

# CAHIER DU LAMSADE

## 286

Septembre 2009

Pour mieux répondre à la préoccupation de  
robustesse en aide à la décision :  
Quatre propositions suite à un double constat

**POUR MIEUX RÉPONDRE À LA PRÉOCCUPATION DE ROBUSTESSE  
EN AIDE À LA DÉCISION :  
QUATRE PROPOSITIONS SUITE À UN DOUBLE CONSTAT  
*TO BETTER RESPOND TO ROBUSTNESS CONCERN IN DECISION AIDING:  
FOUR PROPOSALS BASED ON A TWOFOLD OBSERVATION***

**Bernard Roy, Professeur émérite à l'Université Paris-Dauphine**

**Résumé**

Après avoir rappelé ce que recouvre le qualificatif « robuste » en aide à la décision (AD) et expliqué pourquoi on se préoccupe de robustesse en AD, je présenterai (section 2) un double constat. Celui-ci me conduira à faire quatre propositions ayant pour objet de chercher à mieux répondre à la préoccupation de robustesse en AD. Je montrerai, dans le cadre des deux premières (sections 3 et 4), que les à peu près et zones d'ignorances vis-à-vis desquels la préoccupation de robustesse a pour objet de se protéger doivent, dans bien des cas, être pensés en substituant le concept de version à celui de scénario et en s'intéressant de surcroît aux diverses procédures de traitement qui doivent être utilisées pour étudier le problème d'aide à la décision tel qu'il a été formulé. Je montrerai ensuite (section 5) que les réponses qu'il est classique d'apporter en termes de « solutions robustes » le sont dans une conception beaucoup trop restreinte de ce concept. J'esquisserai un certain nombre de voies de recherche qui pourraient être davantage explorées non seulement pour concevoir autrement des solutions pouvant être qualifiées de robustes mais aussi pour mieux interagir avec le décideur afin de bien lui faire prendre conscience de ce que ce qualificatif « robuste » peut avoir de subjectif. Enfin, la quatrième proposition porte sur des formes de réponses qui consistent à énoncer des « conclusions robustes » (lesquelles ne font pas nécessairement référence à des solutions qualifiées de robustes). Après avoir défini ce que j'entends par conclusions robustes et donné des exemples, j'évoquerai les rares approches qui ont été proposées pour obtenir de telles conclusions.

**Abstract**

After reviewing what the adjective “robust” means in decision aiding (DA) and explaining why it is important to be concerned about robustness in DA, I present a twofold observation (section 2) which leads me to make four proposals in order to better respond to robustness concern in decision aiding. With the first two proposal (sections 3 and 4), I show that, in many cases, the vague approximations and the zones of ignorance against which robustness helps to prevent, must be considered in terms of substituting the concept of version for the usual concept of scenario and focusing on the diverse processing procedures that must be used to study the decision aiding problem as it was formulated. Next, I show (section 5) that the traditional responses formulated in terms of “robust solutions” limit the meaning of this concept (section 5). I briefly describe a certain number of avenues for research that could be explored further, not only in order to conceive the solutions that could be qualified as robust in another way, but also to better interact with decision makers to make them aware that the adjective “robust” can be subjective. Finally, the fourth proposal is related to forms of responses which lead to state “robust conclusions”, which do not necessarily refer to solutions characterized as robust. After defining what I mean by robust conclusions and giving some examples, I mention the rare approaches that have been proposed for obtaining such conclusions.

## 1. La préoccupation de robustesse en aide à la décision

La robustesse en aide à la décision (AD) est un sujet qui, depuis plusieurs années, donne lieu à de nombreuses publications (cf. Aïssi, Roy, 2008, 2009 ; Billaut *et al.*, 2005, 2008 ; Roy, 2007). Après avoir rappelé ce que recouvre le qualificatif « robuste » en aide à la décision et expliqué pourquoi on se préoccupe de robustesse en aide à la décision, je présenterai (section 2) un double constat. Celui-ci me conduira à faire quatre propositions ayant pour objet de chercher à mieux répondre à la préoccupation de robustesse.

Pour proposer des solutions, faire des recommandations à un décideur, l'analyste prend appui sur des modèles. La présence inévitable d'à peu près, de zones d'ignorances sur lesquels je reviendrai un peu plus loin affecte son travail de modélisation. Il doit s'efforcer de prendre en compte ces à peu près, ces zones d'ignorances de façon à ce que les solutions, les recommandations auxquelles la modélisation le conduit ne risquent pas, après mises à exécution, d'aboutir à des résultats beaucoup plus mauvais que ceux escomptés. Se préoccuper de robustesse, c'est veiller à ce qu'il en soit ainsi tout au long de l'activité d'aide à la décision (cf. Dias, 2007).

J'ai proposé de dire (cf. Roy, 2007, 2008) que, par définition, se préoccuper de robustesse en AD, c'est chercher à être apte à **résister à des « à peu près » et à des « zones d'ignorances » afin de se protéger d'impacts jugés regrettables** tel que objectifs effectivement atteints très inférieurs à ceux escomptés ou encore dégradation de propriétés qui devaient être préservées.

Vis-à-vis des décisions qui sont en question, la présence d'à peu près et de zones d'ignorances intervient à deux niveaux dans le processus d'aide à la décision.

1°) Le modèle sur lequel l'aide prend appui ne peut pas être en parfaite conformité avec le contexte dans lequel les décisions seront mises à exécution.

2°) Le système de valeurs utilisé pour concevoir et traiter le modèle ne sera généralement pas en parfait accord avec celui qui servira à juger ces décisions.

Ce sont là deux états de fait. Ils sont à l'origine d'un écart inévitable qui existe entre ce que j'ai appelé la représentation formelle et la réalité vécue (cf. Roy, 2007, 2009). Je désigne par :

- *représentation formelle (RF)* : le modèle et les procédures de traitement qui lui sont appliquées pour mettre en évidence les résultats sur lesquels l'aide à la décision prend appui ;
- *réalité vécue (RV)* : le contexte (certains diront l'état de la nature<sup>1</sup>) dans le cadre duquel les décisions prises seront mises à exécution et jugées.

Admettre que RF est parfaitement conforme à RV peut amener l'analyste à énoncer des recommandations susceptibles d'avoir des impacts tout à fait regrettables. Je ne citerai ici qu'un exemple emprunté à la programmation linéaire. Croire que cette conformité, sans être parfaite, peut être jugée excellente justifierait que l'analyste recommande au décideur de se conformer à la solution optimale. Dans ce type de modèle, c'est un sommet du polyèdre qui caractérise cette solution optimale. Un sommet correspond à un point frontière qui sépare ce

---

<sup>1</sup> « Etat de la nature » pourrait être utilisé à la place de « réalité vécue » mais, parce que cette dernière expression renvoie explicitement à « réalité vécue », elle est à mon avis plus appropriée à l'aide à la décision que la première qui fait référence à la nature.

qui a été jugé acceptable et inacceptable pour chacune des contraintes qui déterminent le sommet. Il suffit que l'une de ces contraintes frontières ait été mal appréhendée pour que la solution recommandée puisse être très différente de la solution réellement optimale ou bien encore être irréalisable. Le critère d'optimisation est bien souvent défini comme synthèse de critères élémentaires partiels. Si la façon dont ces derniers ont été pris en compte dans RF ne correspond pas à la façon dont ils le seront dans RV, la solution recommandée pourra s'avérer beaucoup moins bonne que ce qui avait été espéré.

Dans un contexte décisionnel donné l'analyste doit par conséquent chercher à identifier les à peu près et zones d'ignorances qui, parce qu'ils sont à l'origine d'un manque de conformité entre RF et RV, pourraient le conduire, s'il les ignorait, à proposer des solutions et/ou à formuler des recommandations qui ne protégeraient pas le décideur des impacts qu'il juge regrettables.

Ces brèves<sup>2</sup> considérations suffisent pour faire comprendre que l'analyste qui se préoccupe de robustesse doit formuler et traiter le problème de façon à répondre convenablement aux deux nécessités suivantes :

*Première nécessité* : Inventorier avec soin et convenablement prendre en compte dans RF ce que j'ai proposé d'appeler des **points de fragilité** (cf. Roy, 2008).

Par définition, les points de fragilité sont les endroits où se nichent, dans RF, les à peu près et les zones d'ignorances. J'en donnerai divers exemples plus loin. Pour l'instant, j'attire seulement l'attention sur le fait que ces points de fragilité ne se nichent pas que dans le modèle. Ils peuvent aussi affecter les procédures de traitement.

*Deuxième nécessité* : Elaborer des formes de réponse aptes à aider le décideur à se protéger des impacts regrettables qui peuvent résulter de la présence de ces à peu près et zones d'ignorances.

Ces formes de réponse doivent prendre en compte ce que le décideur attend de cette protection : y a-t-il des niveaux d'impact qu'il est prêt à tolérer dans certaines circonstances et d'autres qu'il juge inacceptables vis-à-vis desquels il veut être protégé quoi qu'il arrive et quoi qu'il puisse lui en coûter par ailleurs ? Selon ce que sera la réalité vécue, la solution adoptée par le décideur pourra, du fait de la présence des à peu près et des zones d'ignorances dans RF, concilier plus ou moins bien son désir de protection et son souhait d'optimiser le ou les critères de performance servant à évaluer cette solution. Les formes de réponse élaborées ne seront véritablement utiles au décideur que si elles l'informent suffisamment pour qu'il soit apte, compte tenu de sa propre subjectivité, à décider face à ces deux risques antagonistes : être mal protégé vis-à-vis de l'occurrence de très mauvaises performances traduisant les impacts regrettables, être dans une position qui le conduit à renoncer à l'espoir de bonnes, voire très bonnes, performances.

