

CAHIER DU LAMSADE

297

February 17, 2010

Détermination des stocks de sécurité dans une
chaîne logistique-amont dédiée à une production de
masse de produits fortement diversifiés

Détermination des stocks de sécurité dans une chaîne logistique-amont dédiée à une production de masse de produits fortement diversifiés

Carole Camisullis* — Vincent Giard**

* IRG, Université Paris-Est - carole.camisullis@univ-paris12.fr

** Lamsade, Université Paris-Dauphine - vincent.giard@dauphine.fr

RÉSUMÉ. Dans une chaîne logistique - amont orientée vers la production de masse de produits diversifiés, de nombreuses sources d'instabilité de la production et des approvisionnements existent : le niveau et la structure de la production de l'assemblage final, la variabilité des délais d'obtention, la maîtrise de la qualité, les règles de lotissement en transport, les contraintes de capacité de transport, l'anticipation de la demande, la synchronisation des flux expédiés, produits et réapprovisionnés et le niveau de traitement de la diversité induite. Dans le cas des politiques calendaires de réapprovisionnement, chaque maillon dispose de deux types de stocks de sécurité lui permettant de faire face à ces différentes sources de fluctuations : des stocks de sécurité de composants produits à destination des maillons aval et des stocks de sécurité de composants approvisionnés en provenance des maillons amont. Les procédures mobilisées doivent tenir compte du cadre organisationnel des échanges de flux d'informations, la pertinence des règles de réapprovisionnement ou de lancement en production reposant sur celle des informations structurelles propagées le long de la chaîne logistique.

ABSTRACT. In an upstream supply chain dedicated to the mass production of customized products, many sources of production and supply instability can be identified: the level and structure of the production of the final assembly line, the variability of lead times, the quality issues, packaging and loading constraints in transport, the anticipation of the demand, the synchronization of the flows of the components sent, received and produced. In the case of periodic replenishment policies, two different types of safety stocks are needed for every plant of the supply chain, which prevent from these various sources of fluctuations: safety stocks of produced components to face up to the demand of its downstream links and safety stocks of supplied components to face up to its production. The mobilized procedures must take into account the organizational framework of the exchanges of information and products. The relevance of the supply and production rules is based on the relevance of structural information broadcast along the supply chain.

MOTS-CLÉS : chaîne logistique, stock de sécurité, composants produits, composants approvisionnés, valeur de l'information.

KEYWORDS: supply chain, safety stock, produced components, supplied components, information value.

1. Introduction

On s'intéresse ici à l'analyse, en régime de croisière, d'une chaîne logistique orientée vers la production de masse de produits fortement diversifiés. La différenciation est obtenue par l'assemblage de n ensembles de composants alternatifs ou optionnels assemblés sur n postes d'une ligne d'assemblage, contribuant à la diversité recherchée (Anderson & Pine, 1997). Ce type de chaîne est maintenant repéré dans la littérature spécialisée sous l'acronyme BOSC, pour Build-to-Order Supply Chain (Gunasekarana & Ngaib, 2005). Le pilotage des maillons de la chaîne logistique amont (CLA), c'est-à-dire celle qui a pour vocation de produire et non de distribuer, s'appuie généralement sur des politiques calendaires d'approvisionnement. L'indépendance de gestion des maillons de la chaîne est conditionnée par une absence de propagation d'incidents le long de la chaîne et l'existence d'une capacité suffisante pour répondre aux commandes reçues dans un délai acceptable. Ces conditions d'indépendance en régime de croisière sont décrites dans Camisullis & Giard (2009) et supposées respectées ici.

Les règles de pilotages retenues doivent contenir la possibilité d'une rupture de stock à un niveau jugé acceptable. Elles conduisent à une détention de stocks de sécurité à chaque maillon de la chaîne logistique. Plusieurs facteurs ont une influence sur leurs niveaux. L'incertitude pesant sur la demande prévisionnelle, les délais de livraison et la qualité des produits mais aussi les contraintes de lotissement et de capacité de transport jouent un rôle identifié depuis longtemps mais, d'un point de vue opérationnel, l'implication de leur prise en compte simultanée est rarement envisagée ; nous essayons ici de combler cette lacune. Les règles de pilotage des maillons de la chaîne et la qualité des informations transmises jouent un rôle sous-estimé sur l'importance des stocks de sécurité et, dans certains cas, sur la génération de cycles dans la production avec des conséquences potentielles en cascade vers l'amont de la chaîne logistique ; on analysera en détail l'impact de ces facteurs. Des exemples numériques seront proposés pour illustrer l'impact de ces facteurs et montrer que la complexité des problèmes ne constitue pas un obstacle à l'usage d'une démarche rigoureuse garantissant la performance désirée.

On commencera par un examen rapide des travaux antérieurs relatifs à la détermination des stocks de sécurité dans les chaînes logistiques (section 2). On mettra en évidence quelques caractéristiques fondamentales communes à tous les stocks de sécurité (section 3). La vision « chaîne logistique » conduit à distinguer les stocks de sécurité de composants approvisionnés (section 4), des stocks de sécurité de composants produits (section 5) qui ne se posent pas exactement dans les mêmes termes. On terminera (section 6) par les implications managériales de ces analyses sur les conditions de performance du pilotage de la chaîne logistique.

