Algèbre linéaire et applications aux sciences des données

20 septembre 2024

Aujourd'hui

TD (ce matin 8h30 - 10h)

Cours (maintenant)

⚠ L'organisation sur les semaines à venir pourra varier

Valeurs propres et décomposition

<u>Rappel</u> : $u \in \mathcal{L}(E)$, E $\mathbb{K}$-ev

$\lambda \in \mathbb{K}$ valeur propre de $u \iff \exists x \neq 0_E,\ u(x) = \lambda x$

$\iff \ker(u - \lambda . id_E) \neq \{0_E\}$

Sous-espace propre associé à la valeur propre $\lambda \in \mathbb{K}$

↳ On cherche à étudier u sur les sous-espaces propres de manière individuelle (car sur un sous-espace propre E_λ associé à $\lambda \in \mathbb{K}$, $u|_{E_\lambda} = \lambda id_{E_\lambda}$)

<u>Proposition</u> : Si $(u,v) \in \mathcal{L}(E)^2$ vérifie $u \circ v = v \circ u$,

$u(v(x)) = v(u(x))\ \forall x \in E$

alors

(i) $\mathrm{Im}\, u$ stable par v

(ii) $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $\ker(u - \lambda id_E)$ stable par v

<u>Démo</u> :

(i) Soit $y \in \mathrm{Im}(u)$. On veut montrer que $v(y) \in \mathrm{Im}\, u$.

Comme $y \in \mathrm{Im}(u)$, $\exists x \in E,\ y = u(x)$.

Donc $v(y) = v(u(x)) = (v \circ u)(x) \overset{u \circ v = v \circ u}{=} (u \circ v)(x) = u(v(x))$

$= u(z) \in \mathrm{Im}(u)$

$z = v(x) \in E$

(ii) Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ et $x \in \ker(u - \lambda id_E) = \{\bar{x} \mid (u - \lambda id_E)(\bar{x}) = 0_E\}$

On veut montrer que $v(x) \in \ker(u - \lambda id_E)$

$(u - \lambda id_E)(v(x)) = u(v(x)) - \lambda id_E(v(x))$

$= (u \circ v)(x) - \lambda v(x)$

$= v(u(x)) - \lambda v(x)$

On $x \in \ker(u - \lambda id_E) \Leftrightarrow u(x) = \lambda x$

Donc $(u - \lambda id_E)(v(x)) = v(u(x)) - \lambda v(x)$

$= v(\lambda x) - \lambda v(x) = \lambda v(x) - \lambda v(x) = 0_E$

Conclusion : $v(x) \in \ker(u - \lambda id_E)$

Proposition : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, E $\mathbb{K}$-ev.
Supposons que $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ $(k \geq 1)$ soient k valeurs propres distinctes de u, et notons $E_{\lambda_i} := \ker(u - \lambda_i id_E)$ $\forall i = 1..k$

Alors les sous-espaces propres $E_{\lambda_1}, \ldots, E_{\lambda_k}$ sont en somme directe, c'est-à-dire que

$(*)$ $\forall (x_1, \ldots, x_k) \in E_{\lambda_1} \times \ldots \times E_{\lambda_k}$, $\sum_{i=1}^{k} x_i = 0_E \Rightarrow x_i = 0_E$ $\forall i$

Démo : Récurrence sur k (nombre de valeurs propres distinctes.

1) $k = 1$ $(*)$ $x_1 = 0_E \Rightarrow x_1 = 0_E$ Vrai ✓

2) Supposons que $(*)$ est vraie pour k valeurs propres distinctes.
On montre que c'est aussi vrai pour $k+1$ valeurs propres distinctes.

: Soient donc $\lambda_1, \ldots, \lambda_{k+1}$ $k+1$ valeurs propres distinctes de u
et $E_{\lambda_1}, \ldots, E_{\lambda_{k+1}}$ les $k+1$ sous-espaces propres associés.