Ces deux nécessités sont à l'origine du double constat présenté ci-après.

---

<sup>2</sup> Pour plus de détails, voir références suscitées ainsi que Roy (1997, 1998).

## 2. Un double constat

Au travers de la littérature (cf. les références jointes et surtout les bibliographies qu'elles comportent), j'ai constaté que la façon dont ces deux nécessités sont le plus souvent perçues par beaucoup de chercheurs s'intéressant à la préoccupation de robustesse les conduisent à concentrer leurs recherches dans ce que j'appellerai deux « ornières privilégiées ». En parlant d'ornière, je ne cherche pas à minimiser l'intérêt des recherches ainsi conduites. Je souhaite seulement attirer l'attention sur le point suivant : si, comme cela a été le cas jusqu'à maintenant, les chercheurs, dans leur grande majorité, poursuivent leurs travaux exclusivement dans le chemin ainsi tracé, d'autres voies, très fécondes sur le plan théorique et tout à fait pertinentes pour les praticiens, risquent d'être laissées de côté.

*Premier constat (première ornière) :* Les points de fragilité généralement pris en compte concernent exclusivement des **données** dont l'objet est de faire intervenir, dans RF, un aspect de RV qualifié d'**incertain**. Cette conception conduit à concevoir un ensemble de **scénarios** qui sont censés décrire toutes les réalités susceptibles d'être vécues que la préoccupation de robustesse nécessite de prendre en compte.

Bien que pertinente pour répondre à la première des deux nécessités présentées ci-dessus, cette conception peut s'avérer, dans certains cas, insuffisante pour mettre en évidence tous les points de fragilité. Je montrerai en effet, dans les deux sections qui suivent, qu'elle peut conduire à laisser de côté des à peu près et des zones d'ignorances qui mériteraient d'être pris en considération.

*Deuxième constat (deuxième ornière) :* La plupart des chercheurs ne s'intéressent qu'à une forme de réponse particulière. Celle-ci fait jouer un rôle central au concept de **solution robuste**. Pour qualifier une solution de robuste, ils font jouer un rôle privilégié à la performance de la solution dans le ou les **pires scénarios**. Cette performance est de plus modélisée dans RF par un unique critère.

Cette forme de réponse conduit à proposer au décideur une, éventuellement plusieurs, solution(s) qui, compte tenu des à peu près et des zones d'ignorances pris en compte, optimise(nt) l'impact le plus regrettable auquel il est exposé, cet impact pouvant être apprécié soit en termes de performance absolue, soit en termes de regret vis-à-vis de la solution optimale dans le scénario qui se réalisera. Une telle solution peut fort bien ne pas correspondre à ce que le décideur entend par solution robuste. Quoi qu'il en soit, pour adopter une telle solution, il peut avoir besoin d'informations supplémentaires relatives notamment à ce qu'il peut advenir si le scénario qui se réalise n'est pas le pire. Ces brèves considérations montrent que la seconde des deux nécessités présentées ci-dessus peut ne pas être prise en compte de façon satisfaisante par cette forme de réponse. Je montrerai, dans les sections 5 et 6, que la robustesse d'une solution peut être définie autrement et pas seulement par référence à un unique critère de performance et que, plus généralement, d'autres formes de réponse méritent d'être étudiées.

## 3. Première proposition : Dépasser le concept de scénario

Dans certains cas, le concept de scénario peut apparaître trop réducteur pour pouvoir répondre convenablement à la première nécessité (cf. section 1). On peut, pour cette raison, vouloir chercher à le dépasser. Ce caractère réducteur tient à deux raisons.

La première est d'ordre sémantique. Pour un décideur, le terme « scénario » désigne un mode de description d'une situation future (parfois présente) possible. C'est donc avec cette acception que le décideur comprendra ce dont l'analyste lui parle lorsqu'il emploiera ce terme dans le cadre de la préoccupation de robustesse. Il y a là un risque de malentendus dont l'analyste doit être conscient.

La seconde raison tient au fait que le terme « scénario » est généralement associé à la notion d'**incertitude**. L'incertitude peut conduire à croire qu'il existe quelque part une certitude. Cette croyance, implicite, peut amener à penser qu'il existe un état objectif de cette réalité qu'il faut s'efforcer d'**approcher au mieux** soit en termes qualitatifs, soit en termes quantitatifs afin de rendre RF le plus conforme possible à RV.

Il en est bien ainsi avec les aspects de la réalité dits **d'ordre 1<sup>3</sup>** qui, par définition, sont liés aux propriétés physiques, objectivement sensibles des choses. Ils peuvent, par nature, donner lieu à des vérifications expérimentales répétables. Parler d'approximation, que ce soit en termes qualitatifs ou quantitatifs, de tels aspects de la réalité a un sens. C'est par exemple le cas de la longueur d'un chemin en kilomètres, de la quantité de CO<sub>2</sub> émise par un moteur, du prix d'un bien disponible aujourd'hui sur un marché.

En aide à la décision, on est aussi confronté à des aspects de la réalité qui ne sont pas de cette nature. Ce sont ceux dits **d'ordre 2**. Par définition, il s'agit des aspects de la réalité qui font intervenir la signification, la valeur essentiellement subjective qui est attribuée au contenu de cette réalité. Ils ne peuvent donc pas donner lieu à des vérifications objectives répétables pour asseoir un accord sur la manière de les prendre en compte. Il ne me paraît pas très approprié de parler à leur sujet d'incertitude et encore moins d'approximation dans la façon de les décrire. C'est par exemple le cas lorsqu'il est question d'objectifs, de normes, de l'attitude face au risque, des préférences, du mode d'appréciation d'une situation future.

Ce n'est donc pas seulement l'incertitude qui conduit à se préoccuper de robustesse. C'est, plus généralement, la présence d'à peu près et de zones d'ignorances. Les uns et les autres peuvent ne pas découler de la présence d'incertitudes comme le montrent les exemples suivants.

*A peu près découlant d'une part d'arbitraire dans la modélisation* : Elle peut provenir de la présence d'une forme de simplification qui peut être envisagée de deux ou trois façons différentes, de la prise en considération de deux ou trois distributions de probabilités pour représenter un phénomène aléatoire (le choix de ces distributions étant fortement conditionné par la facilité des calculs).

*A peu près découlant de la façon de coder des informations de nature qualitative* : La prise en compte de telles informations (notamment pour modéliser les préférences) peut laisser place à plusieurs interprétations possibles : plusieurs techniques (notamment de normalisation) peuvent être envisagées pour pouvoir traiter, de façon quantitative, des données qui, sous la forme où elles ont été recueillies, ne le sont pas véritablement.

*Zones d'ignorances découlant de la mauvaise connaissance d'un phénomène complexe* : Cette connaissance insuffisante peut conduire à introduire différentes variantes pour décrire le phénomène.

---

<sup>3</sup> J'emprunte ici à Watzlawick (1976).

*Zones d'ignorances découlant du caractère subjectif de certaines contraintes* : La frontière entre le possible et l'impossible ou encore l'acceptable et l'inacceptable peut rester très mal définie et donner lieu à un ensemble d'options : cet ensemble peut être défini soit par l'ensemble de toutes les valeurs réelles que peut prendre un paramètre dans un intervalle donné, soit en énumérant une liste de valeurs possibles dans un tel intervalle.

*Zones d'ignorances découlant de la nécessité de différencier le rôle que doivent jouer les critères dans un modèle d'agrégation multicritère* : cette différenciation s'opère le plus souvent en faisant intervenir des paramètres que l'on appelle selon le cas coefficients d'importance, constantes d'échelles, taux de substitution, poids,... Ces paramètres n'ont, le plus souvent, aucune existence réelle dans la tête du décideur. Celui-ci peut même n'avoir qu'une compréhension très superficielle sur ce que ces paramètres impliquent dans le fonctionnement du modèle. Compte tenu des informations disponibles, de la logique d'agrégation présente dans le modèle et des buts poursuivis, plusieurs jeux de valeurs (caractérisés de façon non nécessairement discrète) peuvent être jugés convenables pour attribuer une valeur à ces paramètres.

Ces exemples, choisis parmi beaucoup d'autres, montrent que la notion d'incertitude couvre, de façon très imparfaite, tous les à peu près et zones d'ignorances qui peuvent être à l'origine de points de fragilité. Penser incertitude pour les inventorier peut par conséquent conduire à laisser de côté certains d'entre eux que la préoccupation de robustesse devrait prendre en compte

Il importe de ne pas sous-estimer l'impact du vocabulaire. Les mots jouent souvent un rôle déterminant aussi bien dans l'impulsion qu'ils donnent en recherche que dans la façon de conduire les applications. Afin de réduire le risque de malentendus avec le décideur et surtout pour éviter les restrictions souvent inconscientes que le vocabulaire fait subir aux façons de penser, j'ai proposé, en 2002 à la 56<sup>e</sup> réunion du groupe de travail européen « Aide Multicritère à la Décision » (cf. Roy, 2004) de substituer, au terme « scénario », celui, plus général, de **version**. Le mot « version » ne focalise pas l'attention sur la notion d'incertitude. Il est en outre plus clairement associé que « scénario » à la façon de formuler le problème d'aide à la décision (FPAD). Une version (de la FPAD) est caractérisée par la sélection d'une option précise pour chacun des points de fragilité identifiés, cette option étant un des éléments de l'ensemble (fini ou infini) des options possibles associées aux points de fragilité considérés. Comme le montrent les exemples ci-dessus, l'objet de cette option diffère selon la nature de l'à peu près ou de la zone d'ignorance qui est à l'origine du point de fragilité considéré. Cette option peut, par exemple, consister à fixer la valeur numérique attribuée à un paramètre, la forme analytique retenue pour une distribution de probabilités ou une fonction d'utilité, la technique de codage sélectionnée, la variante de modélisation adoptée pour décrire un phénomène complexe, le mode de description d'une évolution tendancielle,...

