Algèbre linéaire et applications aux sciences des données

2 octobre 2024

Aujourd'hui : Cours (Polynômes et réduction)

Vendredi : TD (feat Notebook Python d'illustration)

POLYNÔMES ET RÉDUCTION

Motivation : . Le polynôme caractéristique permet de calculer les valeurs propres.

. S'il est scindé, l'endomorphisme/la matrice est trigonalisable

. Si en plus la dimension des sous-espaces propres est égale à l'ordre de multiplicité des valeurs propres dans le polynôme caractéristique, alors l'application linéaire/la matrice est diagonalisable.

$\rightarrow$ Cette condition ne peut pas être vérifiée uniquement avec le polynôme caractéristique.

But du jour : Remplacer cette condition par une propriété sur un polynôme (du type "si un certain polynôme est scindé, alors la matrice/l'endomorphisme est diagonalisable")

Cadre de travail : E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $u \in \mathcal{L}(E)$
$\dim(E) = n < \infty$

1 Polynômes d'applications linéaires

Soit $P(X) \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme à coefficients dans $\mathbb{K}$.

$$P(X) = \sum_{k=0}^{m} a_k X^k = a_0 + a_1 X + \dots + a_m X^m \quad , \quad a_m \neq 0$$

$m = \deg(P)$: degré du polynôme

Étant donné $u \in \mathcal{L}(E)$, le polynôme $P(u)$ est l'application linéaire définie par

$$P(u) = a_0 \, id_E + a_1 u + \dots + a_m u^m \in \mathcal{L}(E)$$

avec $u^k = \overbrace{u \circ u \circ \cdots \circ u}^{k \text{ fois}}$ $\quad \left(u^k(x) = u(u(\cdots u(x)) \cdots)\right)$

↳ On peut définir de même des polynômes de matrice

$\forall M \in \mathbb{K}^{n \times n}, \quad P(M) = a_0 I_n + a_1 M + \dots + a_m M^m \in \mathbb{K}^{n \times n}$

Définition : On dit que $P \in \mathbb{K}[X]$ est un polynôme annulateur de u si $P(u) = 0_{\mathcal{L}(E)}$, càd $P(u)(x) = 0_E \ \forall x \in E$

<u>NB</u> : On peut aussi parler de polynômes annulateurs de matrices.

Proposition Si $P \in \mathbb{K}[X]$ est un polynôme annulateur de u, alors toute valeur propre de u est racine de P.

Démo Soit $x \neq 0_E$ un vecteur propre de u associé à la valeur propre $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors $u(x) = \lambda x$ par définition

et donc $\forall k \in \mathbb{N}$, $u^k(x) = u(u(\cdots u(x) \cdots)) = \lambda^k x$

Par conséquent, si $P(X) = \sum_{k=0}^{m} a_k X^k$, alors

$$\underbrace{P(u)}_{\in \mathcal{L}(E)}(x) = \sum_{k=0}^{m} a_k u^k(x) = \sum_{k=0}^{m} a_k \lambda^k x = \overbrace{\left(\sum_{k=0}^{m} a_k \lambda^k\right)}^{\in \mathbb{K}} x$$

$$= \underbrace{P(\lambda)}_{\in \mathbb{K}} x$$

Or $P(u) = 0_{\mathcal{L}(E)}$ par hypothèse (P annulateur),

donc en particulier $P(u)(x) = P(\lambda) x = 0_E$

Comme $x \neq 0_E$ (vecteur propre), cela implique que $P(\lambda) = 0_{\mathbb{K}}$, et donc que λ est racine de P. $\square$

(\Halmos)

⚠ $\left.\begin{array}{l}\lambda \text{ valeur propre de } u \\ P \text{ annulateur de } u\end{array}\right\} \Rightarrow \lambda$ racine de P

mais la réciproque est fausse

Contre-ex : $u = id_E$ $\quad P(X) = X^2(X-1) = X^3 - X^2$

0 racine de P mais pas valeur propre de u

et pourtant $P(u) = 0_{\mathcal{L}(E)}$

$u = id_E$
$u^2 = id_E$
$u^3 = id_E$

$$P(u)(x) = u^3(x) - u^2(x) = x - x = 0_E$$

Théorème de Cayley-Hamilton

Soit χ_u le polynôme caractéristique de u

($\chi_u(X) = \det(M - X I_n)$ $\forall$ matrice M qui représente u dans une base)

Alors χ_u est un polynôme annulateur de u

càd $\chi_u(u) = 0_{\mathcal{L}(E)}$

Démo : On veut montrer que $\chi_u(u)(x) = 0_E$ $\quad \forall x \in E$ $\quad \chi_u(u)(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k u^k(x)$

→ Vrai si $x = 0_E$.

→ On suppose dans la suite que $x \neq 0_E$

Soit l'ensemble $\{k \in \mathbb{N}^* \mid (\underset{x}{u^0(x)}, \dots, u^{k-1}(x))$ est une famille libre $\}$

Cet ensemble n'est pas vide car il contient 1 $(x \neq 0_E)$

Pour $k \geqslant n+1$, la famille $(u^0(x), \ldots, u^{k-1}(x))$ a au moins $n+1$ éléments dans un espace de dimension n et donc elle ne peut pas être libre.

