembre	Octobre
Demande	4000	3000	6000	5000

Sa capacité de production lui permet de fabriquer chaque mois la demande s'exerçant. Il ne serait pas concevable pour ÇADÉGOULINE de ne pas satisfaire la demande et elle estime qu'il ne sert à rien de produire en plus.
ÇADÉGOULINE cherche à définir sa politique d'achat de fruits et de stockage pendant les 4 mois de juillet à octobre de façon à minimiser ses coûts.

1. a. Si ÇADÉGOULINE ne disposait pas d'entrepôt frigorifique pour stocker les framboises, quelle serait sa politique d'achat pour les 4 mois ? Quel est le coût associé à cette solution ?

b. Nous revenons à l'hypothèse initiale où ÇADÉGOULINE dispose d'entrepôts pour stocker. Quelle est la solution, en terme de politique d'achat et de stockage, qui consiste à acheter chaque mois uniquement la quantité nécessaire pour satisfaire la demande (elle peut alors utiliser ce qu'elle a en stock) sauf le mois d'août où elle souhaite acheter le maximum de framboises car elles sont particulièrement parfumées à cette période ? Quel est le coût de cette solution ?

2. Quelles sont les variables de décision du problème ? Vous les définirez précisément en spécifiant les indices associés à chacune d'elles. Pour celles associées au stock, il vous est demandé de considérer le niveau de stock en fin de mois.

3. Exprimer la fonction objectif du programme linéaire représentant le problème de ÇADÉGOULINE.

4. Quelle est l'égalité qui lie les niveaux de stok de deux mois consécutifs ? Exprimer alors, en expliquant en quelques mots, chacune des contraintes du problème.

5. Nous nous plaçons dans le cas où la demande du mois de juillet double.

a. Le programme linéaire précédent admettra-t-il une solution réalisable ? A justifier.

b. On suppose maintenant que si la demande d'un mois donné ne peut être satisfaite alors elle se reporte le mois suivant. Modifier le programme linéaire pour intégrer cette hypothèse (indication : il n'est pas nécessaire d'ajouter des variables).

Exercice 2 :

Soit le programme linéaire suivant :

$$\begin{cases} \min & x_1 - 2x_2 & \\ s.c. & x_1 + 6x_2 \geq 12 & (1) \\ & x_1 + x_2 \leq 7 & (2) \\ & -2x_1 + x_2 \leq 4 & (3) \\ & 3x_1 + x_2 \leq 15 & (4) \\ & x_1 \geq 0 & \\ & x_2 \geq 0 & \end{cases}$$

Attention : les questions 4 et 5 peuvent se faire indépendamment des questions 2 et 3.

1. Représenter graphiquement l'ensemble des solutions réalisables (prendre comme échelle : 1cm pour une unité de x_1 ou de x_2). Vous donnerez pour chaque droite les coordonnées des points qui vous ont permis de la tracer.

2. Mettre le programme linéaire sous forme standard. Dans quelle base est alors explicité le programme linéaire ? Quelle est la solution de base associée ? La base est-elle réalisable (à justifier par un argument autre que graphique) ? Le vérifier graphiquement.

3. Combien y a-t-il de solutions de base ? Enumérer (sans les calculer explicitement) une solution de base réalisable et une solution de base non réalisable (autre que celle de 2.) et les placer sur le graphique précédent.

4. Effectuer une résolution graphique (en expliquant) du programme linéaire et identifier sur le graphique la solution optimale. A quelle base correspond-elle ?

5. Si le coefficient de x_1 dans la fonction objectif est modifié, que va-t-il se passer sur le graphique ? Jusqu'où peut-il augmenter pour que la solution trouvée précédemment reste optimale ?

Question de cours :

Soit (P) un programme linéaire mis sous forme standard (selon les notations du cours) et explicité dans la base réalisable $B = (1, 2, \ldots, p)$. Soit $N = (p+1, p+2, \ldots, n)$ l'ensemble des variables hors-base correspondant. Si l'on fait rentrer dans la base la variable $x_{j^\star}$ pour $j^\star \in N$, sachant que les autres variables hors-base restent dans N, quelle est la plus grande valeur que puisse prendre $x_{j^\star}$? A démontrer (vous expliciterez correctement les notations utilisées).