

Algèbre linéaire et applications aux Sciences des données

5 septembre 2024

Aujourd'hui: Introduction

LOGISTIQUE

<https://www.lamsade.dauphine.fr/~croyer/coursALA.html>

clement.royer@lamsade.dauphine.fr

Ce cours : 39×1.5

3 séances/semaine

→ 20/12

Semaine type :

Jeu. 8h30 C. Royer

Vend. 8h30 C. Royer

10h15 S. Kerleau

05/09, 06/09(x2), 12/09 : Rappel

13/09 → ≈ 18/10 : Réduction des endomorphismes

10-11 : Formes bilinéaires et quadratiques

11-12 : Espaces euclidiens

Evaluation

2 notes de CC (CC + P)

1 note examen (E)

Note finale : $\max\left(\frac{1}{3}(CC+P+E), E\right)$

Chapitre 1: Rappels d'algèbre linéaire

1.1. Scalars et corps

Scalars pour ce cours: nombres réels ($\mathbb{R}$)

ou nombres complexes ($\mathbb{C}$)

ou (plus rare) nombres rationnels ($\mathbb{Q}$)

$$\frac{p}{q} \quad \begin{matrix} \uparrow \\ p \in \mathbb{Z} \\ q \in \mathbb{N}^* \end{matrix}$$

Définition (Groupe abélien/commutatif)

Un ensemble G est appelé un groupe abélien s'il existe une loi $+: G \times G \rightarrow G$ telle que

(i) $\forall (x, y, z) \in G^3, (x+y)+z = x+(y+z)$

(ii) $\forall (x, y) \in G^2, x+y = y+x$

(iii) $\exists 0_G \in G$ tel que $x+0_G = 0_G+x = x \quad \forall x \in G$

(iv) $\forall x \in G, \exists y \in G$ tel que $x+y = y+x = 0_G$

Ex) $(\mathbb{R}, +)$ et $(\mathbb{C}, +)$ sont des groupes abéliens.

Définition (Corps commutatif)

Un ensemble $\mathbb{K}$ est un **corps commutatif** si il existe deux lois $+: \mathbb{K} \times \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$ et $\cdot: \mathbb{K} \times \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$ telles que

- (i) $(\mathbb{K}, +)$ est un groupe abélien
- (ii) $\forall (x, y) \in \mathbb{K}^2, \quad x * y = y * x$
- (iii) $\exists 1_{\mathbb{K}} \in \mathbb{K}$ tel que $x * 1_{\mathbb{K}} = 1_{\mathbb{K}} * x = x \quad \forall x \in \mathbb{K}$
- (iv) $\forall x \in \mathbb{K}, x \neq 0_{\mathbb{K}}, \exists y \in \mathbb{K}, \quad x * y = y * x = 1_{\mathbb{K}}$

Ex) $(\mathbb{R}, +, *) \quad (\mathbb{C}, +, *)$

$$\underbrace{(a+ib)}_{\in \mathbb{C}} * \underbrace{(c+id)}_{\in \mathbb{C}} = (ac-bd) + i(bc+ad)$$

Notation: $x * y \rightarrow xy$

↳ Dans la suite, on considèrera un corps commutatif $\mathbb{K}$ qu'on appellera le corps des scalaires.

1.2 Espaces vectoriels et vecteurs

Définition (Espace vectoriel)

Soit E un ensemble non vide (et $\mathbb{K}$ un corps commutatif)

On dit que E est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel s'il existe deux lois $+ : E \times E \rightarrow E$ et $\cdot : \mathbb{K} \times E \rightarrow E$ telles que

loi interne
loi externe

- (i) $(E, +)$ est un groupe abélien

$$(i) \quad \forall x \in E, \quad 1_K \cdot x = x$$

$$(ii) \quad \forall (\lambda, \mu) \in K^2, \quad \forall (x, y) \in E^2$$

$$(\lambda + \mu) \cdot x = (\lambda \cdot x) + (\mu \cdot x)$$

$$(\lambda \mu) \cdot x = \lambda \cdot (\mu \cdot x)$$

$$\lambda \cdot (x + y) = \lambda \cdot x + \lambda \cdot y$$

Les éléments de K sont appelés les scalaires.
Les éléments de E sont appelés les vecteurs.