2. Travaux antérieurs

Les chercheurs s'intéressent aux stocks de sécurité depuis une bonne cinquantaine d'années. Initialement liés au caractère aléatoire de la demande et à la maîtrise des risques, d'autres sources d'aléa motivant leur existence ont rapidement été prises en compte. Quelques écrits récents illustrent la diversité des justifications avancées expliquant comment les stocks de sécurité permettent de contrer différentes sources d'incertitude (au sens large). Par exemple, l'incertitude en production est traitée par Ho *et al.* (1995) qui s'intéressent à l'incertitude affectant les processus de production (pannes, délais d'exécution variables...) ou par Vargas & Dear (1991) qui se penchent sur les effets de l'incertitude concernant les temps de lancement et de production, les pannes des machines et les temps de réparation nécessaires. L'incertitude sur les approvisionnements est traitée, par exemple, par Chiu & Huang (2003) pour l'incertitude portant sur les délais de livraison et par Koh *et al.* (2002) pour l'incertitude sur les composants (qualité, problèmes liés au fournisseur). L'incertitude affectant la demande apparaît par exemple dans les articles de Guide & Srivastava (2000) pour l'incertitude sur les quantités demandées, dans les modèles de Lowerre (1985), Wemmerlov (1986) ou plus récemment Krupp (1997) pour qui les stocks de sécurité servent à contrer les erreurs de prévision. Si les stocks de sécurité permettent de limiter les risques, d'autres solutions alternatives ont été étudiées : appel à des capacités excédentaires internes ou externes (sous-traitance), négociation de délais de livraison additionnels ; ces différentes solutions, qui ont des différences en termes d'efficacité et d'efficience, ne sont pas exclusives.

Pour déterminer le niveau et la composition des stocks de sécurité à détenir pour faire face à ces différentes sources d'incertitude, deux approches non exclusives ont été utilisées : la modélisation mathématique et la simulation.

La modélisation mathématique décrit un problème d'approvisionnement, défini en univers aléatoire ou en univers certain, par un système de relations mathématiques liant des variables de commande à des variables d'état et des paramètres (et des variables aléatoires dans les formulations stochastiques), pour aboutir à un ensemble de contraintes et une fonction-objectif à optimiser. L'analyse des conditions d'optimalité permet de définir les valeurs optimales des variables de commande. Les premiers modèles établis, celui de la quantité économique de commande (univers certain) et celui du marchand de journaux (univers aléatoire) étaient très simples, n'utilisaient qu'une variable de commande et n'intégraient aucune contrainte. Ces approches formelles se sont considérablement complexifiées et, depuis une vingtaine d'années, de nombreux modèles ont été proposés pour traiter des problèmes liant plusieurs maillons de la chaîne logistique même si les premiers écrits sont anciens (Clark & Scarf, 1960). Illustrons cette évolution par quelques exemples. Diks & de Kok (1998) cherchent à minimiser les coûts de détention des stocks et de pénalité pour un système composé de N échelons utilisant

une politique de reapprovisionnement périodique de stocks avec des délais d'approvisionnement fixes. Chen (1999), vise à minimiser le coût total moyen d'un système multi-échelons où chaque échelon utilise une politique de reapprovisionnement périodique, avec délais d'approvisionnement nuls. Axsater & Zhang (1999) évaluent les coûts d'un système composé d'un entrepôt central approvisionnant plusieurs distributeurs avec des délais d'approvisionnement constants. So & Zheng (2003) analysent deux facteurs qui contribuent à la forte variabilité des quantités commandées dans le cas de fournisseur : le délai de livraison du fournisseur, supposé variable et dépendant des quantités commandées par le client, et la mise à jour des prévisions de la demande. Rau *et al.* (2003) étudient une chaîne logistique composée d'un fournisseur, d'un fabricant et d'un distributeur avec des délais de livraison négligeables et développent un modèle de gestion des stocks multi-échelons visant à minimiser le coût optimal de l'ensemble de la chaîne.

L'approche simulateur est utilisée par certains auteurs lorsque l'approche analytique devient trop compliquée du point de vue de la description du système étudié ou de l'établissement de solution analytique. Par exemple, Ng *et al.* (2003) simulent le fonctionnement de chaînes logistiques composées de N échelons, avec des délais d'approvisionnements aléatoires et comparent différents types de politiques de stock. Martel (2003) simule le fonctionnement d'une chaîne logistique composée de trois niveaux, qui utilisent des politiques de reapprovisionnement périodique avec des délais d'approvisionnement prédéterminés, pour déterminer des politiques de planification glissante permettant de gérer efficacement les flux. Liberopoulos & Koukoulialis (2005) simulent une chaîne logistique de production à deux niveaux, avec des délais d'approvisionnement planifiés ; ils comparent les résultats obtenus en terme de niveau de stock et de performance du système en employant soit une politique de type base stock, soit une politique hybride mélangeant base stock et Kanban.

Certains auteurs adoptent une démarche hybride combinant simulation et utilisation de solution analytiques de modèles de gestion des approvisionnements. Par exemple, Mohebbi & Posner (1998) étudient une chaîne logistique composée d'un centre de production qui utilise une politique à point de commande et qui peut être approvisionné par un, deux ou plusieurs fournisseurs avec des délais d'approvisionnement stochastiques ; ils comparent les résultats obtenus en fonction du nombre de fournisseurs sélectionnés. Moinzadeh (2002) propose une politique de reapprovisionnement pour un fournisseur devant approvisionner plusieurs distributeurs avec des délais d'approvisionnement constants, chaque distributeur utilisant une politique à seuil de commande. Tang & Grubbström (2003) analysent un système d'assemblage à deux niveaux, avec des délais d'approvisionnement stochastiques et une politique de réapprovisionnement de lot pour lot ; leur but est de minimiser une fonction de coût liée aux ruptures d'approvisionnement et à la détention des stocks. Forsberg (1996) ou Seifbarghy & Jokar (2005) cherchent à évaluer les coûts d'une chaîne logistique composée d'un entrepôt approvisionnant plusieurs distributeurs

avec des délais constants et utilisation des politiques périodiques à seuil de commande.

Ces approches reposent sur une coopération ne tiennent pas vraiment compte de l'autonomie décisionnelle des acteurs, du partage des gains induits par des politiques coordonnées d'approvisionnement et de la possibilité d'une détérioration de la position d'un maillon passant d'une gestion autonome à une gestion coordonnée. L'intérêt de ces modèles (en univers aléatoire) de détermination des valeurs optimales de variables de commande de l'approvisionnement de maillons de la CLA est, en réalité, assez limité : l'impact d'une rupture de stock est tel qu'il est difficilement envisageable d'accepter une rupture de stock qui ne soit pas négligeable. On se place donc ici dans le cadre d'une autonomie décisionnelle des maillons de la CLA qui gèrent tous leurs approvisionnements avec un risque prédéterminé négligeable de rupture de stock, conditions assurant le découplage des maillons de la chaîne logistique, en régime de croisière. En tout état de cause, les politiques optimales d'approvisionnement se caractérisant par des probabilités optimales de rupture de stock, ce qui suit reste valable quel que soit le risque accepté, à condition que ce risque ne soit pas trop élevé. Ajoutons qu'il sera fait appel à la simulation seulement pour déterminer des distributions de probabilités impossibles à obtenir autrement en cas de combinaison de sources d'aléas et non pour simuler un système afin de déterminer des valeurs de variables de commande garantissant une certaine performance.

