Algèbre linéaire et applications aux sciences des données

19 septembre 2024

Cette semaine :

Jeudi 8h30 - 10h : Cours (valeurs propres)
Vendredi : 8h30 - 10h : TD (Fin feuille 1 + début feuille 2)
Vendredi : 10h15 - 11h45 : Cours (valeurs propres ++)

RÉDUCTION DES ENDOMORPHISMES

Partie 1 : Valeurs propres

Introduction :

Applications linéaires → Transformation de données (exercice sur la moyenne)

Applications linéaires → modèles de données (matrice ≡ tableau de données)

1.1 Stabilité et valeurs propres

Définition : Soit E un $\mathbb{K}$-ev (espace vectoriel), $u \in \mathcal{L}(E)$ et F un sev (sous-espace vectoriel) de E

On dit que F est stable par u si
$$\forall x \in F, \quad u(x) \in F.$$

Ex) . E est stable $\forall u \in \mathcal{L}(E)$

. $\ker(u)$ et $\mathrm{Im}(u)$ sont stables par u

$\forall x \in \ker(u)$, $u(x) = 0_E \in \ker(u)$ car $\ker(u)$ sev.

Proposition : Si F est stable par u, alors $u|_F : \begin{array}{l} F \to F \\ x \mapsto u(x) \end{array}$ est une application linéaire de F en tant que $\mathbb{K}$-ev ($u|_F \in \mathcal{L}(F)$)

↳ Réduction des endomorphismes = réduire la dimension de l'espace sur lequel on étudie un endomorphisme en identifiant des sous-espaces stables

Cas de la dimension finie

Si $\dim(E) = n \in \mathbb{N}^*$, u est représenté (dans la base canonique de E) par une matrice $M \in \mathbb{K}^{n \times n}$

↳ Dans ce contexte, si un sev F de E est stable par u alors il existe une base de E $(e_1, \dots, e_m, e_{m+1}, \dots, e_n)$ avec $m = \dim(F) \leq n$, $(e_1, \dots, e_m)$ base de F, dans laquelle u est représenté par la matrice

$$\bar{M} = \begin{array}{cc} \left[\begin{array}{cc} M_{11} & M_{12} \\ 0 & M_{22} \end{array}\right] & \begin{array}{l} m \\ n-m \end{array} \\ \begin{array}{cc} m & \quad n-m \end{array} & \end{array}$$

bloc de zéros $(m\times(n-m))$

M_{11} : matrice de $u|_F$ dans la base $(e_1, \dots, e_m)$

$[\bar{M}]_{ij}$: i-ème coordonnée de $u(e_j)$ dans la base $(e_1, \dots, e_n)$

F est stable par u

$$\forall j = 1..m, \quad u(e_j) \in F \Leftrightarrow u(e_j) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i e_i = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$$

avec $\alpha_{m+1} = \dots = \alpha_n = 0$

Réduction = Représentation de u par une matrice avec un bloc de zéros

$\Rightarrow$ Représentation par $n^2 - m(n-m)$ coefficients au lieu de n^2

<u>But</u> : Effectuer la meilleure réduction possible, càd identifier le maximum de sous-espaces stables dans lesquels l'expression de l'endomorphisme est la plus simple possible

Ex)

$$\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

↳ Cas idéal : sous-espaces propres

<u>Définition</u> : (Valeurs propres)

Soit E un $\mathbb{K}$-ev, soit $u \in \mathcal{L}(E)$

1) On dit que $\lambda \in \mathbb{K}$ est une valeur propre de u lorsqu'il existe $x \in E$, $x \neq 0_E$ tel que $u(x) = \lambda x$

2) On dit que $x \in E$, $x \neq 0_E$ est un vecteur propre de u s'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $u(x) = \lambda x$

Si $u(x) = \lambda x$ avec $x \neq 0_E$, on dit que x est un vecteur propre associé à la valeur propre λ.

<u>NB</u> : → Un vecteur propre est associé à une unique valeur propre.
→ Une valeur propre est associée à une infinité de vecteurs propres.

Si $x \in E$, $x \neq 0_E$ est un vecteur propre de E associé à la valeur propre $\lambda \in \mathbb{K}$, alors $\forall \alpha \in \mathbb{K}$, $u(\alpha x) = \lambda(\alpha x)$ et donc αx est aussi un vecteur propre.

$$u(\alpha x) = \alpha u(x) = \alpha(\lambda x) = \lambda(\alpha x)$$

Exemple : $u : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \longmapsto \begin{bmatrix} x_1 \\ -x_2 \end{bmatrix}$$

Le vecteur $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ est un vecteur propre de u associé à la valeur propre -1

$$u\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} = (-1)\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$u\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1000 \end{bmatrix}\right) = (-1)\begin{bmatrix} 0 \\ 1000 \end{bmatrix}, \quad u\left(\begin{bmatrix} 0 \\ \alpha \end{bmatrix}\right) = (-1)\begin{bmatrix} 0 \\ \alpha \end{bmatrix}$$

Rq : $v : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \longmapsto \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2}\, x_1 - 1/\sqrt{2}\, x_2 \\ -1/\sqrt{2}\, x_1 + 1/\sqrt{2}\, x_2 \end{bmatrix}$$