Dans un contexte décisionnel donné, l'analyste doit définir un ensemble  $\hat{V}$  de versions du FPAD susceptible de convenir pour répondre à la préoccupation de robustesse. Il doit pour cela procéder à un inventaire soigneux des points de fragilité liés tout autant à la façon dont le problème d'aide à la décision a été formulé qu'à la façon dont il a été modélisé. Comment procéder à cet inventaire et comment arrêter une définition de  $\hat{V}$  qui puisse effectivement être prise en compte sans pour autant être trop pauvre pour bien répondre à la préoccupation de robustesse sont des questions qui dépassent l'objet de cet article. Le lecteur pourra trouver, dans Roy (2005, 2007, 2008), quelques pistes qui peuvent être envisagées pour aborder cette

question. Leur niveau de difficulté est sensiblement le même que l'on parle de version ou de scénario.

#### 4. Deuxième proposition : Prendre explicitement en compte la façon dont les différentes versions sont traitées

Que se soit pour trouver des solutions qualifiées de robustes ou bien pour élaborer d'autres formes de réponses en relation avec la préoccupation de robustesse, il est nécessaire d'appliquer au moins une procédure de traitement à chacune des versions de  $\hat{V}$ . On peut aussi en appliquer plusieurs qui relèvent ou non d'une même méthode. Avant d'expliquer en quoi consiste ma seconde proposition, il est nécessaire que j'indique brièvement dans quel sens j'emploie ici les termes « procédures » et « méthodes » (pour plus de précisions, voir Roy, 2005, 2008).

Par **procédure** de traitement  $P$ , je désigne un ensemble de consignes d'exécution d'un mode de traitement qui, appliqué à une version  $V$  de la FPAD, produit un **résultat** parfaitement bien défini noté  $R(P,V)$ . Selon le cas, ce résultat prend des formes variées. Ce peut être une solution (par exemple optimale) ou un paquet de solutions (solutions efficaces). Ca peut être aussi un constat : « il n'existe pas de solution admissible », « selon le critère  $g$ , l'écart à l'optimum de la solution  $x$  est borné par telle valeur », « l'action  $a$  est surclassée par toutes les autres, à l'exception de suivantes, ... ».

Par **méthode**  $M$ , je désigne une famille de procédures similaires, c'est-à-dire satisfaisant aux deux exigences suivantes :

- les procédures de la famille ont des traits communs (structures, corps de concepts, bases axiomatiques, types de démarches,...) qui justifient qu'on les regarde comme appartenant à une même classe ;
- les procédures de la famille ne se différencient que par les options prises relativement à certains points de fragilité de la méthode (niveaux de concordance ou seuils de coupe dans les méthodes ELECTRE, seuils servant à rendre strictes certaines inégalités en programmation mathématique, paramètres multiples intervenant dans une méthode métaheuristique, subjectivité des individus dans une démarche qui, à certaines étapes, fait appel à des experts,...).

Vouloir appliquer une seule et même procédure de traitement  $P$  à chacune des versions de  $\hat{V}$  peut, dans bon nombre de cas, s'avérer insuffisant pour appréhender convenablement les relations entre RF et RV. C'est le cas si des procédures bien distinctes méritent d'être prises en compte. Même si une seule procédure  $P$  semble pouvoir être privilégiée, il est bien rare qu'elle ne présente pas des points de fragilité. Il peut s'agir de la valeur à attribuer à un paramètre purement technique ou renvoyant à une réalité d'ordre 2, de la part d'arbitraire qui intervient dans la façon d'opérer certains arbitrages, notamment entre des solutions très voisines, de la manière dont certaines synthèses sont opérées, notamment pour prendre en compte, dans le cas d'optimum « plat », les solutions voisines de cet optimum.

Quelle que soit la procédure  $P$  envisagée, il est nécessaire d'inventorier les points de fragilité qu'elle comporte et de chercher à déceler ceux qui, selon l'option retenue à leur sujet, peuvent affecter significativement le résultat  $R(P,V)$ . Pour ces points de fragilité, différentes options doivent être retenues. Ceci conduit à multiplier les procédures. Ici encore, il importe de le faire à bon escient afin de ne pas être conduit à proposer de retenir un nombre trop élevé de

procédures qui conduirait ensuite à des temps de traitement excessifs pour répondre à la préoccupation de robustesse.

Dans ce qui suit,  $\hat{P}$  désigne l'ensemble des procédures retenues. Elles peuvent ou non relever d'une même méthode. Chacune d'elle peut devoir être appliquée à chacune des versions de  $\hat{V}$ . Il se peut aussi que certaines d'entre elles s'avèrent non appropriées pour traiter quelques versions particulières de  $\hat{V}$ . Ceci conduit en général à définir l'ensemble  $S$  des couples (procédure  $P$ , version  $V$ ) jugés compatibles :  $S \subseteq \hat{P} \times \hat{V}$ .

Ce qui précède montre qu'il peut, dans bien des cas, être insuffisant, pour bien répondre à la préoccupation de robustesse, de prendre appui seulement sur un ensemble de versions et, *a fortiori*, un ensemble de scénarios. La conception élargie que je propose nécessite de commencer par définir les trois ensembles  $\hat{V}$ ,  $\hat{P}$  et  $S$ . Elle conduit à asseoir les réponses à la préoccupation de robustesse sur l'ensemble des résultats  $R(P, V), \forall (P, V) \in S$ . Toutefois, dans certains cas, on pourrait être amené à se limiter à un sous-ensemble  $\hat{S} \subset S$ .

Avant d'examiner différentes formes de réponse possibles à la préoccupation de robustesse (cf. sections 5 et 6), une précision s'impose.

Il est des points de fragilité à propos desquels on peut se demander s'ils relèvent de la façon dont le problème a été modélisé ou de certaines des caractéristiques des procédures de traitement envisagées. C'est par exemple le cas des paramètres qui servent à définir le rôle que doivent jouer différents critères dans la modélisation des préférences. La façon dont on répond à cette question modifie la définition des ensembles  $\hat{P}$  et  $\hat{V}$ . Cette modification laisse invariant l'ensemble des résultats  $R(P, V)$  à prendre en considération. Cela tient au fait que la façon de répondre à la question posée ne change pas la définition de  $S$ . Tout élément  $s \in S$  est défini par une option retenue pour chacun des points de fragilité, que ce point de fragilité soit imputé aux procédures ou aux versions. Pour parler de cette séquence d'options qui définit un élément  $s \in S$ , je parlerai ici de **jeu de valeurs**.

### **5. Proposition 3 : Chercher « d'autres » définitions pour « solutions robustes »**

Dans cette section, je ne m'intéresse qu'aux formes de réponses qui consistent à proposer au décideur une ou plusieurs solutions qualifiées de robustes. Dans ces conditions, sortir de la deuxième ornière (cf. section 2) consiste à proposer des définitions pour solutions robustes qui, d'une façon ou d'une autre, sortent du schéma dans lequel se place la majorité actuelle des chercheurs pour qualifier des solutions de robustes. Ce schéma me paraît être caractérisé par les trois traits suivants.

*Trait caractéristique n° 1* : Dans le modèle de RF, la préférence est modélisée par un unique critère de performance (gain, coût,...) ; la préoccupation de robustesse n'est d'aucune façon prise en compte dans cet unique critère.

*Trait caractéristique n° 2* : Une unique mesure de robustesse est définie pour donner sens à l'assertion « la solution  $x$  est au moins aussi robuste que la solution  $y$  ». Cette mesure est le seul critère utilisé pour définir les solutions robustes.

*Trait caractéristique n° 3* : L'unique mesure de robustesse fait jouer un rôle prépondérant à la performance de la solution dans le ou les pires cas (pires scénarios ou pires couples  $(P, V)$  de  $S$ ).

L'ouvrage fondamental et novateur de Kouvelis et Yu (1997) a vraisemblablement contribué à ce que les recherches soient principalement poursuivies dans le cadre de ce schéma. Une solution robuste est une solution  $x$  qui, par définition, optimise l'unique mesure de robustesse  $r(x)$ , celle-ci étant l'une des trois auxquelles Kouvelis et Yu se sont tout particulièrement intéressés. J'en rappelle ci-après les définitions.

Ces mesures font intervenir le critère  $v$  d'optimisation du modèle de RF considéré (trait caractéristique n° 1). Celui-ci attribue à  $x$  une valeur  $v_s(x)$  dans le scénario  $s$ . On suppose ici que « optimum » signifie « maximum ».

*Robustesse absolue*. La mesure de robustesse (qu'il s'agit ici de maximiser) est définie par la valeur que prend la solution dans le pire scénario :  $r(x) = \min_s v_s(x)$ .