3. Caractéristiques générales des stocks de sécurité

On commencera par présenter les raisons de la mise en place de stocks de sécurité et de leurs localisations dans une perspective de « propagation de la demande » le long d'une chaîne logistique. On précisera les caractéristiques de la demande aléatoire à prendre en considération pour définir la politique d'approvisionnement conduisant au stock de sécurité. On verra comment le risque accepté et ces caractéristiques influent sur son niveau. On examinera enfin la relation existant entre stock de sécurité et stock résiduel moyen avant livraison.

3.1. Localisation et justification des stocks de sécurité dans la chaîne logistique

Sur le plan des principes, le stock de sécurité est constitué dans le cadre d'une politique d'approvisionnement pour faire face à une demande qui n'est pas connue avec certitude et qui ne peut être satisfaite en totalité par une production à la commande. L'approvisionnement peut porter sur des produits commandés auprès d'un fournisseur pour couvrir les besoins d'une unité de production (ou d'une unité de distribution dans la chaîne logistique-aval). Il peut également concerner les produits fabriqués par une unité de production, lorsque cette unité ne peut produire

complètement à la commande, le point de pénétration de commande de ses clients ne rentrant pas suffisamment dans son processus productif (Giard & Mendy, 2007).

Dans sa version de base, la politique d'approvisionnement calendaire, la seule envisagée dans cet article, se caractérise par la passation périodique d'une commande égale à la différence entre un niveau de reapprovisionnement R et la position de stock observée au moment de la passation de la commande. L'intervalle θ entre deux passations de commande correspond à la période de révision calendaire. Le stock de sécurité est égal à la différence entre R et la demande moyenne définie l'intervalle de temps séparant la commande de sa livraison. Le niveau de reapprovisionnement est défini de telle sorte que le risque d'une rupture de stock α soit égal à une probabilité cible, déterminée ou non par le calcul économique. Ce risque α ne peut être élevé, sous peine de pouvoir conduire à un stock de sécurité négatif, ce qui n'aurait guère de sens d'un point de vue opérationnel. Notons que l'on retrouve l'usage du stock de sécurité dans les politiques d'approvisionnement du type « quantité économique de commande – point de commande » dans lesquelles le point de commande joue un rôle comparable à celui du niveau de reapprovisionnement.

En gestion calendaire, la définition du stock de sécurité découle donc de celle du niveau de reapprovisionnement. Les modèles de gestion optimale des stocks utilisent des fonctions de coûts pour proposer des relations analytiques de détermination du niveau de reapprovisionnement optimal. Il correspond toujours au fractile de la distribution de demande retenue associé à un risque de rupture optimal, ce dernier étant fonction de la structure relative des coûts de la fonction à optimiser. En régime de croisière, les caractéristiques de la demande et le niveau de reapprovisionnement sont stables. La quantité commandée correspond à la différence entre la position de stock après la dernière commande passée – c'est-à-dire le niveau de reapprovisionnement – et la position de stock à la passation de commande. *La quantité commandée est donc égale à la demande exprimée depuis la dernière commande, si les demandes non satisfaites sont différées, et à la demande satisfaite si les demandes non satisfaites sont perdues.* Dans ce dernier cas, il y a peu de différence entre demandes exprimées et demandes satisfaites si le risque de rupture α est faible. En général, dans les politiques d'approvisionnement des maillons de la chaîne logistique – amont, les demandes non satisfaites sont différées et le risque de rupture de stock accepté très faible. Deux observations opérationnelles peuvent être faites.

- Pour le fournisseur, la quantité commandée, qui correspond à un cumul de demandes aléatoires, est une variable aléatoire dont les caractéristiques découlent de celles des demandes que son client doit satisfaire.

- Cette propriété n'est pas valide si certaines pièces approvisionnées sont rejetées pour des raisons de qualité : il faut alors ajouter à la demande exprimée depuis la dernière commande le nombre de pièces prélevées qui ont été rejetées.

Un dimensionnement pertinent des stocks de sécurité dans les différents maillons d'une chaîne logistique en limite les à-coups de fonctionnement. La qualité de ce dimensionnement repose en grande partie sur une bonne propagation des

informations disponibles de l'aval vers l'amont ; on reviendra sur ce point en conclusion. On s'intéresse ici aux stocks de sécurité du maillon B de la sous-chaîne logistique $A \rightarrow B \rightarrow C$ dans laquelle, par exemple, C est une ligne d'assemblage de véhicules automobiles, B est une unité d'assemblage de moteurs et A une unité de fabrication de carters. Deux types de stock de sécurité peuvent être détenus dans cette unité B en raison de ses relations avec l'amont et l'aval.