Soit enfin $(x_1, \ldots, x_{k+1}) \in E_{\lambda_1} \times \ldots \times E_{\lambda_{k+1}}$ tels que

$$\sum_{i=1}^{k+1} x_i = 0_E$$

(on veut montrer $x_i = 0_E \quad \forall i = 1..k+1$)

$$\sum_{i=1}^{k+1} x_i = 0_E \iff x_{k+1} = -x_1 - \dots - x_k \quad (1)$$

$$\xrightarrow{\text{application de } u} \implies u(x_{k+1}) = u\left(-\sum_{i=1}^{k} x_i\right)$$

$$\xrightarrow{\text{linéarité de } u} \iff u(x_{k+1}) = -\sum_{i=1}^{k} u(x_i)$$

$$\iff \lambda_{k+1} x_{k+1} = -\sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i \quad (2)$$

Deux cas

a) Si $\lambda_{k+1} = 0$ (et donc $\lambda_i \neq 0$ pour $i \neq k+1$)

$$(2) \iff \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i = 0_E \quad \text{avec} \quad \lambda_i x_i \in E_{\lambda_i} \quad (\underline{\text{sous-espace}})$$

Par hypothèse de récurrence, $\lambda_i x_i = 0_E \quad \forall i = 1..k$

$$\iff x_i = 0_E \quad \forall i = 1..k$$

Comme $x_{k+1} = -\sum_{i=1}^{k} x_i$ par (1), on a aussi $x_{k+1} = 0_E$,

ce qui prouve (*)

b) $\lambda_{k+1} \neq 0$

$$(2) \iff x_{k+1} = \sum_{i=1}^{k} -\frac{\lambda_i}{\lambda_{k+1}} x_i$$

Or $(1) \iff x_{k+1} = \sum_{i=1}^{k} (-x_i)$

En combinant (1) et (2), on obtient

$$\sum_{i=1}^{k} (-x_i) = \sum_{i=1}^{k} \left(-\frac{\lambda_i}{\lambda_{k+1}}\right) x_i$$

$$\sum_{i=1}^{k} \underbrace{\left(1-\frac{\lambda_i}{\lambda_{k+1}}\right)}_{\neq 0} x_i = 0 \quad \xRightarrow{\text{Hypothèse de récurrence}} \quad \left(1-\frac{\lambda_i}{\lambda_{k+1}}\right) x_i = 0_E \quad \forall i=1..k$$

$\in E_{\lambda_i}$

$\neq 0$ car les λ_i sont distincts de λ_{k+1}

$$\Longleftrightarrow x_i = 0_E \quad \forall i=1..k$$

Comme $x_{k+1} = -\sum_{i=1}^{k} x_i$, on a aussi : $x_{k+1} = 0_E$ et donc $(*)$ est vraie avec $k+1$ valeurs propres distinctes.

FIN DÉMO

Conséquences :

- En dimension finie ($\dim E = n$), un endomorphisme ne peut pas avoir plus de n valeurs propres distinctes (en dim n, une famille de plus de n vecteurs ($\geq n+1$) est nécessairement liée et donc $(*)$ serait fausse)

- La propriété $(*)$ signifie que toute famille $(x_1, \dots, x_k)$ de $E_{\lambda_1} \times \dots \times E_{\lambda_k}$ est une famille libre.

- Cas idéal : $E = \bigoplus_{i=1}^{k} E_{\lambda_i}$ (Somme directe de sous-espaces propres)

Pas toujours possible

→ On veut identifier les cas où c'est possible
→ On veut pouvoir calculer les sous-espaces propres (et donc réduire l'endomorphisme) quand c'est possible

Un outil : le polynôme caractéristique

② Polynôme caractéristique

Def : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, E $\mathbb{K}$-ev., $\dim(E)=n$, M une représentation matricielle de u dans une certaine base.

- Le polynôme caractéristique de M est donné par

$$\chi_M(X) = \det(M - X I_n)$$

$\det(XI_n - M)$

identifier $\begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{bmatrix}$ n

- Le polynôme caractéristique d'un endomorphisme est défini comme $\det(u - X\,id_E) := \det(M - X I_n)$ avec M une représentation de u

Remarques

- $\forall P$ inversible, $\det(PMP^{-1} - XI_n) = \det(P^{-1}(M - XI_n)P)$

$$= \det(P^{-1})\det(M - XI_n)\det P$$

$$= \frac{1}{\det(P)}\det(M - XI_n)\det P$$

$$= \det(M - XI_n)$$

$\Rightarrow$ Deux matrices semblables ont même polynôme caractéristique

$\Rightarrow$ La notion de polynôme caractéristique pour u est bien définie.