*Déviaton absolue*. La mesure de robustesse (qu'il s'agit ici de minimiser) est définie par la valeur que prend, dans le pire scénario, le regret absolu qu'occasionne le fait que la solution diffère de celle qui serait optimale dans ce scénario :  $r(x) = \max_s [v_s^* - v_s(x)]$  ( $v_s^*$  : valeur que prend la solution optimale dans le scénario  $s$ ).

*Déviaton relative*. La mesure de robustesse (qu'il s'agit ici de minimiser) est définie par la valeur que prend, dans le pire scénario, le regret relatif qu'occasionne le fait que la solution diffère de celle qui serait optimale dans ce scénario :  $r(x) = \max_s \frac{v_s^* - v_s(x)}{v_s^*}$ .

Lorsque, dans ce qui suit, j'aurai besoin de renvoyer à ces mesures, je le ferai en parlant « des trois mesures de Kouvelis et Yu ». Je rappelle que ces mesures correspondent aux critères classiques de Wald et Savage en décision dans l'incertain.

Sans prétendre être exhaustif, je vais ci-après évoquer quelques pistes qui ont commencé à être explorées mais qui mériteraient de l'être davantage. Toutes visent à s'affranchir, peu ou prou, du schéma dont je viens de rappeler les trois traits caractéristiques. Cela devrait conduire à disposer de nouvelles définitions de « solutions robustes » qui, parce qu'elles sortent de la deuxième ornière (cf. fin de section 2), permettraient, au moins dans certains cas, de mieux répondre à la préoccupation de robustesse. Pour cela, ces nouvelles définitions doivent être recherchées dans un double but :

- prendre en compte d'autres conceptions de la robustesse que celles qui peuvent l'être dans le cadre du schéma rappelé ci-dessus ;
- être apte à organiser une discussion avec le décideur pour l'aider à raisonner les arbitrages subjectifs qui s'attachent à la notion de robustesse.

### *5.1 S'affranchir du troisième trait caractéristique sans pour autant s'affranchir des deux premiers*

Trois pistes au moins me semblent mériter d'être davantage explorées.

a) *Faire intervenir le voisinage du pire cas*

L'une des trois mesures de robustesse de Kouvelis et Yu étant choisie, on peut regarder comme étant robustes non seulement les solutions qui optimisent cette mesure mais aussi toutes celles qui se situent dans un certain voisinage de l'optimum. Ce voisinage peut être défini de différentes façons. Voici quelques exemples.

Supposons que la mesure  $r(x)$  choisie soit la robustesse absolue de Kouvelis et Yu. On peut proposer de qualifier de robuste toute solution  $x$  qui vérifie  $r(x) \geq w$ ,  $w$  étant une valeur définie *a priori* par le décideur. Lorsque le critère  $v$  représente un gain, cette valeur  $w$  s'interprète comme un gain minimum que le décideur veut garantir. Le voisinage de l'optimum ainsi pris en compte ne permet de mettre en évidence des solutions robustes que si  $w \leq w^* = \max_{x \in X} r(x)$ .

Parmi d'autres, Aubry (à paraître), Rossi (2003) se sont intéressés à cette façon de qualifier une solution de robuste. Il est clair que plus la différence  $w^* - w$  est grande et plus le nombre des solutions ainsi qualifiées de robustes est grand. On peut chercher à restreindre la définition du voisinage qui permet de qualifier une solution de robuste en ne conservant que celle qui maximise le nombre ou la proportion des scénarios qui permettent d'atteindre un objectif  $b$ . Celui-ci peut être défini soit en termes de gain absolu, soit en termes de regret absolu, soit encore en termes de regret relatif (toujours au sens des trois critères de Kouvelis et Yu). C'est précisément cette façon de faire qui m'a conduit à définir respectivement les trois mesures  $(b, w)$ -robustesse absolue,  $(b, w)$ -déviations absolue,  $(b, w)$ -déviations relative (cf. Roy, 2007, 2009). Dans ces articles, j'ai notamment mis en évidence le rôle que l'analyste pouvait faire jouer aux paramètres  $b$  et  $w$  pour aider le décideur à préciser le sens qu'il veut donner à solutions robustes. Le choix des valeurs qu'il attribue à ces paramètres opère un arbitrage entre gain garanti et espoir d'atteindre un but.

On peut aussi proposer de qualifier de robustes les solutions qui vérifient :

$$r(x) \geq \left(1 - \frac{p}{100}\right) \max_{x \in X} r(x),$$

$r(x)$  désignant ici encore la robustesse absolue et  $p$  un pourcentage d'écart ou pire cas que le décideur fixe *a priori*. C'est la  $p$ -robustesse (cf. Aissi *et al.*, 2009 ; Snyder, 2006). En procédant ainsi, quel que soit le pourcentage  $p$ , l'ensemble des solutions qualifiées de robustes n'est pas vide. Diverses variantes ont été proposées en vue de restreindre l'ensemble des solutions ainsi qualifiées de robustes.

Il est possible de proposer des définitions similaires de solutions robustes en adoptant, pour  $r(x)$ , le regret absolu ou le regret relatif de Kouvelis et Yu. Il n'est toutefois pas certain qu'elles soient aisément interprétables par le décideur.

b) *Concevoir une mesure de robustesse qui, tout en faisant jouer un rôle au pire cas, en affaiblisse la portée*

Exception faite de travaux limités à des cas concrets très spécifiques, une seule proposition me semble avoir été faite en suivant cette piste. Il s'agit de l'approche de robustesse appelée

«  $\alpha$ -robustesse lexicographique » (cf. Aloulou *et al.* 2005 ;Kalaï, 2006 ; Kalaï et Lamboray, 2007). Elle prend appui sur l'une quelconque des trois mesures de robustesse de Kouvelis et Yu et suppose qu'un ensemble  $S$  fini de scénarios a été défini. Elle prend en compte tous les gains ou regrets de façon lexicographique, depuis le pire cas jusqu'au meilleur. Ce rangement lexicographique fait intervenir un point de référence et un seuil d'indifférence  $\alpha$  qui, selon les auteurs, est sensé traduire « la dimension subjective de la robustesse ». L'ensemble  $A(\alpha)$  des solutions ainsi qualifiées de robustes est tel que  $\alpha' > \alpha \Rightarrow A(\alpha) \subseteq A(\alpha')$ . Avec des valeurs trop faibles de  $\alpha$ , on peut avoir  $A(\alpha)=\emptyset$ . Les conditions qui font qu'une solution  $x$  appartient ou n'appartient pas à  $A(\alpha)$  sont fort complexes. Il ne me paraît donc pas très facile de faire comprendre à un décideur le sens général que recouvre le qualificatif «  $\alpha$ -robuste lexicographique ». Toutefois, comme le soulignent les auteurs, cette approche peut être vue aussi comme source d'élaboration de conclusions robustes (cf. section 6).

*c) Restreindre les combinaisons d'options aptes à définir un pire cas*

Explorer cette piste consiste à chercher à tirer parti des jugements empiriques suivants. Afin de prendre en compte un ensemble  $S$  défini autrement que comme un produit cartésien des ensembles d'options associés à chacun des points de fragilité. Supposons que, pour certains points de fragilité regardés comme « critiques », on sache identifier celles des options qui devraient le plus fortement contribuer à dégrader la performance  $v(x)$  d'une solution  $x$  (ce sont en général les options « extrêmes »). Un scénario ou, plus généralement, un jeu de valeurs au sens donné à ce terme en fin de section 4 qui combine un très grand nombre ou une très forte proportion de telles options renvoie à une réalité vécue qui peut être jugée très irréaliste. Dans ces conditions, il peut paraître justifié soit d'éliminer totalement de  $S$  ces scénarios ou jeux de valeurs peu significants pour définir la robustesse  $r(x)$  d'une solution, soit de leur faire jouer un rôle à part qui affaiblisse leur impact.

Pour caractériser de tels éléments  $s(S)$  jugés peu significants, on peut procéder de différentes façons. On peut par exemple associer, à chacun des points de fragilité jugés critiques, une option dite « de référence » (option occupant une position centrale ou apparaissant comme la plus vraisemblable). On pourra alors regarder comme peu significants les éléments  $s(S)$  dans lesquels le nombre ou la proportion des options qui diffèrent de l'option de référence pour les points de fragilité critiques dépasse une certaine borne fixée. S'il est possible de définir pour chaque point de fragilité critique une mesure de l'écart entre une option quelconque et l'option de référence et si l'agrégation de telle mesure a un sens, on peut l'utiliser pour définir le plus ou moins grand manque de signifiante d'un élément  $s$  peu signifiant.

Les travaux de Bertsimas et Sim (2003, 2004) relatifs à des modèles de RF relevant de la programmation linéaire empruntent cette piste. Il en est de même de ceux de Ben-Tal et Nemirovski (1999), Chinneck et Ramadan (2000), Gabrel et Murat (à paraître), Minoux (2007).

Ces trois pistes ne sont sans doute pas les seules. D'autres ont d'ailleurs commencé à être explorées. Sans prétendre être exhaustif, les travaux de Lamboray (2007), Liesiö *et al.* (2008), Perny *et al.* (à paraître), Salazar et Rocco (2007), Spanjaard (2003) ont sans doute aussi leur place dans cette sous-section. Il en est de même avec la proposition faite dans Aissi et Roy (2008, 2009, sous-section 3.4) qui conduit à négliger, ou presque, le rôle joué par le pire cas : elle consiste à ne prendre en compte que la position qu'occupe la solution  $x$  dans chacun des rangements définis par la performance décroissante de  $v_s(x)$ ,  $\forall s \in S$ . Les valeurs attribuées à

deux paramètres fixant deux types de position limite doivent aider le décideur à arbitrer entre performance espérée et risque couru.