$\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$ est un vecteur propre de v associé à la valeur propre $\sqrt{2}$

$$v\left(\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \overbrace{1/\sqrt{2} \times 1/\sqrt{2}}^{1/2} \overbrace{- \frac{1}{\sqrt{2}} \times (-1/\sqrt{2})}^{+1/2} \\ \underbrace{-1/\sqrt{2} \times 1/\sqrt{2}}_{-\frac{1}{2}} \underbrace{+ \frac{1}{\sqrt{2}}(-1/\sqrt{2})}_{-1/2} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \sqrt{2}\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

↳ Lorsqu'un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ est une valeur propre de $u \in \mathcal{L}(E)$, il existe une infinité de vecteurs pour lesquels appliquer u revient à multiplier par λ

$\Rightarrow$ Ces vecteurs forment un sous-espace stable de E

Définition : Si $\lambda \in \mathbb{K}$ est une valeur propre de $u \in \mathcal{L}(E)$, l'ensemble des vecteurs propres associés à λ et 0_E forment le sous-espace propre associé à λ. C'est un sous-espace vectoriel de E qui est stable par u.

Notation : Le sous-espace propre associé à λ se note

$$\ker(u - \lambda \, id_E) \quad , \text{avec} \quad id_E : \begin{array}{l} E \to E \\ x \mapsto x \end{array} \in \mathcal{L}(E)$$

λ valeur propre de $u \iff \exists\, x \in E,\ x \neq 0_E,\ u(x) = \lambda x$

$\iff \exists\, x \in E,\ x \neq 0_E,\ u(x) - \lambda x = 0_E$

$\iff \exists\, x \in E,\ x \neq 0_E,\ u(x) - (\lambda id_E)(x) = 0_E$

u, id_E sont des applications linéaires et $\mathcal{L}(E)$ est un $\mathbb{K}$-ev $\longrightarrow$ $\iff \exists\, x \in E,\ x \neq 0_E,\ (u - \lambda id_E)(x) = 0_E$

$\iff \exists\, x \neq 0_E,\ x \in \ker(u - \lambda id_E)$

⚠ Si λ n'est pas valeur propre de u, $\ker(u - \lambda id_E) = \{0\}$

↳ Une application linéaire peut avoir

en dimension finie ou infinie
- un nombre fini de valeurs propres ≥ 1 ;
- aucune valeur propre ;
- une infinité de valeurs propres (uniquement en dimension infinie !)

↳ 0_E n'est pas un vecteur propre, mais $0_E \in \ker(u - \lambda \mathrm{id}_E)$ $\forall \lambda \in \mathbb{K}$

Cas de la dimension finie

Définition : Soit $M \in \mathbb{K}^{n \times n}$ une matrice.

On dit que $\lambda \in \mathbb{K}$ est une valeur propre de M si

$$\exists x \in \mathbb{K}^n, \quad Mx = \lambda x$$

→ En dimension finie, on passe par des représentations matricielles pour trouver les valeurs propres.

→ Une application linéaire peut être représentée par plusieurs matrices en fonction de la base mais la représentation ne change pas les valeurs ni les vecteurs propres.

Proposition :

- Si M et $\tilde{M}$ représentent le même endomorphisme dans des bases différentes, alors elles ont les mêmes valeurs propres et les mêmes vecteurs propres*.
- Deux matrices semblables ont les mêmes valeurs propres et les mêmes vecteurs propres*.

* à un changement de base près

Ex) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ont les mêmes valeurs propres

$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ et $P\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}P^{-1}$ avec P une matrice inversible

ont les mêmes valeurs propres et les mêmes vecteurs propres à un changement de base près.

les deux matrices sont égales lorsque $P = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

Remarque : L'existence des valeurs propres dépend de la matrice mais aussi du choix de $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$)

Par exemple, la matrice $M = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ n'admet pas de valeur propre en tant que matrice de $\mathbb{R}^{2\times 2}$

$\lambda \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^2$, $x \neq 0_{\mathbb{R}^2}$,

$$Mx = \lambda x \iff \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \end{bmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} -x_2 = \lambda x_1 & (1) \\ x_1 = \lambda x_2 & (2) \end{cases}$$

substitution de (1) dans (2)

$$\iff \begin{cases} -x_2 = \lambda x_1 \\ x_1 = -\lambda^2 x_1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} -x_2 = \lambda x_1 \\ x_1 = 0 \text{ ou } \lambda^2 = -1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x_1 = x_2 = 0 & (a) \\ \lambda^2 = -1,\ -x_2 = \lambda x_1 & (b) \end{cases}$$

(a) contredit $x \neq 0_{\mathbb{R}^2}$

(b) $\lambda^2 = -1$ pas de solution dans $\mathbb{R}$

↳ En revanche, si on considère M comme une matrice de $\mathbb{C}^{2\times 2}$, alors M admet les valeurs propres i et $-i$

$(i^2 = (-i)^2 = -1)$

En bref :

- Valeurs / vecteurs propres pour un endomorphisme / une matrice
  → Calcul : systèmes d'équations linéaires ⚠ $\mathbb{R}$ vs $\mathbb{C}$
- Sous-espaces propres : vecteurs propres $+ 0_E$ ⟹ sous-espace stable
  ⟹ Permet des représentations simplifiées d'un endomorphisme (réduction)