– Les *stocks de sécurité de production* portent sur des *composants i produits* par le maillon B pour être vendu à son client (maillon C) lorsque le point de pénétration de commande du maillon C dans le système productif du maillon B ne permet pas à B de produire entièrement à la commande. Ces stocks de sécurité sont détenus par le fournisseur. On suppose que le client C transmet une commande q_{it} de composants i à son fournisseur B au début du jour t , la livraison devant se faire au début du jour $t + D_i$, compte tenu d'un délai contractuel de mise à disposition D_i et du délai de livraison λ_i (avec $\lambda_i \leq D_i$). La commande suivante est passée au début du jour $t + \theta$. Le fournisseur B dispose alors de $D_i - \lambda_i$ jours pour exécuter la commande reçue. Si cette durée est inférieure au délai de fabrication F_i du composant i (qui peut être lancé de façon indépendante ou conjointement avec d'autres composants), le fournisseur exécute la commande en prélevant les quantités requises dans des stocks qui sont dimensionnés en tenant compte des caractéristiques aléatoires de la demande du client et du risque de rupture de stock accepté. Dans le cas contraire ($D_i - \lambda_i > F_i$), il peut produire à la commande. Si l'intervalle $D_i - \lambda_i$ est supérieur à la période de révision calendaire θ , c'est que le client C exploite des informations de programmation de sa production au-delà de ce qui lui est strictement nécessaire. Cette anticipation de réquisition peut permettre au fournisseur B de passer d'une production pour stock à une production à la commande ; en allant plus loin, elle peut permettre au fournisseur A de B de produire éventuellement à la commande. Lorsqu'elle est possible, cette propagation permet à la fois une meilleure efficacité (élimination de la possibilité de rupture de stock dans certains maillons) et une meilleure efficacité (élimination de stock de sécurité dans certains maillons), cette proposition étant à amender si l'on n'a pas la garantie d'une parfaite qualité des produits livrés.

– Les *stocks de sécurité d'approvisionnement* portent sur des *composants j acquis* auprès d'un fournisseur (maillon A) pour être utilisé en production par le maillon B. Ces stocks sont détenus par le client (ici le maillon B), contrairement au cas précédent où ils sont détenus par le fournisseur. Adaptons les conventions du paragraphe précédent. La commande q_{jt} du composant j passée par B à son fournisseur A au début du jour t est à livrer au début du jour $t + D_j$ avec un délai de mise à disposition D_j et un délai de livraison λ_j ($\lambda_j \leq D_j$). La synchronisation des passations de commandes de A et B permet une meilleure connaissance de la demande à satisfaire pour B (après programmation de sa production) mais elle ne s'impose pas. Au moment de la passation de commande de B à A, le maillon B a défini une programmation de la production des références utilisant le composant j jusqu'au début du jour $t + P_j$. Si son horizon de planification P_j est supérieur ou égal au délai de mise à disposition D_j , la commande peut correspondre exactement à

la consommation prévue et aucun stock de sécurité n'est à constituer. Dans le cas contraire la commande se fonde entièrement sur une connaissance statistique des besoins si $D_j - P_j > \theta$ et en partie sur une demande ferme et une connaissance statistique des besoins, si $D_j - P_j < \theta$. Le problème du stock de sécurité d'un composant approvisionné est plus complexe que celui d'un composant produit dans la mesure où le délai d'approvisionnement peut être aléatoire. Dans les deux cas, d'éventuels problèmes de qualité peuvent compliquer la détermination du niveau de reapprovisionnement et donc du stock de sécurité. Enfin, dans l'analyse des composants approvisionnés, on évoquera l'impact de la prise en compte d'une contrainte de capacité du moyen de transport utilisé, sur l'augmentation du risque encouru ainsi que ses conséquences sur l'augmentation du niveau de reapprovisionnement et du stock de sécurité lorsque le risque-cible ne peut être modifié.

3.2. Détermination de la demande à prendre en considération

On a vu que le niveau de reapprovisionnement, dont dépend le stock de sécurité, est un fractile d'une distribution de probabilités d'une demande pendant une période. Plusieurs aléas peuvent se combiner dans la détermination de cette distribution, ce qui conduit rapidement à déterminer par simulation la distribution de probabilité à utiliser. On illustrera numériquement l'obtention de ces distributions de référence et la détermination du fractile associé à un risque prédéterminé.

3.2.1. Sources d'aléas retenues

La demande d'un composant alternatif i ayant toujours la même probabilité p_i d'être monté sur l'un des produits qui passent successivement sur un même poste d'une ligne d'assemblage est une variable aléatoire qui peut combiner 3 sources de variation.

- La taille de l'ensemble considéré est le produit d'une consommation quotidienne n par un nombre L de jours, qui peut être certain ou aléatoire. A priori, L ne devrait être aléatoire que dans l'approvisionnement de composants acquis auprès d'un fournisseur.

- La demande à satisfaire X_{iL} définie sur L jours suit, en régime de croisière, la loi Binomiale $\mathcal{B}(nL, p_i)$.

- Enfin, si un produit livré a une probabilité positive π_i de ne pas être conforme, la demande X_{iL} a peu de chance d'être satisfaite en totalité. Pour être en mesure de couvrir cette demande X_{iL} il faut disposer d'une quantité complémentaire z_{iL} , donc de $X_{iL} + z_{iL}$ pièces disponibles. Le nombre de pièces non conformes dans ce cas suit la loi Binomiale $\mathcal{B}(X_{iL} + z_{iL}, \pi_i)$. La quantité z_{iL} doit être considérée comme une occurrence de la variable aléatoire Z_{iL} , qui suit la loi Binomiale négative $\mathcal{BN}(X_{iL}, \pi_i)$ dont la probabilité cumulée $P(Z_{iL} \leq z_{iL})$ correspond à la probabilité d'avoir au plus z_{iL} pièces non-conformes dans un lot de $X_{iL} + z_{iL}$ pièces. Il convient donc de s'intéresser à la distribution de probabilité du nombre de pièces disponibles $Y_{iL} = X_{iL} + Z_{iL}$ pour être en mesure de déterminer la valeur du fractile Y_{iL}^* n'ayant qu'une

probabilité α de ne pas être en mesure couvrir la demande à satisfaire, compte tenu des trois sources d'aléa identifiées.

En définitive, la caractérisation de la demande à prendre en considération conduit à distinguer les 4 cas de figure du tableau 1.