### 5.2 *S'affranchir des deux derniers traits caractéristiques sans pour autant s'affranchir du premier*

Ici encore, on se place dans le cas où la préférence est modélisée (dans le modèle de RF) par un unique critère de performance qui ne prend pas en compte la préoccupation de robustesse. Dans ces conditions, on peut chercher, pour qualifier une solution de robuste, à faire intervenir plusieurs critères. Pour cela, deux voies peuvent être envisagées.

#### *a) Ne prendre en compte qu'une seule mesure de robustesse*

A côté du critère défini par l'unique mesure de robustesse, on peut en effet faire intervenir un ou plusieurs autres critères pour préciser les conditions dans lesquelles une solution mérite d'être qualifiée de robuste. Le rôle de ce (ou de ces) critère(s) complémentaire(s) (non fondé(s) sur une mesure de robustesse) est d'apporter des informations additionnelles (principalement en termes de performances) de nature à aide à le décideur à préciser ce que « robuste » signifie pour lui.

Un critère complémentaire  $w(x)$  peut par exemple être défini selon l'une des deux façons suivantes :

- $w(x)$  est la médiane des performances  $v_s(x), \forall s \in S$  (si  $S$  est probabilisé, on peut remplacer la médiane par l'espérance mathématique) ;
- $w(x) = v_{s_0}(x)$ ,  $s_0$  étant un scénario ou jeu de valeurs de référence défini en retenant, pour chaque point de fragilité, l'option que le décideur juge la plus vraisemblable.

Une mesure  $r(x)$  (non nécessairement l'une de celles de Kouvelis et Yu) étant choisie, notons  $\Omega$  l'ensemble des solutions qui vérifient :

$$\begin{aligned} r(x) &\geq \left(1 - \frac{p}{100}\right) \max_{x \in X} r(x) \text{ si } r(x) \text{ est à maximiser,} \\ r(x) &\leq \left(1 + \frac{p}{100}\right) \min_{x \in X} r(x) \text{ si } r(x) \text{ est à minimiser,} \end{aligned}$$

$p$  étant un pourcentage introduit pour délimiter le voisinage  $\Omega$  de l'optimum en dehors duquel les solutions ne peuvent être regardées comme robustes. Ceci conduit à associer, à toute solution  $x \in \Omega$ , sa mesure de robustesse  $r(x)$  et la valeur correspondante de l'indicateur de performance  $w(x)$ . Posons :

$$w_\rho = \min_{x \in \Omega, r(x) = \rho} w(x).$$

Montrer au décideur la courbe (frontière efficace) représentant la façon dont l'indicateur de performance  $w_\rho$  varie en fonction de la mesure de robustesse  $\rho$  peut être d'une grande utilité pour lui. Cette courbe peut l'aider à sélectionner les solutions qui réalisent à ses yeux un arbitrage convenable entre risque accepté et performance attendue.

Voici quelques publications qui relèvent de ce type d'approche : Chen *et al.* (1996), Ehrgott et Ryan (2002), Kennington *et al.* (2001), Salazar et Rocco (2007) (le lecteur trouvera une brève analyse de ces publications dans Aïssi et Roy, 2008, 2009, section 3.2). Il trouvera également dans cet article, en fin de section 5.2, une proposition ayant trait aux modèles de programmation linéaire dans lesquels seuls les coefficients de la matrice des contraintes sont mal connus (l'ensemble  $S$  permettant de modéliser cette mauvaise connaissance étant supposé fini). Il est supposé en outre que le décideur puisse tolérer que la solution robuste ne vérifie pas toutes les contraintes à condition que cela n'ait lieu que pour un petit nombre d'éléments  $s(S)$  et conduise à une solution de coût jugée faible. Cela suppose d'admettre qu'une solution mathématiquement non réalisable puisse être préférée à une solution beaucoup plus coûteuse qui satisfait exactement à toutes les contraintes. La proposition fait intervenir, à côté du critère de coût, une mesure de robustesse (trois mesures possibles sont proposées). Cette approche consiste par conséquent à aider le décideur à rechercher un compromis entre d'une part la performance de la solution (ici son coût) et, d'autre part, les écarts traduisant l'imparfaite satisfaction des contraintes.

*b) Prendre en compte plusieurs mesures de robustesse*

Soit  $R = \{r_1, \dots, r_k\}$  un ensemble de  $k$  mesures jugées pertinentes pour appréhender la robustesse. La robustesse peut en effet être appréhendée selon divers points de vue. Les impacts regrettables vis-à-vis desquels le décideur souhaite se protéger peuvent être de nature variée : objectifs non atteints, propriétés non préservées. Une mesure de robustesse peut être associée à chacun de ces objectifs et/ou à chacune de ces propriétés. Pour qualifier une solution de robuste, on peut alors chercher, dans une optique multicritère, à prendre appui sur ces  $k$  mesures. Celles-ci devraient, autant que faire se peut, être non corrélées. Il s'agit donc d'essayer de généraliser, avec  $k$  mesures de robustesse, ce qui a pu être fait en n'en faisant intervenir qu'une seule. Deux possibilités peuvent être envisagées. La première consiste, comme au 5.1, à ne faire intervenir, pour qualifier une solution de robuste, que la façon dont la robustesse est mesurée. La seconde consiste, comme au 5.2 a), à faire intervenir, à côté des  $k$  critères définis par l'ensemble  $R$ , un ou plusieurs autres critères complémentaires apportant des informations additionnelles destinées à préciser ce que « robuste » signifie pour le décideur.

L'intéressante tentative entreprise par Hites *et al.* (2006) entre dans le cadre de la première de ces deux possibilités. L'ensemble  $S$  des scénarios ou jeux de valeurs étant supposé fini, les auteurs considèrent que, pour chaque  $s \in S$ ,  $v_s(x)$  apporte une information pertinente pour juger de la plus ou grande robustesse de la solution  $x$ . Cela les conduit à poser  $R = \{v_s(x) / s \in S\}$ . Ils mettent en évidence les limites des outils classiques d'aide multicritère à la décision pour définir, à partir de  $R$ , les solutions qui méritent d'être qualifiées de robustes. Ils font néanmoins remarquer qu'une solution ne peut être qualifiée de robuste que si elle est non dominée avec cet ensemble  $R$  de critères.

Je ne connais qu'un seul article qui entre dans le cadre de la seconde des deux possibilités envisagées ci-dessus. Il s'agit de Jia et Ierapetritou (2007) qui s'intéressent à la phase de conception d'un processus destiné à synthétiser des produits chimiques en faibles ou moyennes quantités. Le lecteur trouvera une description succincte de ce travail dans Aïssi et Roy (2008, 2009, section 4.3). Il trouvera également, à la fin de cette même section, une proposition de portée générale dans le cas où  $S$  est fini qui consiste à faire intervenir deux

mesures de robustesse complétées par un indicateur de performance  $w(x)$  du type de celui introduit au 5.2 a).

### 5.3 *S'affranchir du premier des trois traits caractéristiques*

Une première façon de s'affranchir du trait n° 1 consiste à ne pas introduire, dans RF, de modèle initial de préférence en termes de performance mais à vouloir appréhender d'emblée les préférences en termes de robustesse. Cela suppose que le modèle de RF fasse intervenir une famille de plusieurs critères (le cas où il n'y en aurait qu'un seul peut, me semble-t-il, être laissé de côté), chacun de ces critères devant alors traduire un point de vue ayant trait à la robustesse. Je ne connais aucun travail relevant de cette façon de faire autre que celui auquel j'ai participé (cf. Pomerol *et al.*, 1995) qui concernait la régulation d'un trafic très dense sur un réseau ferroviaire (élaboration de grilles horaires et aménagements locaux du réseau). Le lecteur en trouvera une brève description dans Aissi et Roy (2008, 2009, section 4.2).

Une autre façon (sans doute plus naturelle) de s'affranchir du trait n° 1 conduit à s'intéresser aux cas dans lesquels le modèle de préférence de RF est constitué par une famille  $F$  de  $n$  ( $\geq 2$ ) critères. Chaque critère  $v_i$  modélise une composante de la performance multidimensionnelle d'une solution  $x$  évaluée en dehors de toute préoccupation de robustesse. Notons  $v_{is}(x)$  cette performance lorsque la réalité vécue est supposée être conforme au scénario ou jeu de valeurs  $s \in S$ . Deux cas doivent être distingués selon qu'une ou plusieurs mesures de robustesse sont utilisées pour donner sens au qualificatif « robuste ».

#### a) *Avec une unique mesure de robustesse*

Cette unique mesure de robustesse doit ici synthétiser, sur une unique dimension caractérisant la robustesse d'une solution  $x$ , la totalité des performances  $v_{is}(x)$  non seulement  $\forall s \in S$  comme au 5.1 mais aussi pour  $i=1, \dots, n$ . Je ne connais aucune publication qui propose une telle mesure de portée générale. On peut bien évidemment commencer par agréger les  $n$  critères en un seul pour se ramener aux cas étudiés au 5.1. Je me borne ci-après à esquisser une piste différente déjà présentée dans Aissi et Roy (2008, 2009, sous-section 3.3).

