Algèbre linéaire et applications aux sciences des données

26/09/2024

Cette semaine

- Aujourd'hui : Cours 8h30 - 10h
- Demain : Cours 8h30 - 10h
  TD 10h15 - 11h45 (S. Kerleau)

La suivante :

- Cours mercredi . 02/10 8h30 - 10h
- TD (TP?) vendredi 04/10 8h30 - 11h45

↳ Jusqu'à nouvel ordre, on se place dans un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension n finie.

↳ Dans ce cadre, on considère une application linéaire $u \in \mathcal{L}(E)$, que l'on peut représenter dans n'importe quelle base de E par une matrice de $\mathbb{K}^{n \times n}$

Q) Quelle est la meilleure base possible, càd celle qui donne la représentation matricielle la plus simple possible de u ?

But: Représentation efficace de l'application

Ex) $n = 3$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, u représentée par $\begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{bmatrix}$ dans la base canonique

Il existe une base de $\mathbb{R}^3$ telle que la représentation de u dans cette base est $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Cette représentation permet de voir directement:

→ les valeurs propres de u (sur la diagonale)

→ le rang de u / la dimension de l'image

→ la dimension du noyau / la "taille" de l'information perdue en appliquant u

ici u associe un espace de dimension 3 à un espace de dimension 1 (l'image de u)

→ la valeur des valeurs propres indique l'effet de u sur les vecteurs propres

v.p. de 1 : les vecteurs propres sont inchangés par u

v.p. de 0 : les vecteurs propres sont changés en vecteurs nuls

1) Diagonalisation

↳ On cherche une manière systématique de déterminer la meilleure représentation possible de u.

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix} \quad \lambda_i \in \mathbb{K} \ \forall i$$

↳ L'idéal serait une matrice diagonale

* Une matrice de $\mathbb{K}^{n \times n}$ diagonale se représente avec un vecteur de $\mathbb{K}^n$ qui contient les éléments diagonaux
  → Représentation en mémoire : Matrice de $\mathbb{K}^{n \times n}$ (n^2 coefficients) VS Vecteur de $\mathbb{K}^n$ (n coefficients)
* Plus facile de faire des produits matrice-vecteur (Mv, $v \in \mathbb{K}^n$) et matrice-matrice (MA, BM avec $A \in \mathbb{K}^{n \times m}$, $B \in \mathbb{K}^{l \times n}$) lorsque M est diagonale
* Si M est diagonale, ses valeurs propres sont ses éléments diagonaux !

Si $M = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix}$, alors $\chi_M(X) = \det(M - X I_n)$

matrice identité $\begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{bmatrix}$

$$= \begin{vmatrix} \lambda_1 - X & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n - X \end{vmatrix}$$

Formule du déterminant

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} A_{\sigma(i)i} \longrightarrow = \prod_{i=1}^{n} (\lambda_i - X)$$

$\mathfrak{S}_n$: ensemble des permutations de $\{1, \dots, n\}$

On λ valeur propre de $M \iff \lambda$ racine de χ_M
$\iff \chi_M(\lambda) = 0$
$\iff \exists\, i \in \{1, \dots, n\},\ \lambda = \lambda_i$

Définition :

. On dit que $u \in \mathcal{L}(E)$ est diagonalisable lorsqu'il existe une base de E constituée de vecteurs propres de u.

. On dit que $M \in \mathbb{K}^{n \times n}$ est diagonalisable si elle est semblable à une matrice diagonale (càd $M = PDP^{-1}$ avec D diagonale, P inversible)

↳ On cherche des conditions pour lesquelles une matrice est diagonalisable.

Théorème : Les propriétés suivantes sont équivalentes.

(i) $u \in \mathcal{L}(E)$ est diagonalisable

(ii) Il existe une base de u dans laquelle u se représente par une matrice diagonale.

(iii) Si $E_{\lambda_1}, \dots, E_{\lambda_k}$ sont les sous-espaces propres de u (associés aux valeurs propres distinctes de u), on a $E = \bigoplus_{i=1}^{k} E_{\lambda_i}$

(iv) Le polynôme caractéristique de u est scindé et pour toute valeur propre λ_i de u, la dimension de E_{λ_i} est égale à l'ordre de multiplicité de λ_i dans χ_u

NB : χ_u scindé $\Longleftrightarrow$ $\chi_u(X) = \prod_{i=1}^{n} (\mu_i - X)$ avec $\mu_i \in \mathbb{K}$, les μ_i ne sont pas nécessairement distincts

Ex) $X^2 - 1 = (X+1)(X-1)$ scindé dans $\mathbb{R}[X]$ / $\mathbb{C}[X]$

$X^2(X-1)$ scindé dans $\mathbb{R}[X]$ / $\mathbb{C}[X]$

X^2+1 pas scindé dans $\mathbb{R}[X]$ mais scindé dans $\mathbb{C}[X]$

Démonstration du théorème

(i) ⇒ (ii) Si u diagonalisable, par définition il existe une base de vecteurs propres de u, càd n vecteurs $(v_1, \dots, v_n)$ tels que $v_i \neq 0_{\mathbb{K}^n}$ et $u(v_i) = \lambda_i v_i$ (λ_i valeur propre de u associée à v_i)

Dans la base $(v_1, \ldots, v_n)$, u possède la représentation matricielle

$$\begin{array}{c|c} & \begin{matrix} u(v_1) & \cdots & u(v_n) \end{matrix} \\ \begin{matrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{matrix} & \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix} \end{array}$$

$\forall i = 1..n$

$u(v_i) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j v_j$

avec $\alpha_i = \lambda_i$

$\alpha_j = 0$ si $j \neq i$

(ii) $\Rightarrow$ (iii)

Soit $(v_1, \ldots, v_n)$ une base dans laquelle u se représente par une matrice diagonale. Notons $M = \begin{bmatrix} \bar{\lambda}_1 & 0 \\ 0 & \ddots \; \bar{\lambda}_n \end{bmatrix}$ cette matrice.