Qualité des produits livrés	L_i certain	L_i aléatoire
Parfaite ($\pi_i = 0$) $\rightarrow$ étude de X_{iL}	Cas 1	Cas 2
Imparfaite ($\pi_i = 0$) $\rightarrow$ étude de Y_{iL}	Cas 3	Cas 4

Tableau 1. Caractérisation de la demande à prendre en considération

3.2.2. Illustration numérique

On s'intéressera ici à l'approvisionnement de 6 composants alternatifs (moteurs) susceptibles d'être montés sur un poste d'assemblage qui traite $n = 962$ produits (véhicules) par jour. L'un de ces composants alternatifs est nécessairement retenu au montage. Cet approvisionnement est destiné à satisfaire une demande qui n'est connue qu'en probabilité (probabilités p_i données dans le tableau 2). On suppose que cette structure de probabilités est stable et donc que l'on est en régime de croisière. Si cette structure évolue lentement, on se ramènera au cas précédent en révisant périodiquement les caractéristiques de ce régime de croisière. Bien évidemment, la structure de la demande observée pour un jour quelconque varie d'un jour à l'autre pour des raisons classiques de fluctuations d'échantillonnage.

Moteur i	1	2	3	4	5	6
p_i	54,46 %	13,29 %	3,58 %	21,51 %	5,13 %	2,03 %

Tableau 2. Distribution de probabilités p_i des moteurs

Le vecteur X_{iL} des demandes des composants i sur L jours suit la loi Multinomiale $\mathcal{M}\{n = 962.L ; [p_i]\}$. La demande totale de composants alternatifs à monter au cours de ces L jours est nécessairement égale à la production totale de ces journées ($\sum_{i=1}^L \sum_{j=1}^6 X_{ij} = nL = 962L$). Cela étant, la demande du composant alternatif i suit la loi Binomiale $\mathcal{B}(nL ; p_i)$, puisque l'analyse porte sur ce moteur i contre le regroupement de tous les autres moteurs. L'intérêt d'avoir identifié la présence d'une loi Multinomiale apparaîtra lorsqu'on analysera les conséquences de la consolidation des politiques d'approvisionnement.

Pour la longueur L de la période de production, on travaillera sur une valeur certaine ($L = 12$) et deux distributions discrètes. La première est la distribution discrète uniforme de bornes 10 et 14 jours : $L \sim \mathcal{U}[10, 14]$. La seconde est une distribution discrète empirique unimodale $\mathcal{D}\{[10, 10\%], [11, 30\%], [12, 45\%], [13, 10\%], [14, 5\%]\}$. L'espérance mathématique de ces deux distributions est 12, ce qui permet de rapprocher les résultats obtenus avec ceux trouvés dans le cas d'un délai certain. Pour l'étude de l'impact des problèmes de qualité dans l'analyse de la

demande à satisfaire on retiendra $\pi = 1\%$, comme probabilité qu'un composant livré ne soit pas considéré conforme.

3.2.1.1. Cas 1 – délai certain & qualité garantie

Commençons par illustrer le cas le plus simple, celui de l'étude de la distribution de référence dans le cas d'un délai certain et en l'absence de problème de qualité. La distribution Binomiale n'étant pas continue, la fonction de répartition ne l'est pas non plus. La définition d'un fractile $R_{iL\alpha}$ implique d'adopter une convention : on retiendra la valeur la plus basse de $R_{iL\alpha}$ telle que la demande X_{iL} ait une probabilité inférieure à α d'être dépassée. Le tableau 3 illustre un jeu de valeurs de $R_{iL\alpha}$ tel que $P(X_{iL\alpha} \geq R_{iL\alpha}) \leq \alpha$, pour les 6 moteurs considérés, pour $\alpha = 0,01\%$ et avec $L = 1$ ou $L = 12$. Ces valeurs peuvent être trouvées facilement avec un tableur. Les distributions de probabilité des moteurs 1 et 5 pour $L = 12$ sont illustrées à la figure 1.

$n=962$		Moteur 1		Moteur 2		Moteur 3		Moteur 4		Moteur 5		Moteur 6	
p_i		54,46 %		13,29 %		3,58 %		21,51 %		5,13 %		2,03 %	
L		1	12	1	12	1	12	1	12	1	12	1	12
nL		962	11 544	962	11 544	962	11 544	962	11 544	962	11 544	962	11 544
$\alpha=1$	95%	549	6 375	145	1 594	44	446	228	2 556	61	631	27	260
	99%	560	6 411	153	1 620	48	460	237	2 586	66	648	30	270
	99,90%	571	6 452	161	1 648	53	476	247	2 620	72	667	34	283
	99,99%	581	6 486	168	1 671	58	489	255	2 648	77	682	38	293

Tableau 3. Fractiles des distributions de probabilité des X_{iL} avec $X_{iL} \sim \mathcal{B}(nL, p_i)$