On note $p = \max\{k \in \mathbb{N}^* \mid (u^0(x), \ldots, u^{k-1}(x)) \text{ est libre}\}$
$(p < n+1)$

On considère la famille libre $(u^0(x), \ldots, u^{p-1}(x))$ et on la complète si besoin pour former une base de E

$$(u^0(x), \ldots, u^{p-1}(x), e_{p+1}, \ldots, e_n)$$

La matrice de u dans cette base est de la forme

$$\begin{array}{c|cc|} & \overleftrightarrow{p} & \overleftrightarrow{n-p} \\ p \updownarrow & B & C \\ n-p \updownarrow & 0 & D \end{array} = M \quad \text{avec} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots & \vdots \\ & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & & \ddots & 0 & \vdots \\ & & & 1 & a_{p-1} \end{bmatrix}$$

bloc de zéros

$u(u^k(x)) = u^{k+1}(x) \quad \forall k = 0 \ldots p-1$

$u^p(x)$ s'écrit $\sum_{k=0}^{p-1} a_k u^k(x)$

(car $(u^0(x), \ldots, u^{p-1}(x))$ est libre mais $(u^0(x), \ldots, u^p(x))$ est liée par définition)

1re colonne de B : coordonnées de l'image de $u^0(x)$ dans la base $(u^0(x), \ldots, u^{p-1}(x), e_{p+1}, \ldots, e_n)$

$u(u^0(x)) = u(x)$

$u = id_E$
$x \neq 0_E$
$u(x) = x \qquad (x)$ libre
$u^2(x) = x \qquad (x, x)$ liée

Dernière colonne de B : coordonnées de l'image de $u^{p-1}(x)$

$u(u^{p-1}(x)) = u^p(x) \notin$ base

Mais on sait que $(u^0(x), \ldots, u^p(x))$ est liée

On a alors $\underset{\det(M - XI_n)}{\underset{\uparrow}{\chi_u}} = \chi_B \chi_D$, où $\chi_B = \det(B - XI_p)$

$\chi_D = \det(D - XI_{n-p})$

et on montre que : $\chi_B(X) = (-1)^p \left[X^p - \sum_{i=0}^{p-1} a_i X^i\right]$

Par conséquent,

$$\chi_u(u) = \chi_B(u)\, \chi_D(u)$$

$$= \chi_D(u)\, \chi_B(u)$$

$$= (-1)^p \chi_D(u) \left(u^p - \sum_{k=0}^{p-1} a_k u^k \right)$$

On a enfin

$$\chi_u(u)(x) = (-1)^p \chi_D(u) \left(u^p - \sum_{k=0}^{p-1} a_k u^k \right)(x)$$

$$= (-1)^p \chi_D(u) \left(\underbrace{u^p(x) - \sum_{k=0}^{p-1} a_k u^k(x)}_{= u^p(x) \text{ par construction}} \right)$$

$$= (-1)^p \chi_D(u)(0_E) = 0_E$$

$\square$

↳ L'ensemble des polynômes annulateurs de u est non vide (il contient le polynôme nul et χ_u)

Parenthèse

matrice triangulaire par blocs (sous-matrices carrées)

$$M = \begin{bmatrix} B & C \\ 0 & D \end{bmatrix} \qquad \chi_M(X) = \begin{vmatrix} B - XI_p & C \\ 0 & D - XI_{n-p} \end{vmatrix}$$

$$\det(M) = \det(B)\det(D) \qquad \det(M - XI_n) = \det(B - XI_p) \times \det(D - XI_{n-p})$$

Définition : Le polynôme minimal de u est le polynôme annulateur de u non nul de plus petit degré unitaire (dont le coefficient associé au terme de plus haut degré est égal à 1)

$3X^2+X+1$ pas unitaire
X^2+3X+7 unitaire

Proposition

(i) Le polynôme minimal de u existe et est unique.

(ii) Le polynôme minimal de u divise (au sens de la division euclidienne des polynômes) tout polynôme annulateur de u.

(iii) L'ensemble des racines du polynôme minimal est égal à l'ensemble des valeurs propres de u.

Rappel : $P \in \mathbb{K}[X]$, $\deg(P) = m$ et $P' \in \mathbb{K}[X]$.

On dit que P' divise P si $\exists\, Q \in \mathbb{K}[X]$ tels que $P(X) = P'(X)Q(X)$

Division euclidienne en général : Si $\deg(P') \leq \deg(P)$, $\exists\, (Q,R) \in \mathbb{K}[X]^2$ tels que $P(X) = P'(X)Q(X) + R(X)$ avec $\deg(R) < \deg(P')$

Théorème : u est diagonalisable (dans $\mathbb{K}$!)

$\Leftrightarrow$ le polynôme minimal de u est scindé à racines simples (dans $\mathbb{K}[X]$!)

Scindé à racines simples : $\prod_{i=1}^{p}(X-\lambda_i)$ $\{\lambda_i\}$ distincts