Dans un premier temps, on associe, à chacun des  $n$  critères, une mesure de robustesse (cf. 5.1) qui lui est spécifique. On cherche, dans un second temps, comment agréger ces  $n$  mesures. Si celles-ci sont exprimées sur une échelle commune, le min ou le max peut être pris comme définition de la mesure de synthèse. Si l'on veut différencier le rôle joué par les différentes mesures de robustesse en fonction du critère auquel elles sont associées, on peut (moyennant certaines précautions) utiliser des opérateurs tels que OWA ou l'intégrale de Choquet.

#### b) *Avec plusieurs mesures de robustesse*

L'ensemble  $R$  des mesures de robustesse à faire intervenir peut ici être conçu de deux façons. La première consiste, comme au 5.2 b), à appréhender la robustesse d'une solution selon divers points de vue. La seconde consiste à associer, à chacun des  $n$  critères (comme cela vient d'être envisagé au a) ci-dessus) une mesure de robustesse qui lui est spécifique. Pas plus qu'avec un modèle monocritère de préférence, les modèles multicritères de préférence ne semblent avoir suscité des travaux dans lesquels la robustesse d'une solution est appréhendée de façon multicritère. Les deux seuls dont nous avons eu connaissance sont ceux décrits dans

Aissi et Roy (2008, 2009, sous-section 4.4). Il s'agit de Bescharati et Azarm (2006) et Fernandez *et al.* (1999).

## 6. Quatrième proposition : Chercher à construire des « conclusions robustes »

L'énoncé de conclusions robustes constitue une forme de réponse à la préoccupation de robustesse qui généralise celles envisagées dans la précédente section. Après avoir rappelé quelques définitions, je donnerai divers exemples de conclusions robustes et j'achèverai cette section en évoquant quelques approches permettant d'obtenir ce genre de conclusions.

### 6.1 Définitions

Par **conclusion**, je désigne ici une assertion qui prend en compte les résultats  $R(P,V)$  soit pour tous les couples  $(P,V) = s \in S$ , soit pour les seuls éléments  $s \in \hat{S} \subset S$ . Ces assertions doivent avoir pour objet d'aider le décideur à cadrer, à jalonner ou encore à restreindre son champ de réflexion et d'action.

Une **conclusion robuste** est une conclusion qui comporte, dans son énoncé, un ensemble de conditions dans lesquelles sa validité a été établie. Cela signifie que la robustesse d'une conclusion est contingente d'une part au champ de validité  $\hat{S} \subset S$  auquel elle se rapporte et, d'autre part, à la façon dont les conditions de validité sont formulées. Ne s'intéresser qu'au cas  $\hat{S} = S$  conduirait à restreindre inutilement l'éventail et la portée des conclusions robustes. Il en serait de même si l'on imposait que l'ensemble  $\hat{S}$  soit rigoureusement défini et que les conditions de validité ne laissent place à aucune ambiguïté. Ces considérations m'ont conduit (cf. Roy, 1997, 1998) à distinguer trois types de conclusions robustes.

Une conclusion est qualifiée de **parfaitement robuste** lorsque sa validité est rigoureusement établie  $\forall s \in \hat{S}$ ,  $\hat{S}$  sous-ensemble de  $S$  parfaitement identifié.

Une conclusion est qualifiée de **approximativement robuste** lorsqu'elle est établie sans ambiguïté pour « presque » tout  $s \in \hat{S}$ ,  $\hat{S}$  sous-ensemble de  $S$  parfaitement identifié, « presque » signifiant que les exceptions sont relatives à des couples  $(P,V)$  non nécessairement tous parfaitement identifiés mais qui peuvent être négligés parce que peu vraisemblables ou sans grand intérêt.

Une conclusion est qualifiée de **pseudo robuste** lorsque d'une part les conditions qui en établissent la validité peuvent laisser place à certaines ambiguïtés et que, d'autre part, cette validité n'est établie que pour les éléments d'un sous-ensemble de  $\hat{S}$ , sous-ensemble non nécessairement parfaitement identifié mais jugé représentatif de  $\hat{S}$ .

Toute conclusion parfaitement robuste est, *a fortiori*, approximativement robuste et toute conclusion approximativement robuste est, *a fortiori*, pseudo robuste.

### 6.2 Exemples

L'assertion suivante constitue l'exemple le plus banal de conclusion robuste : « sur  $S$ ,  $x^*$  est l'unique solution qui optimise la mesure de robustesse  $r(x)$  ». Plus généralement,  $\Pi$  définissant un ensemble de propriétés qu'une solution  $x$  doit posséder pour pouvoir être qualifiée de robuste, l'assertion «  $x^*$  est une solution robuste car les propriétés  $\Pi$  ont été validées sans ambiguïté sur tout  $S$  » est une conclusion robuste.

Le concept de conclusion robuste serait de peu d'intérêt s'il ne s'appliquait qu'à des assertions qui consistent à affirmer la robustesse d'une solution sur tout  $S$  et dans un sens parfaitement bien défini. L'analyste peut être amené à formuler des conclusions robustes fort intéressantes pour le décideur qui ne font pas explicitement référence à une définition de solutions robustes. En outre, comme le montrent les exemples suivants, il peut, parce qu'il manque de temps ou ne dispose pas d'algorithmes rigoureux, être conduit à des assertions dont le champ de validité n'est pas nécessairement  $S$  tout entier et/ou qui tolère éventuellement des exceptions.

*a) Autres exemples de conclusions parfaitement robustes*

- i) «  $\hat{S}$  étant un sous-ensemble de  $S$  parfaitement identifié,  $\forall s \in \hat{S}$ ,  $x$  est une solution dont l'écart à l'optimum selon un critère  $g$  ne dépasse jamais  $\varepsilon$  % ».
- ii) « Les solutions suivantes ... sont admissibles pour tous les jeux de valeurs de  $S$  à l'exception des suivants ... » (le champ de validité de cette conclusion parfaitement robuste est  $S$  privé des jeux de valeurs qui font exception).
- iii) « La solution  $x$  domine la solution  $y$ ,  $\forall s \in S$ , sauf peut-être pour les jeux de valeurs  $s_1, \dots, s_q$  » (le champ de validité de cette conclusion parfaitement robuste est  $S$  privé des jeux de valeurs  $s_1, \dots, s_q$ ).
- iv) « Les jeux de valeurs de  $\hat{S}$  (sous-ensemble de  $S$  parfaitement identifié) prouvent l'incompatibilité des objectifs suivants ... » (exemple d'objectifs, atteindre une performance au moins égale à  $b_i$  selon le critère  $g_i$  pour  $i=1, \dots, k$ ).
- v) «  $\hat{S}$  étant un sous-ensemble parfaitement identifié de  $S$ ,  $x$  est une solution qui,  $\forall s \in \hat{S}$ , possède la propriété  $P$  et,  $\forall s \notin \hat{S}$ , possède la propriété  $Q$  » (à titre d'exemple, avec un ensemble de solutions fini, propriété  $P$  :  $x$  est toujours parmi les  $\alpha$  meilleures solutions ; propriété  $Q$  :  $x$  n'est jamais dans les  $\beta$  plus mauvaises solutions).

*b) Exemples de conclusions approximativement robustes*

- i) «  $\hat{S}$  étant un sous-ensemble de  $S$  parfaitement identifié,  $\forall s \in \hat{S}$ ,  $x$  est une solution dont l'écart à l'optimum selon un critère  $g$  ne dépasse  $\varepsilon$  % que pour certains jeux de valeurs qui, parce qu'ils correspondent à des combinaisons d'options très peu vraisemblables, peuvent être négligés ».
- ii) « Une distribution de probabilités ayant été définie sur  $S$ , la solution  $x$  est admissible avec une probabilité au moins égale à  $1-\varepsilon$  » (dans la mesure où le risque  $\varepsilon$  de non admissibilité d'une solution est jugé négligeable, ce type de conclusion peut être regardé comme approximativement robuste).
- iii) « La solution  $x$  domine la solution  $y$ ,  $\forall s \in \hat{S}$ ,  $\hat{S}$  ne différant de  $S$  que par des jeux de valeurs qui correspondent à des combinaisons de procédures et de versions que l'on peut juger difficilement compatibles ».

- iv) «  $\hat{S}$  étant un sous-ensemble parfaitement identifié de  $S$ ,  $x$  est une solution qui, pour « presque » tous les jeux de valeurs  $s \in \hat{S}$  possède la propriété  $P$ , « presque » signifiant que les jeux de valeurs pour lesquels il pourrait en être autrement sont jugés négligeables ».
  - v) « La solution  $x$  est efficace,  $\forall s \in S$ , sauf pour certains jeux de valeurs qui, parce qu'ils « s'écartent trop » d'un jeu de valeurs de référence, peuvent être négligés.
- c) *Exemples de conclusions pseudo robustes*
- i) « La performance de la solution  $x$  selon le critère  $g$  peut être considérée comme toujours au moins égale à  $W$  car une simulation faisant intervenir un très grand nombre de tirages aléatoires de jeux de valeurs de  $S$  a montré que l'on obtenait toujours  $g(x) \geq W$  ».
  - ii) « Une exploration systématique mais non exhaustive de  $S$  a montré que les solutions suivantes ... étaient toujours admissibles ».
  - iii) « La solution  $x$  domine (ou presque) la solution  $y$ ,  $\forall s \in \hat{S}$  (sous-ensemble de  $S$  parfaitement délimité), domine « ou presque » signifiant que, lorsque la dominance est violée, elle ne l'est que sur un ou deux critères et avec des écarts qui restent faibles ».
  - iv) «  $\hat{S}$  étant un sous-ensemble de  $S$  qui a été construit en vue d'apparaître comme un sous-ensemble « représentatif » des jeux de valeurs constituant  $S$ , les assertions validées sur  $\hat{S}$  peuvent être jugées valides sur  $S$  ».
  - v) « L'affectation de  $x_i$  à la catégorie  $C_j$  peut,  $\forall s \in S$ , être regardée comme robuste compte tenu du sens donné à ce terme bien qu'il ne soit pas totalement dénué d'ambiguïté ».