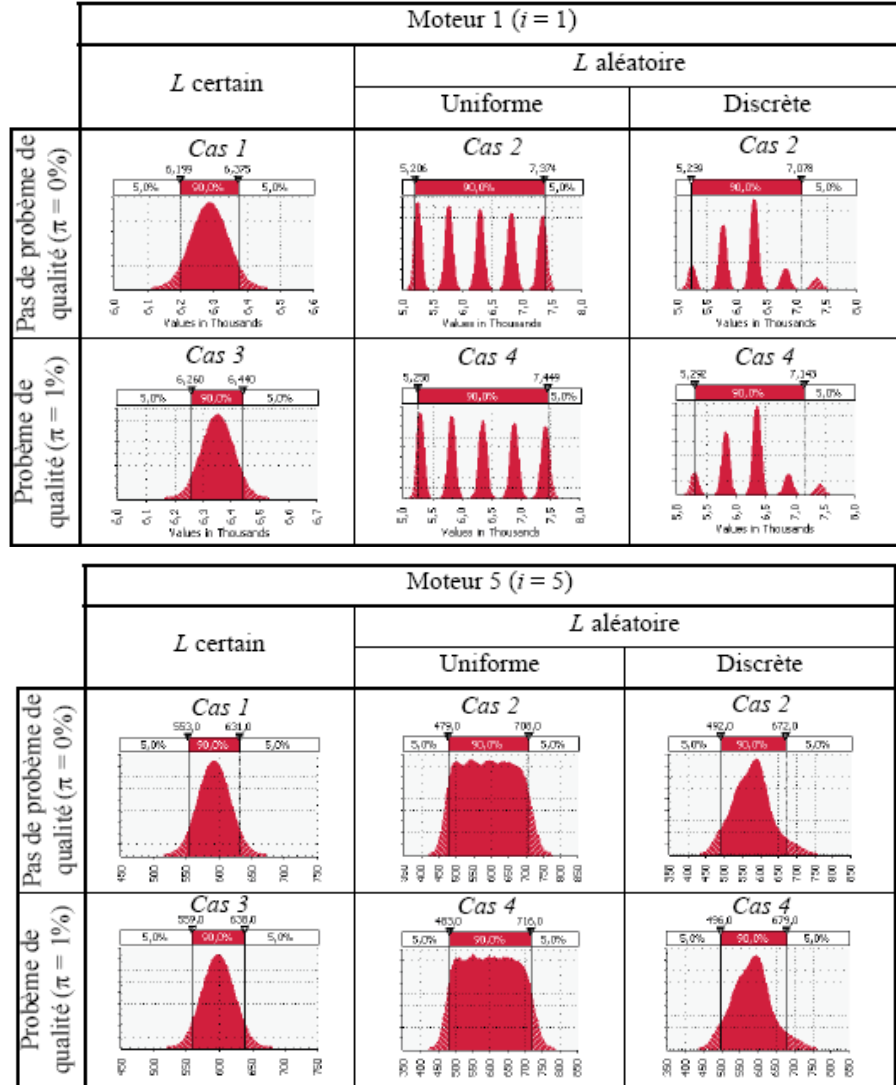


Figure 1. Distributions de probabilité du moteur 5 pour une durée certaine ($L = 12$) ou aléatoire $L \sim \mathcal{U}(10, 14)$ ou $L \sim \mathcal{D}\{[10, 10\%], [11, 30\%], [12, 45\%], [13, 10\%], [14, 5\%]\}$ et avec ($\pi = 1\%$) ou sans ($\pi = 0\%$) problème de qualité

3.2.1.2. Cas 2 – délai aléatoire & qualité garantie

Supposons à présent que le délai d'obtention L soit aléatoire. La loi de la demande de X_{iL} suit la loi Binomiale $\mathcal{B}(962, L, p_i)$, le nombre d'épreuves étant maintenant une variable aléatoire. La détermination de cette distribution de

probabilités est compliquée analytiquement même dans le cas relativement simple traité ici, on approchera empiriquement cette distribution en utilisant l'approche de Monte Carlo¹. Le tableau 4 donne les principaux paramètres de ces distributions et quelques fractiles pour $\alpha = 0,01\%$ (pour ce cas 2 et les suivants), en combinant les 3 hypothèses relatives au délai L et 2 hypothèses de qualité des composants livrés.

		Moteur 1 ($i = 1$)						Moteur 5 ($i = 5$)					
		Sans problème			Avec problème			Sans problème			Avec problème		
		cas 1	cas 2		cas 3	cas 4		cas 1	cas 2		cas 3	cas 4	
Durée L		12	$\sim \mathcal{N}$	$\sim \mathcal{D}$	12	$\sim \mathcal{N}$	$\sim \mathcal{D}$	12	$\sim \mathcal{N}$	$\sim \mathcal{D}$	12	$\sim \mathcal{N}$	$\sim \mathcal{D}$
Moyenne		6287	6287	6130	6350	6350	6192	592	592	577	598	598	583
Ecart-Type		54	743	503	55	750	508	24	74	53	24	74	53
Fractiles R_{iL} à	5%	6199	5206	5239	6260	5258	5292	553	479	492	559	483	497
	10%	6218	5239	5484	6280	5292	5541	562	493	510	567	498	515
	90%	6355	7335	6811	6420	7409	6880	623	692	644	629	699	651
	95%	6375	7374	7064	6440	7449	7140	631	708	672	638	716	679
	99%	6411	7430	7383	6477	7506	7458	648	733	713	655	741	720
	99,9%	6452	7483	7453	6519	7560	7530	667	758	744	674	766	752
	99,99%	6486	7525	7503	6553	7602	7580	682	777	766	690	785	775

Tableau 4. Caractéristiques des distributions de probabilités des X_{iL} avec $X_{iL} \sim \mathcal{B}(962L, p_i)$ et $L = 12$ ou $L \sim \mathcal{N}(10, 14)$ ou $L \sim \mathcal{D}\{[10, 10\%], [11, 30\%], [12, 45\%], [13, 10\%], [14, 5\%]\}$ et des distributions de probabilité des Y_{iL} , avec $Y_{iL} = X_{iL} + \mathcal{BN}(X_{iL}; 1-\pi)$

Les distributions de probabilités des moteurs 1 et 5 sont illustrées à la figure 1. On observe sur l'ensemble des moteurs (même si deux seulement sont repris ici) que le caractère multimodal de ces distributions est d'autant plus accentué que la probabilité p_i de montage du moteur i est forte (ces 5 modes sont liés au fait que la distribution discrète des durées comporte 5 valeurs).

3.2.1.3. Cas 3 et 4 – délai certain ou aléatoire & qualité non garantie

La possibilité que le composant livré ne soit pas considéré comme conforme au montage avec une probabilité π ($=1\%$) conduit à faire appel à la variable aléatoire Z_{iL} qui suit une loi Binomiale Négative. Pour illustrer la démarche suivie dans l'utilisation de cette loi, on commencera par retenir une occurrence arbitraire de la variable aléatoire X_{iL} , pour le composant $i = 5$ et une durée certaine de période $L = 12$; la valeur choisie est $x_{5,12} = 750$. Pour maîtriser le risque de ne pas couvrir cette demande de 750, il faut disposer d'une quantité complémentaire $z_{5,12}$, d'où un disponible de $750 + z_{5,12}$ pièces. Le nombre de pièces non conformes dans ce disponible suit la loi Binomiale $\mathcal{B}(750 + z_{5,12}, \pi)$. La probabilité d'avoir dans ce lot moins de 750 pièces conformes peut se calculer à partir de la loi Binomiale pour

¹ L'add-in d'Excel, @Risk, a été utilisé pour toutes les simulations réalisées dans article. Le risque retenu étant très faible, un jeu de deux millions de simulations a été systématiquement retenu pour reconstituer les distributions de probabilités et calculer des espérances mathématiques.