Alors $Mv_i = \bar{\lambda}_i v_i \quad \forall i = 1..n$ et $\bar{\lambda}_i$ est une valeur propre de u | de M.

On peut toujours choisir les vecteurs de sorte à grouper les coefficients diagonaux identiques. Notons $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ les $k (\leq n)$ valeurs propres <u>distinctes</u> de M, et supposons que $M = \begin{bmatrix} \underbrace{\lambda_1 \ddots \lambda_1}_{m_1} & & 0 \\ 0 & & \underbrace{\lambda_k \ldots \lambda_k}_{m_k} \end{bmatrix}$

Alors $\forall i = 1..k$,

$$E_{\lambda_i} = \text{vect}(v_i \mid Mv_i = \lambda_i v_i)$$

$$= \begin{cases} \text{vect}(v_1, \ldots, v_{m_1}) & \text{si } i = 1 \\ \text{vect}(v_{m_{i-1}+1}, \ldots, v_{m_{i-1}+m_i}) & \text{si } 1 < i < k \\ \text{vect}(v_{n-m_k+1}, \ldots, v_n) & \text{si } i = k \end{cases}$$

Comme $(v_1, \ldots, v_n)$ est une base de E, on sait que

$$E = \text{vect}(v_1, \ldots, v_n) = \sum_{i=1}^{k} E_{\lambda_i}$$

$\text{Vect}(u_1, \ldots, u_p, u_{p+1}, \ldots, u_m) = \text{Vect}(u_1, \ldots, u_p) + \text{Vect}(u_{p+1}, \ldots, u_m)$

Pour montrer que $\sum_{i=1} E_{\lambda_i} = \bigoplus_{i=1} E_{\lambda_i}$, on utilise le fait que $(v_1, -, v_n)$ forme une base de E, donc une famille libre

$$\forall v \in \sum_{i=1}^{k} E_{\lambda_i}, \quad v = \sum_{i=1}^{k} \overbrace{\sum_{v_j \in E_{\lambda_i}} \alpha_j v_j}^{\in E_{\lambda_i}} \quad \text{où } (\alpha_1, -, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n$$

Donc $v = 0_{\mathbb{K}^n} \Rightarrow \sum_{i=1}^{k} \sum_{v_j \in E_{\lambda_i}} \alpha_j v_j = 0_{\mathbb{K}^n}$

$$\Leftrightarrow \sum_{j=1}^{n} \alpha_j v_j = 0_{\mathbb{K}^n}$$

$$\Rightarrow \alpha_j = 0 \ \forall j \quad \text{car } (v_1, -, v_n) \text{ est une famille libre}$$

$$\Rightarrow \sum_{v_j \in E_{\lambda_i}} \alpha_j v_j = 0 \quad \forall i = 1..k$$

(iii) $\Rightarrow$ (iv)

Notons $m_i = \dim(E_{\lambda_i})$.

Par hypothèse, $E = \bigoplus_{i=1}^{k} E_{\lambda_i}$. On peut donc former une base de E avec des bases de $E_{\lambda_1}, -, E_{\lambda_k}$

Notons $(v_1, -, v_n)$ cette base avec

$(v_1, -, v_{m_1})$ base de E_{λ_1}) ces vecteurs sont vecteurs propres de u associés à λ_1

$(v_{m_1+1}, -, v_{m_1+m_2})$ — E_{λ_2}

⋮

$(v_{n-m_k+1}, -, v_n)$ — E_{λ_k}) vecteurs propres associés à λ_k

Alors la représentation matricielle de u dans la base $(v_1, -, v_n)$ est

$$M = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & 0 & \\ & & \lambda_1 & & & & & \\ & & & \lambda_2 & & & & \\ & & & & \ddots & & & \\ & 0 & & & & \lambda_k & & \\ & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & \lambda_k \end{bmatrix}$$

m_1, m_k

On a donc $\chi_u(X) = \chi_M(X) = \prod_{i=1}^{k} (\lambda_i - X)^{m_i}$

$\Rightarrow$ polynôme scindé et l'ordre de multiplicité de λ_i est bien égal à $m_i = \dim(E_{\lambda_i})$

(iv) $\Rightarrow$ (i)

Le polynôme caractéristique de u est scindé et il est de degré n. Il s'écrit $\prod_{i=1}^{k} (\lambda_i - X)^{\dim(E_{\lambda_i})}$, et on a donc

$$n = \sum_{i=1}^{k} m_i .$$

Par conséquent, on a $\dim\left(\bigoplus_{i=1}^{k} E_{\lambda_i}\right) = \sum_{i=1}^{k} m_i = n$, et donc $\bigoplus_{i=1}^{k} E_{\lambda_i} = E$. Par conséquent, il existe une base de vecteurs propres associés à u, et u est diagonalisable.

↳ Le théorème donne différentes caractérisations du fait qu'une application linéaire / une matrice est diagonalisable.

⚠ Il existe des matrices qui ne sont pas diagonalisables, et donc qui ne vérifient aucune de ces conditions (même si elles peuvent vérifier une partie d'une des conditions, comme d'avoir un polynôme caractéristique scindé)

Ex) $M = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

Que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$,

$\chi_M(X) = X^2$ scindé

or $\dim(E_0) = \dim(\ker M)$

$= 1 < 2$