Le lecteur trouvera des illustrations concrètes de certains des exemples qui précèdent dans Pomerol *et al.* (1995), Roy (1997, 1998), Roy et Bouyssou (1993, chapitre 8), Roy et Hugonnard (1982), Roy *et al.* (1986).

### 6.3 Comment obtenir des conclusions robustes ?

Les exemples qui précèdent montrent que des formes extrêmement variées d'énoncés de conclusions robustes méritent d'être envisagées. Ils peuvent inciter à penser qu'il devrait être possible de concevoir une liste d'énoncés typiques tout spécialement dignes d'intérêt pour chacun des trois types de conclusions robustes. Toutefois, les énoncés d'une telle liste ne présenteraient un intérêt que pour celles de ces conclusions robustes auxquelles on pourra associer une approche permettant de les valider. Or, cette approche dépendra bien évidemment :

- de la représentation formelle RF : modèles mono ou multicritères faisant intervenir des solutions caractérisées par un ensemble de variables soumises à des contraintes ou sur un ensemble d'actions énumérées ;
- de la façon dont  $S$  a été conçu : ensemble fini ou infini, nature des points de fragilité concernés, tant pour  $\hat{V}$  que pour  $\hat{P}$  (cf. sections 3 et 4).

Plutôt que de commencer par établir une liste de conclusions typiques pour se demander ensuite dans quel cadre (RF,  $S$ ) elles peuvent être validées, il est peut-être préférable de procéder en sens inverse. C'est d'ailleurs ce qui semble avoir été fait par les rares auteurs qui

ont cherché à répondre à la préoccupation de robustesse en validant des conclusions robustes plus élaborées que celles qui se bornent à affirmer que telle solution est robuste dans un sens bien défini. Je terminerai cette section par une brève présentation du cadre dans lequel se situent les trois seules approches dont j'ai actuellement connaissance. Toutes les trois s'intéressent au cas où :

- l'ensemble des possibilités de décision est défini par une liste finie de ce qui est appelé action plutôt que solution ;
- le modèle de préférence est multicritère ;
- la problématique peut être celle du choix, celle du tri ou celle du rangement.

a) J. Figueira, S. Greco, V. Mousseau et R. Slowinski se sont intéressés au cadre suivant (cf. Figueira *et al.*, 2009a,b ; Greco *et al.*, 2008, 2009) :

Le modèle de préférence de RF est une fonction de valeur additive qui agrège plusieurs fonctions partielles monotones non décroissantes.  $S$  a pour objet de prendre en compte un ensemble  $\hat{P}$  de procédures : les procédures de  $\hat{P}$  sont toutes celles qui permettent de construire une fonction de valeur additive compatible avec des informations de type préférentiel que le décideur fournit à propos d'un ensemble d'actions dites de référence.

Les conclusions robustes sont de deux types :

Celles qui sont validées par toutes les procédures de  $\hat{P}$  qui sont qualifiées de **nécessaires**.

Celles qui sont validées par au moins une procédure de  $\hat{P}$  qui sont qualifiées de **possibles**.

b) J. Figueira, R. Lahdelma, P. Salminen et T. Tervonen se sont intéressés au cadre suivant (cf. Tervonen *et al.*, 2008, soumis) :

- le modèle de préférence de RF est un système relationnel de surclassement de type ELECTRE qui prend en compte plusieurs pseudo critères ;
- les jeux de valeurs qui définissent  $S$  concernant les options regardées comme possibles à propos des poids, seuils de veto et seuils de discrimination.

Les conclusions robustes (énoncées sur  $S$ ) sont celles qui peuvent être validées sur un sous-ensemble  $\hat{S}$  de  $S$  construit par simulation, cette simulation faisant intervenir des distributions de probabilités sur l'ensemble des options possibles pour chacun des points de fragilité considérés (voir aussi Sörensen, 2008, pour une autre approche de la préoccupation de robustesse utilisant la méthode de Monte Carlo).

c) Avec H. Aïssi, nous nous sommes intéressés au cadre suivant (cf. Aïssi, Roy, 2008, 2009, sous-section 5.3) :

- le modèle de préférence de RF est un système relationnel de surclassement de type ELECTRE qui fait intervenir des pseudo critères ;
- $S$  est fini, construit sur la base de deux ensembles  $\hat{P}$  et  $\hat{V}$  préalablement définis.

Les conclusions robustes sont obtenues au terme d'une démarche en trois étapes. La première a pour objet de construire un sous-ensemble  $\hat{S}$  de  $S$  qui doit résulter d'un compromis entre

deux exigences relativement conflictuelles, l'une dite de calculabilité, l'autre dite de représentativité. La seconde étape a pour objet de mettre en évidence deux catégories de points de fragilité : ceux qui peuvent avoir une influence très significative sur les résultats et ceux dont l'impact sur les résultats peut être jugé négligeable. Sur ces bases, on propose de substituer à  $\hat{S}$  un ensemble  $\hat{S}'$  au moins aussi représentatif et, autant que faire se peut, beaucoup plus restreint. La troisième étape doit permettre d'obtenir des conclusions robustes adaptées au problème étudié sur la base d'une analyse attentive des résultats  $R(P, V)$ ,  $\forall (P, V) \in \hat{S}'$ . Cette approche reprend, en la généralisant, celle qui, bien que peu formalisée, avait été utilisée pour obtenir des conclusions robustes dans deux cas concrets (cf. Roy et Bouyssou, 1993, chapitre 8 ; Roy et Hugonnard, 1982).

Les types d'énoncés de conclusions robustes que chacune de ces trois approches peut conduire à valider mériteraient d'être davantage explicités. Enfin, il existe beaucoup d'autres cadres (RF,  $S$ ) (notamment en relation avec la programmation mathématique) que ceux dont il vient d'être question à propos desquels il devrait être possible de proposer des approches conçues pour obtenir des conclusions robustes.

## 7 Conclusion

La plupart des publications qui proposent des façons de répondre à la préoccupation de robustesse (telle qu'elle est définie en section 1) le font en restant cantonné dans deux ornières privilégiées. Tel est le double constat (cf. section 2) qui m'a conduit à formuler quatre propositions. Les deux premières (cf. sections 3 et 4) doivent aider l'analyste à ne pas laisser de côté des points de fragilité de ce que j'ai appelé la représentation formelle (cf. section 1) qui, s'il les négligeait, pourrait le conduire à proposer des solutions, à faire des recommandations pouvant aboutir, après mise en application, à des résultats beaucoup plus mauvais que ceux escomptés. Les deux dernières propositions (cf. sections 5 et 6), jumelées avec les deux précédentes, présentent des voies de recherche qui, même si certaines ont déjà commencé à être explorées, devraient, me semble-t-il, contribuer à élaborer de nouvelles formes de réponses à la préoccupation de robustesse. Grâce à des définitions plus générales du concept de solution robuste ou encore à des formes de réponses conçues en termes de conclusions robustes, il doit être possible de prendre en compte une plus grande variété d'attentes des décideurs, de mieux leur faire comprendre ce que la préoccupation de robustesse a de subjectif, de mieux les aider à choisir un compromis entre risquer d'être mal protégé contre l'occurrence de très mauvaises performances et renoncer à l'espoir de bonnes, voire de très bonnes, performances. Les voies de recherche qui ont été ainsi esquissées devraient non seulement permettre de mieux prendre en compte la préoccupation de robustesse dans les applications mais aussi susciter d'intéressants travaux de recherche sur des plans plus théoriques.

## Références

Aissi H., Bazgan C., Vanderpooten D. (2009): "Min-max and min-max regret versions of combinatorial optimization problems: a survey", *European Journal of Operational Research* 197, 2, 427-438.

Aissi H., Roy B. (2008) : « Robustesse en aide multicritère à la décision », Université Paris-Dauphine, *Cahier du LAMSADE* n° 276.

Aissi H., Roy B. (2009): "Robustness in multi-criteria decision aiding", in J. Figueira, S. Greco, M. Ehrgott (eds.), *New Trends in Multicriteria Decision Analysis*, Springer, International Series in Operations Research and Management.

Aloulou M.A., Kalai R., Vanderpooten D. (2005) : « Une nouvelle approche de robustesse :  $\alpha$ -robustesse lexicographique », *Bulletin du Groupe de Travail Européen « Aide Multicritère à la Décision*, Series 3(12).

Aubry A., Rossi A., Jacomino M. (to be published)): "A generic off-line approach for dealing with uncertainty in production systems optimisation", 13<sup>th</sup> IFAC International Symposium on Information Control problems in Manufacturing (IFAC-INCOM'09), Moscow, Russia.

Ben-Tal A., Nemirovski A. (1999): "Robust solutions of uncertain linear programs", *Operations Research Letters* 25, 1-13.

Bertsimas D., Sim M. (2003): "Robust discrete optimization and network flows", *Mathematical Programming B* 98 (1-3), 49-71.

Bertsimas D., Sim M. (2004): "The price of robustness", *Operations Research* 52 (1), 35-53.