- $\forall (A,B) \in (\mathbb{R}^{n\times n})^2$, $\chi_A = \chi_{A^T}$ et $\chi_{AB} = \chi_{BA}$

- La notion de polynôme caractéristique s'étend en dimension infinie

Théorème : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, E $\mathbb{K}$-ev.

$[\lambda \in \mathbb{K}$ valeur propre de $u] \iff [\chi_u(\lambda) = 0$, où χ_u est le polynôme caractéristique de $u]$

↪ Conséquence : Procédure pour trouver les valeurs propres d'un endomorphisme (notamment en dimension finie)

- Calculer le polynôme caractéristique
- Calculer ses racines. dans $\mathbb{K}$

⚠ $M = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ $\qquad \chi_M(X) = \det(M - XI_2) = \begin{vmatrix} -X & -1 \\ 1 & -X \end{vmatrix}$

$= X^2 + 1$

$\chi_M(X) = 0 \qquad X^2 + 1 = 0$ $\quad$ pas de racines dans $\mathbb{R}$
2 racines dans $\mathbb{C}$ (i et $-i$)

NB : Quand on connaît les valeurs propres, trouver des vecteurs propres (ou des sous-espaces propres) se fait en résolvant un système linéaire.

Rappel. $\quad 1$ est racine simple de $X - 1 = 0$
1 est racine triple de $(X-1)^3 = 0$

Corollaires $\quad$ Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, E $\mathbb{K}$-ev

- L'ordre de multiplicité d'une racine de χ_u (notée λ) s'appelle l'ordre de multiplicité algébrique de λ. Si on note m_λ cette valeur, alors
$$1 \leq \dim(E_\lambda) \leq m_\lambda$$

E_λ sous-espace propre associé à λ $\qquad E_\lambda = \ker(u - \lambda \mathrm{id}_E)$

On dit que $\dim(E_\lambda)$ est l'ordre de multiplicité géométrique de λ.

- Si $m_\lambda = 1$, on a $\dim(E_\lambda) = 1$. Par conséquent, toute racine simple de χ_u est associée à un sous-espace propre de dimension 1.
- En dimension finie, $\dim(E) = n$, le polynôme caractéristique est de degré au plus n et donc u a au plus n valeurs propres

NB : $u = id_E$ $\chi_u = (-1)^n (X-1)^n$ 1 racine multiple et unique valeur propre

$\Leftrightarrow u - id_E = 0_E$

$\Leftrightarrow \ker(u - id_E) = E$

- Lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et que $\dim(E) = n$, un endomorphisme admet exactement n valeurs propres en comptant leurs ordres de multiplicité algébrique

$$\chi_u(X) = (\lambda_1 id_E - X id_E)(\lambda_2 id_E - X id_E) \dots (\lambda_n id_E - X id_E)$$

avec $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^n$ possiblement non distinctes

Si $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ sont les valeurs propres distinctes

$$\chi_u(X) = (\lambda_1 id_E - X id_E)^{m_{\lambda_1}} \dots (\lambda_k id_E - X id_E)^{m_{\lambda_k}}$$

ordres de multiplicité algébrique

Cas particulier $n=2$

$$\forall M \in \mathbb{R}^{2\times 2}, \quad \chi_M(X) = X^2 - (\operatorname{tr} M) X + \det M$$

$$\det(M - X I_n) = \begin{vmatrix} M_{11} - X & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} - X \end{vmatrix} = X^2 - \underbrace{(M_{11} + M_{22})}_{\operatorname{tr}(M)} X + \underbrace{M_{11}M_{22} - M_{12}M_{21}}_{\det M}$$

Généralisation : En dimension n,

$$\chi_M(X) = (-1)^n X^n + (-1)^{n-1} \operatorname{tr} M \, X^{n-1} + \dots + \det M$$