Algèbre linéaire et applications aux sciences des données

27/09/2024

Aujourd'hui :

- Diagonalisation et applications
- Trigonalisation

CM

- Suite (et fin) TD valeurs propres

1) Applications de la diagonalisation

$M \in \mathbb{K}^{n \times n}$ est diagonalisable $\iff$ $M = P\begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix}P^{-1}$

(M semblable à la matrice diagonale $\begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix}$)

↳ Dans ce cas, les valeurs $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ (éléments de $\mathbb{K}$) sont les valeurs propres de M.

↳ Le produit $P\begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix}P^{-1}$ s'appelle une décomposition en valeurs propres ou décomposition spectrale (spectre = ensemble des valeurs propres)

→ $\{\lambda_i\}$ peuvent être trouvées à partir du polynôme caractéristique de M

→ La matrice P peut être calculée à partir d'une base de vecteurs propres / à partir de bases de chacun des sous-espaces propres

→ Cas particulier : Si les $\{\lambda_i\}_{i=1..n}$ sont distinctes, alors chaque sous-espace propre est de dimension 1 et il suffit de trouver un vecteur propre associé à chaque valeur propre pour construire une base

Application : Calcul de puissances de M

Q) Étant donné $M \in \mathbb{K}^{n \times n}$ diagonalisable, comment calculer M^k où $k \in \mathbb{N}$?

Approche naïve : Calculer $M \times M = M^2$ (n^3 opérations)
puis $M \times M^2 = M^3$ (n^3 opérations)

$$M \times M^{k-1} = M^k \quad (n^3 \text{ opérations})$$

$$\Rightarrow (k-1)\, n^3 \text{ opérations au total}$$

<u>Approche</u> qui <u>utilise la diagonalisation</u>

Si $M = P \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix} P^{-1}$, alors $\forall k \in \mathbb{N}$,

$$M^k = P \begin{bmatrix} \lambda_1^k & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n^k \end{bmatrix} P^{-1}$$

<u>Preuve</u> : On pose $D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix}$

Alors $M^k = \underbrace{M \times M \times \dots \times M}_{k \text{ fois}} = PDP^{-1} \times PDP^{-1} \times \dots \times PDP^{-1}$

$$= PD\underbrace{P^{-1}P}_{= I_n}DP^{-1}P \dots P^{-1}PDP^{-1}$$

$$= P\underbrace{DI_n}_{= D}DI_n \dots I_nDP^{-1}$$

$$= P\underbrace{DDD \dots D}_{k \text{ fois}}P^{-1}$$

$$= PD^kP^{-1}$$

$$= P \begin{bmatrix} \lambda_1^k & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n^k \end{bmatrix} P^{-1}$$

$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix}$

$D^2 = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^2 & 0 & \cdots 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n^2 \end{bmatrix}$

↳ Permet d'analyser le comportement de la suite $\{M^k\}_{k\in\mathbb{N}}$, ce qui sert à comprendre les systèmes dynamiques linéaires.

Ex) $x_{t+1} = M x_t \quad M \in \mathbb{K}^{n\times n}, x_t \in \mathbb{K}^n \ \forall t \in \mathbb{N}$

$\{x_t\}$ décrit une évolution d'un processus (population, épidémie, chaîne d'approvisionnement) sur des pas de temps mesurés par t

$\forall k \in \mathbb{N}, \quad x_k = M^k x_0$

Si M est diagonalisable, le comportement de la suite x_k est caractérisé par les valeurs propres de M.

Exemple en dimension 2

$x_{t+1} = A x_t \quad x_t \in \mathbb{R}^2$

$$A = \begin{bmatrix} -0.1 & 1 \\ -1 & -0.1 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times 2}$$

A possède 2 valeurs propres complexes $\lambda_1 = -0.995i$ et $\lambda_2 = 0.995i$

Comme $|\lambda_1| < 1$ et $|\lambda_2| < 1$,

on a nécessairement que $\{x_t\} \longrightarrow 0_{\mathbb{R}^2}$

quel que soit le choix de x_0.

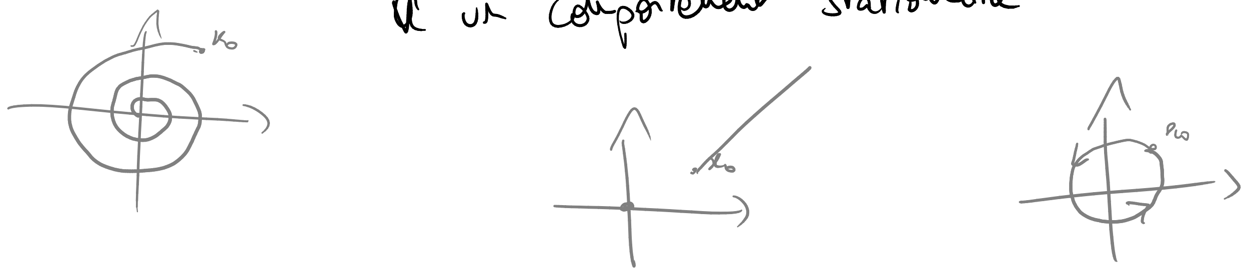
Si $A = P\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}P^{-1}$, alors $\forall t \in \mathbb{N}$, $x_t = \overbrace{P\begin{pmatrix}\lambda_1^t & 0 \\ 0 & \lambda_2^t\end{pmatrix}P^{-1}}^{A^t} x_0$

On $|\lambda_1| < 1$, $|\lambda_2| < 1 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1^t \xrightarrow[t\to\infty]{} 0 \\ \lambda_2^t \xrightarrow[t\to\infty]{} 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} \lambda_1^t & 0 \\ 0 & \lambda_2^t \end{pmatrix} \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$