différentes valeurs de $z_{5,12}$ mais il est plus simple de faire directement appel à la loi Binomiale négative $\mathcal{BN}(750, 99\%)$ dont la probabilité cumulée $P(Z_{5,12} \leq z_{5,12})$ correspond à la probabilité d'avoir au plus $z_{5,12}$ pièces non conformes dans un lot de $750 + z_{5,12}$ pièces. Cette distribution est retracée dans le tableau 5.

z	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$P(Z=z)$	0,1%	0,4%	1,5%	3,8%	7,1%	10,7%	13,4%	14,5%	13,7%
$P(Z \leq z)$	0,1%	0,5%	2,0%	5,7%	12,8%	23,5%	36,9%	51,4%	65,1%
$P(Z > z)$	99,9%	99,5%	98,0%	94,3%	87,2%	76,5%	63,1%	48,6%	34,9%
z	9	10	11	12	13	14	15	16	17
$P(Z=z)$	11,6%	8,8%	6,1%	3,8%	2,3%	1,2%	0,6%	0,3%	0,1%
$P(Z \leq z)$	76,7%	85,5%	91,5%	95,4%	97,6%	98,8%	99,5%	99,8%	99,9%
$P(Z > z)$	23,3%	14,5%	8,5%	4,6%	2,4%	1,2%	0,5%	0,2%	0,1%

Tableau 5. Distribution de probabilités de la loi Binomiale Négative $\mathcal{BN}(750, 99\%)$

Si l'on refuse de courir un risque α supérieur à 1 % de ne pas être en mesure de satisfaire une demande de 750, il convient alors de disposer de 765 unités¹. Si la demande à couvrir est inférieure à 750, il est évident que le risque encouru en disposant de 765 unités est inférieur à 1 % et est d'autant plus faible que cette demande à couvrir est faible. La demande à couvrir X_{iL} étant aléatoire, il convient alors de s'intéresser à la distribution de $Y_{iL} = X_{iL} + Z_{iL}$, où X_{iL} suit la loi Binomiale $\mathcal{B}(nL, p_i)$, où L est une variable certaine ou aléatoire discrète et Z_{iL} suit la loi Binomiale négative $\mathcal{BN}(X_{iL}, \pi_i)$. Une illustration numérique de cette distribution Y_{iL} est donnée au tableau 4 et dans la figure 1. Dans cet exemple numérique, si l'on refuse de courir un risque α supérieur à 0,1 % de ne pas être en mesure de satisfaire la demande il faut disposer de 674 unités, contre 667 en l'absence de problème de qualité lorsque la période de référence est de 12 jours ; si cette période de référence est aléatoire, il faut disposer de 766 unités contre 758 si $L \sim \mathcal{U}[10, 14]$ et de 752 unités contre 744 si L suit la loi discrète retenue en exemple.

¹ On notera que cette démarche est celle qu'il convient de retenir si la demande à couvrir est certaine, comme c'est le cas de composants systématiquement montés sur tous les produits passant sur une ligne d'assemblage, dès lors que la qualité n'est pas garantie. Comme le nombre de composants défectueux varie d'une livraison à une autre, le problème de qualité conduit à mobiliser une politique calendaire d'approvisionnement. Par exemple, si la production quotidienne d'une ligne d'assemblage est de 750 unités, chacune ayant 1% de chance d'être défectueuse et si la commande passée en fin de journée est livrée en début de journée suivante, l'approvisionnement doit se faire sur la base d'un reemplètement quotidien du stock à 765 unités pour limiter à 1% le risque d'arrêt de la ligne en raison d'une rupture de stock de ce composant, induite par un problème de qualité.

3.3. Incidence du risque de rupture d'approvisionnement retenu et de la variabilité de la demande sur le stock de sécurité

En gestion calendaire, le stock de sécurité se définit comme la différence entre le niveau de reapprovisionnement, qui est le fractile $R_{iL\alpha}$ associé à un risque α prédéterminé, et la demande moyenne de la distribution sur laquelle le fractile a été défini. D'une manière générale, le stock de sécurité varie dans le même sens que le coefficient de variation (rapport de l'écart-type de la distribution de la demande à sa moyenne) et en sens inverse du risque accepté. On va établir ici des relations spécifiques au cas étudié d'approvisionnement de composants alternatifs dans une chaîne logistique dédiée à une production de masse de produits fortement diversifiés. Le cas traité implicitement ici est celui de l'approvisionnement d'un composant auprès d'un fournisseur pour couvrir des besoins connus seulement en probabilité lors de la passation de commande.

En s'intéressant à l'approvisionnement d'un composant alternatif ou optionnel monté sur un poste d'une ligne d'assemblage, on est amené à utiliser la distribution Binomiale $\mathcal{B}(nL, p_i)$. Sous certaines conditions (Giard, 2003a), facilement vérifiées si nLp_i a une valeur suffisamment élevée (ce qui est habituellement le cas dans les CLA), cette distribution peut être approximée par la distribution Normale $\mathcal{N}(nLp_i, \sqrt{p_i(1-p_i)nL})$. Avec la définition de la variable centrée réduite t_α associée au risque α , le fractile $R_{iL\alpha}$ est lié à t_α , à l'espérance mathématique de la distribution et à son écart-type par la relation [1].

$$R_{iL\alpha} = nLp_i + t_\alpha \sqrt{nLp_i(1-p_i)} \quad [1]$$

Le stock de sécurité $SS_{iL\alpha} = R_{iL\alpha} - nLp_i$ est alors défini par la relation [2].

$$SS_{iL\alpha} = t_\alpha \sqrt{nLp_i(1-p_i)} \quad [2]$$

Dans l'industrie, on utilise assez souvent le concept de coefficient de sécurité qui est la constante par laquelle il convient de multiplier la demande moyenne pour calculer le stock de sécurité. Il est intéressant de l'exprimer comme une fonction du coefficient de variation, rapport de l'écart-type à la moyenne, c'est-à-dire ici $\sqrt{p_i(1-p_i)nL} / nLp_i = \sqrt{(1-p_i)/(nLp_i)}$. La valeur de ce coefficient de sécurité est alors $t_\alpha \sqrt{(1-p_i)/(nLp_i)}$; elle varie en sens inverse de la probabilité de montage du composant alternatif, du risque accepté et de la production totale sur la période considérée. La relation [3] résume ces relations.