Ex) 1) $\mathbb{R}$ est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel

$$(\mathbb{R}, +) \quad \cdot \equiv * \text{ (produit réel)}$$

2) $\mathbb{C}$ est un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel $\therefore \mathbb{C} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$
 $(a+ib, c+id) \mapsto (a+ib) * (c+id)$
 et un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel

$$\uparrow$$

$$\therefore \mathbb{R} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$$

$$(\lambda, a+ib) \mapsto \lambda a + i(\lambda b)$$



$$2+i = \underbrace{(1+i)}_{\in \mathbb{C} \notin \mathbb{R}} \cdot \underbrace{(2+i)}_{\in \mathbb{C}} + \underbrace{(-2i+1)}_{\in \mathbb{C} \notin \mathbb{R}} \cdot \underbrace{(1)}_{\in \mathbb{C}}$$

est valide dans $\mathbb{C}$ en tant que $\mathbb{C}$ -espace vectoriel
mais pas dans $\mathbb{C}$ en tant que $\mathbb{R}$ -espace vectoriel

3) $\mathbb{R}^n$ (ensemble des vecteurs à n composantes/coordonnées réelles) est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel

$$n=1 \quad \mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$$

$$n=2 \quad \mathbb{R}^2 = \left\{ x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \mid x_1 \in \mathbb{R}, x_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

vecteurs à 2 dimensions
colonne

vecteurs du plan

$$n=3 \quad \mathbb{R}^3 = \left\{ x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \mid (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \right\}$$

vecteurs de l'espace

$$n \quad \mathbb{R}^n = \left\{ x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \mid x_i \in \mathbb{R} \quad \forall i=1..n \right\}$$

$$\forall i, 1 \leq i \leq n$$

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}$$

entiers entre 1 et n

$$\forall i \in [1, n]$$

1.3. Sous-espaces vectoriels

Définition (Sous-espace vectoriel)

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

On dit qu'un ensemble $F \subset E$ est un sous-espace vectoriel de E (abrégé de $\mathbb{K}$ -sous-espace vectoriel)

Si

$$(i) \quad F \neq \emptyset$$

$$(ii) \quad \forall (x, y) \in F^2, x + y \in F$$

$$(iii) \quad \forall (\lambda, x) \in \mathbb{K} \times F, \lambda \cdot x \in F$$

+ .
lois de
l'espace
vectoriel E

Ex) $\mathbb{R}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}$ en tant que $\mathbb{R}$ -espace vectoriel

• $\left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \end{bmatrix} \mid x_1 \in \mathbb{R} \right\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$
(en tant que $\mathbb{R}$ -espace vectoriel)

$$\forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \quad \begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ 0 + 0 \end{bmatrix}$$

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x_1 \in \mathbb{R}, \quad \lambda \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda \cdot 0 \end{bmatrix}$$

Proposition: (Vérifier qu'un ensemble est un sous-espace vectoriel)

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et $\emptyset \neq F \subset E$

$\uparrow$
inclusion stricte

[F est un sous-espace vectoriel de E]

$$\Leftrightarrow \left[\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall (x, y) \in F^2, \lambda \cdot x + y \in F \right]$$

$$\mathbb{R}^2 = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \mid x_1 \in \mathbb{R}, x_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

$\mathbb{R}^2$ en tant que $\mathbb{R}$ -espace vectoriel:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \end{bmatrix}$$

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \lambda \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \end{bmatrix}$$

en tant que $\mathbb{Q}$ -espace vectoriel

$$\forall \lambda \in \mathbb{Q}, \quad \lambda \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \end{bmatrix}$$

Définition

Soit E un K -espace vectoriel et $(x_1, \dots, x_m)$ une famille de vecteurs de E .

$$\text{L'ensemble } \left\{ \sum_{i=1}^m \lambda_i x_i \mid \lambda_i \in K \ \forall i=1 \dots m \right\}$$

↑
Notation compacte pour $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_m x_m$

s'appelle l'ensemble des combinaisons linéaires de $(x_1, \dots, x_m)$.

On le note $\text{vect}(x_1, \dots, x_m)$ ou $\text{Span}(x_1, \dots, x_m)$.

Proposition: $\text{vect}(x_1, \dots, x_m)$ est un sous-espace vectoriel de E .
qu'on appelle aussi le sous-espace engendré par $x_1, \dots, x_m$.

Bilan:

- Structure de K -espace vectoriel ($K = \mathbb{R}$ ou $K = \mathbb{C}$)
- Notion de sous-espace vectoriel et comment montrer cette propriété

NB: Un K -sous-espace vectoriel est aussi un K -espace vectoriel

- Notion de sous-espace engendré