Bescharati B., Azarm S. (2006): "Worst case deterministic feasibility and multiobjective robustness measures for engineering design optimization", *International Journal of Reliability and Safety*, Vol. 1, 40-58.

Billaut J.C., Moukrim A., Sanlaville E. (sous la direction de) (2005) : *Flexibilité et robustesse en ordonnancement*, Paris, Lavoisier.

Billaut J.C., Moukrim A., Sanlaville E. (edited by) (2008): *Flexibility and robustness in scheduling*, ISTE Ltd.

Chen W., Allen J., Tsui K.L., Mistree F. (1996): "procedure for robust design: minimizing variations caused by noise factors and control factors", *Journal of Mechanical Design*, Vol. 118, n° 4, 478-493.

Chinneck J.W., Ramadan K. (2000): "Linear programming with interval coefficients", *The Journal of the Operational Research Society* 51 (2), 209-220.

Dias L.C. (2007): "A note on the role of robustness analysis in decision-aiding processes", in: in B. Roy, M.A. Aloulou, R. Kalai (Guest Editors): *Robustness in OR-DA*, Université Paris-Dauphine, Annales du LAMSADE n° 7, 53-70.

Ehrgott M., Ryan D.M. (2002): "Constructing robust crews schedules with bicriteria optimization", *Journal of Multi-Criteria Decision Analysis*, Vol. 11, n° 3, 139-150.

Fernández F., Nickel S., Puerto J., Rodriguez-Chia A.M. (1999): "Robustness in the Pareto-solutions for the multicriteria weber location problem", Technical report n° 50/1999, University of Kaiserslautern.

Figueira J., Greco S., Mousseau V., Slowinski R. (2008) : "Interactive multiobjective optimization using a set of additive value functions", in Branke J., Deb K., Miettinen K.,

Slowinski R. (editors), *Multiobjective Optimization: Interactive and Evolutionary Approaches*, LNCS 5252, Springer-Verlag, Berlin, 97-120.

Figueira J., Greco S., Mousseau V., Slowinski R. (2009a), "Robust ordinal regression", in Ehrgott M., Figueira J., Greco S. (editors), *New Trends in Multiple Criteria Decision Analysis*, Springer-Science+Business Media, Inc.

Figueira J., Greco S., Slowinski R. (2009b), "Building a set of additive value functions representing a reference preorder and intensities of preference: GRIP method", *European Journal of Operational Research* 195(2), 460-486.

Gabrel V., Murat C. (à paraître): "Robustness and duality in linear programming", *Journal of the Operational Research Society*.

Greco S., Mousseau V., Slowinski R. (2008), « Ordinal regression revisited: multiple criteria ranking with a set of additive value functions », *European Journal of Operational Research* 191, 416-435.

Greco S., Mousseau V., Slowinski R. (2009), "Multicriteria sorting with a set of value functions", *European Journal of Operational Research* (submitted).

Hites R., De Smet Y., Risse N., Salazar M., Vincke P. (2006): "About the applicability of MCDA to some robustness problems", *European Journal of Operational Research*, Vol. 174, n° 1, 322-332.

Jia Z., Ierapetritou M.G. (2007): "Generate Pareto optimal solutions of scheduling problems using normal boundary intersection technique", *Computers & Chemical Engineering*, Vol. 31, n° 4, 268-280.

Kalaï R. (2006) : *Une nouvelle approche de robustesse : Application à quelques problèmes d'optimisation*, Université Paris-Dauphine, Thèse de Doctorat.

Kalaï R., Lamboray C. (2007) : « L' $\alpha$ -robustesse lexicographique : une relaxation de la  $\beta$ -robustesse », in: B. Roy, M.A. Aloulou, R. Kalaï (Guest Editors): *Robustness in OR-DA*, Université Paris-Dauphine, Annales du LAMSADE n° 7, 129-1143.

Kennington J., Lewis K., Olinick E., Ortynski A., Spriride G. (2001): "Robust solutions for the WDM routing and provisioning problem with uncertainty demands and single link failure protection", Technical Report 01-EMIS-07, EMIS Dept., SMU, Dallas.

Kouvelis P., Yu G. (1997): *Robust discrete optimization and its applications*, Kluwer Academic Publishers.

Lamboray C. (2007): "Supporting the search for a group ranking with robust conclusions on prudent orders", in: B. Roy, M.A. Aloulou, R. Kalaï (Guest Editors): *Robustness in OR-DA*, Université Paris-Dauphine, Annales du LAMSADE n° 7, 145-171.

Liesiö J., Mild P., Salo A. (2008): "Robust portfolio modelling with incomplete cost information and projects interdependencies", *European Journal of Operational Research* 190, 679-695.

Minoux M. (2007): “Duality, robustness, and 2-stage robust lp decision models”, in: B. Roy, M.A. Aloulou, R. Kalaï (Guest Editors): *Robustness in OR-DA*, Université Paris-Dauphine, Annales du LAMSADE n° 7, 173-190.

Perny P., Spanjaard O., Storme L.X. (to appear): “Enumeration of robust paths and spanning trees in multivalued graphs”, *Annals of Operations Research*.

Pomerol J.C., Roy B., Rosenthal-Sabroux C., Sad A. (1995): “An ‘intelligent’ DSS for the multicriteria evaluation of railway timetables”, *Foundations of Computing and Decision Sciences*, Vol. 20, No. 3, 219-238.

Rossi A. (2003) : *Ordonnancement en milieu incertain – Mise en œuvre d’une démarche robuste*, Institut National Polytechnique de Grenoble, Thèse de Doctorat.

Roy B. (1997) : « Une lacune en RO-AD – Les conclusions robustes », Université Paris-Dauphine, *Cahier du LAMSADE* n° 144.

Roy B. (1998): “A missing link in OR-DA – Robustness analysis”, *Foundations of Computing and Decisions Sciences* 23, 3, 141-160.

Roy (2004) : « Robustesse de quoi et vis-à-vis de quoi mais aussi robustesse pourquoi en aide à la décision ? », in : Hengeller Antunes C., Figueira J., Climaco J. (eds) : *Aide Multicritère à la Décision – Multiple Criteria Decision Aiding*, 56<sup>e</sup> Journées du Groupe de Travail Européen « Aide Multicritère à la Décision » – 56th Meeting of the European Working Group « Multiple Criteria Decision Aiding », Coimbra, Portugal, October 3-5, 2002, Comissão de Coordenação e Desenvolvimento Regional do Centro, INESC Coimbra, Faculdade de Economia da Universidade de Coimbra, 29-39.

Roy B. (2005) : « A propos de robustesse en recherche opérationnelle et aide à la décision », in : Billaut J.C., Moukrim A., Sanlaville E. (sous la direction de) : *Flexibilité et robustesse en ordonnancement*, Paris, Lavoisier, 35-50.

Roy B. (2007) : « La robustesse en recherche opérationnelle et aide à la décision : une préoccupation multi-facettes », in B. Roy, M.A. Aloulou, R. Kalaï (Guest Editors): *Robustness in OR-DA*, Université Paris-Dauphine, Annales du LAMSADE n° 7, 209-231.

Roy B. (2008): “Robustness in operations research and decision aiding”, in: Billaut J.C., Moukrim A., Sanlaville E. (edited by): *Flexibility and robustness in scheduling*, ISTE Ltd, 35-51.

Roy B. (2009): “Robustness in operational research and decision aiding: A multi-faceted issue”, *European Journal of Operational Research*, doi/10.1016/j.ejor.208.12.036.

Roy B., Bouyssou D. (1993) : *Aide multicritère à la décision : Méthodes et Cas*, Paris, Economica.

Roy B., Hugonnard J.C. (1982): “Ranking of suburban line extension projects on the Paris metro system by a multicriteria method”, *Transportation Research*, Vol. 16A, No. 4, 301-312.

Roy B., Hugonnard J.C. (1982) : « Classement des prolongements des lignes de métro en banlieue parisienne (Présentation d'une méthode multicritère originale) », *Cahiers du CERO*, Volume 24, n° 2-3-4, 153-171.

Roy B., Présent M., Silhol D. (1986): "A programming method for determining which Paris metro stations should be renovated", *European Journal of Operational Research*, Vol. 24, 318-334.

Salazar D.E., Rocco C.M.S. (2007): "Solving advanced multi-objective robust designs by means of multiple objective evolutionary algorithms (MOEA): a reliability application", *Reliability Engineering and System Safety*, Vol. 92, n° 6, 697-706.

Snyder L. (2006), "Facility location under uncertainty: A review", *IIE Transactions* 38, 537-554.

Sörensen K. (2008): "Investigation of practical, robust and flexible decisions for facility location problems using tabu search and simulation", *Journal of the Operational Research Society*, Volume 59, Number 5, 624-636.

Spanjaard O. (2003) : *Exploitation de préférences non-classiques dans les problèmes combinatoires : modèles et algorithmes pour les graphes*, Université Paris-Dauphine, Thèse de Doctorat.

Tervonen T., Figueira J., Lahdelma R., Salminen P. (2004): "An inverse approach for ELECTRE III", Research Report 20, The Institute of Systems Engineering and Computers (INESC Coimbra) (submitted).

Tervonen T., Figueira J., Lahdelma R., Salminen P. (2009), "A stochastic method for robustness analysis in sorting problems", *European Journal of Operational Research* 192(1), 236-242.

Watzlawick P. (1976) : *La réalité de la réalité (confusion, désinformation, communication)*, Editions du Seuil.