$\Rightarrow A^t \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$

Plus généralement,

- si les valeurs propres sont de module ≥ 1, alors $\lambda_i^t \to \infty$ $\forall i$ et donc la suite x_t va diverger
- si les valeurs propres sont de module $= 1$, alors $|\lambda_i|^t = 1$ $\forall t$ $\forall i$ et donc la suite x_t a un comportement stationnaire



$|\lambda_1| < 1, |\lambda_2| < 1$ — $|\lambda_1| > 1, |\lambda_2| > 1$ — $|\lambda_1| = |\lambda_2| = 1$

Application : Inverse et interpolation

Soit $M \in \mathbb{K}^{n\times n}$ diagonalisable avec $M = PDP^{-1}$, $D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix}$

et $\lambda_i \neq 0$ $\forall i$

Alors M est inversible et

$$M^{-1} = P D^{-1} P^{-1} \text{ avec } D^{-1} = \begin{bmatrix} 1/\lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1/\lambda_n \end{bmatrix}$$

$$MM^{-1} = PDP^{-1}PD^{-1}P^{-1} = PDD^{-1}P^{-1} = PP^{-1} = I_n \; (= M^{-1}M)$$

$\Rightarrow$ "Facile" d'inverser une matrice inversible quand on en connaît une décomposition en valeurs propres.

Exemple d'application : Interpolation linéaire

$$X = \begin{bmatrix} & & \\ & X_{ij} & \\ & & \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n} \qquad y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

lignes de X : individus chacun caractérisé par n valeurs

valeurs de y : "labels" associé à chaque individu

But : Trouver un modèle linéaire qui prédise y_i à partir des valeurs $X_{i1}, \dots, X_{in}$ $\forall i = 1..n$

$\Rightarrow$ On cherche $\beta \in \mathbb{R}^n$ tel que $\underbrace{X}_{n\times n}\underbrace{\beta}_{n\times 1} = \underbrace{y}_{n\times 1}$ $\rightarrow$ Système de n équations linéaires à n inconnues

Si X est inversible, l'unique solution du système $X\beta = y$ est $X^{-1}y$ $\quad (X(X^{-1}y) = XX^{-1}y = I_n y = y)$

Si on connaît une décomposition spectrale PDP^{-1} de X, alors on peut calculer facilement $X^{-1}y = PD^{-1}P^{-1}y$

- Diagonalisation $\rightarrow$ Facilite certains calculs, notamment la résolution de systèmes linéaires
- Toutes les matrices ne sont pas diagonalisables ! $\rightarrow$ Besoin d'outils plus génériques

2) Trigonalisation

Cadre : E $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n (\geq 1)$, $u \in \mathcal{L}(E)$

Déf : u est dit **trigonalisable** s'il existe une base de E dans laquelle la représentation matricielle de u est une matrice **triangulaire** (inférieure ou supérieure).

Matrice triangulaire supérieure : $T = \begin{bmatrix} & \ast \\ 0 & \end{bmatrix}$ $\quad T_{ij} = 0$ si $i > j$

inférieure $T = \begin{bmatrix} & 0 \\ \ast & \end{bmatrix}$ $\quad T_{ij} = 0$ si $i < j$

Toute matrice triangulaire supérieure est semblable à une matrice triangulaire inférieure, et vice-versa.

Remarques

- u diagonalisable $\Rightarrow$ u trigonalisable puisque une matrice diagonale est à la fois triangulaire supérieure et triangulaire inférieure.
- La réciproque est fausse ! Ex) $M = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ est la représentation d'un endomorphisme trigonalisable mais pas diagonalisable

- On dit qu'une matrice est trigonalisable si elle est semblable à une matrice triangulaire, càd si : $M = PTP^{-1}$ avec T triangulaire

NB : Calculer des puissances / des inverses de matrices triangulaires est plus simple que de calculer ces quantités pour une matrice quelconque

Théorème :
- $u \in \mathcal{L}(E)$ est trigonalisable $\iff \chi_u$ est scindé (dans $\mathbb{K}$)
- Si E est un $\mathbb{C}$-ev, alors tout $u \in \mathcal{L}(E)$ est trigonalisable.

- Propriétés des matrices triangulaires

$\det\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = ad - bc$

- cas $n=2$ $\qquad T = \begin{bmatrix} \alpha & \gamma \\ 0 & \beta \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times 2}$

$$\begin{aligned} \chi_T(X) &= X^2 - \mathrm{tr}(T)X + \det(T) \\ &= X^2 - (\alpha+\beta)X + \alpha\beta \\ &= (X-\alpha)(X-\beta) \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Les valeurs propres de T sont α et β.

- Plus généralement, si $T = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix}$, alors $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont les racines de χ_T et les valeurs propres de T.

$$\chi_T(X) = \prod_{i=1}^{n} (\lambda_i - X)$$

Preuve du théorème

- u trigonalisable $\Rightarrow$ χ_u est égal au polynôme caractéristique d'une matrice triangulaire, qui est toujours scindé (cf plus haut)

($\Leftarrow$) Par récurrence

→ $n=1$ facile (tout u est trigonalisable)

→ $n \Rightarrow n+1$

$$\chi_u = \prod_{i=1}^{n} (\lambda_i - X)$$

Poser v_1 vecteur propre de u associé à λ_1, compléter v_1 en une base de E $(v_1, v_2, \dots, v_n)$ et considérer la représentation de u dans cette base

qui a la forme $\left[\begin{array}{c|c} \lambda_1 & * \\ \hline 0 & \\ \vdots & M_1 \\ 0 & \end{array}\right]$, puis

appliquer l'hypothèse de récurrence à M_1