$$R_{iL} = nLp_i + t_\alpha \sqrt{nLp_i(1-p_i)} = nLp_i \left(1 + t_\alpha \sqrt{\frac{1-p_i}{nLp_i}} \right) \quad [3]$$

i	$i = 1$ (Moteur 1; $p_i = 54,46\%$)					$i = 5$ (Moteur 5; $p_i = 5,13\%$)				
L	1	3	5	12	30	1	3	5	12	30
962L	962	2886	4810	11544	28860	962	2886	4810	11544	28860
962Lp _i	523,9	1572	2620	6287	15717	49,4	148,1	246,8	592,2	1480,5
R _{iLα}	581	1671	2748	6486	16032	77	194	306	682	1622
SS _{iLα}	57,1	99,3	128,5	199,1	314,8	27,6	45,9	59,2	89,8	141,5
C. Sec.	10,9%	6,3%	4,9%	3,2%	2,0%	56,0%	31,0%	24,0%	15,2%	9,6%

Tableau 6. Évolution des coefficients de sécurité (C. Sec.) pour les moteurs 1 et 5 en fonction de L , avec $\alpha = 0,01\%$

L'usage fréquent dans l'industrie d'une règle fixant les stocks de sécurité par le biais d'un coefficient empirique imposé pour un ensemble de références aboutit mécaniquement à des risques de rupture de stock variables d'une référence à une autre pour une même production totale. Le tableau 6 retrace l'évolution des stocks de sécurité et des coefficients de sécurité pour les moteurs 1 et 5, une production quotidienne de 962 véhicules, quelques valeurs comprises entre 1 et 30 du nombre L de jours de définition de la demande à prendre en considération et une probabilité de rupture de stock limitée à 0,01 %.

3.4. Stock de sécurité et stock résiduel moyen avant livraison

Si la probabilité de rupture de stock avant livraison est faible, ce qui est normalement le cas dans les politiques d'approvisionnement des CLA, l'espérance mathématique de cette rupture de stock est également faible, ce qui conduit le stock de sécurité à être très peu différent de l'espérance mathématique du stock résiduel avant réception d'une livraison. En effet, de manière générale l'espérance mathématique $I_p(R_{iL\alpha})$ du stock résiduel à la fin de la période sur laquelle s'exprime la demande X que l'on cherche à satisfaire avec le stock initial $R_{iL\alpha}$ est donnée par la relation¹ [4] dans laquelle interviennent l'espérance mathématique $I_r(R_{iL\alpha})$ de la rupture de stock et l'espérance mathématique de la demande exprimée $E(X_L)$. Cette relation [4] est valable quelle que soit la distribution de probabilité de X_L .

$$I_p(R_{iL\alpha}) = R_{iL\alpha} - E(X_L) + I_r(R_{iL\alpha}) \quad [4]$$

Lorsque la probabilité de rupture est négligeable, $I_r(R_{iL\alpha})$ est voisin de 0. Le stock résiduel moyen $I_p(R_{iL\alpha})$ est alors très peu différent de $R_{iL\alpha} - E(X_L)$, c'est-à-dire du stock de sécurité. Stock résiduel moyen et rupture moyenne de stock varient en sens inverse et font peser sur l'entreprise respectivement un coût de possession et un coût de rupture. Dans le cas d'une loi Normale, l'espérance mathématique $I_r(R_{iL\alpha})$ de la rupture de stock est donnée² par la relation [5] dans laquelle les

¹ Voir V. Giard, *Gestion de la production et des flux*, Economica, 3^e édition, p.670.

² Voir V. Giard, *Gestion de la production et des flux*, Economica, 3^e édition, p.675.

indices i , L et α sont omis. Le tableau 7 donne les ruptures de stock moyennes et les stocks résiduels moyens pour le moteur 1, pour différents niveaux de reapprovisionnement associés à plusieurs risques de rupture et 2 périodes différentes de production (1 jour et 12 jours).

$$I_r(R) = \sigma[f(t_R) - t_R P(t > t_R)], \text{ avec } t_R = (R - \bar{x})/\sigma \text{ et } f(t_R) = e^{-t_R^2/2}/\sqrt{2\pi} \quad [5]$$

Cette relation [5] est utilisée dans le tableau 7 pour calculer les ruptures moyennes de stock et les stocks résiduels moyens pour le moteur 1, pour différents niveaux de reapprovisionnement associés à plusieurs risques de rupture et 2 périodes différentes de production (1 jour et 12 jours), étant entendu que l'approximation de Binomiale par la loi Normale est possible dans ces deux cas.

		$L = 1 \rightarrow nL = 962$			$L = 12 \rightarrow nL = 11544$		
		$R_{iL\alpha}$	$I_r(R_{iL\alpha})$	$I_p(R_{iL\alpha})$	$R_{i2L\alpha}$	$I_r(R_{i2L\alpha})$	$I_p(R_{i2L\alpha})$
α	5,00%	549	0,32272	25,41752	6375	1,1179	89,2555
	1,00%	560	0,0523	36,1471	6411	0,1813	124,3189
	0,10%	572	0,0043	48,0991	6452	0,0148	165,1524
	0,01%	581	0,0004	57,0952	6486	0,0013	199,1389

Tableau 7. Évolution de la rupture moyenne de stock $I_r(R_{iL\alpha})$ et du stock résiduel moyen $I_p(R_{iL\alpha})$ pour différents risques α et deux longueurs de période différentes

4. Stock de sécurité de composants approvisionnés

La commande q_{jt} du composant j passée par le maillon B à son fournisseur A au début du jour t est à livrer au début du jour $t + D_j$ avec un délai de mise à disposition D_j et un délai de livraison λ_j ($\lambda_j \leq D_j$). La position de stock PS_{jt} au début du jour t est la somme du stock observé S_{jt} et des k_j commandes en attente de livraison, augmentée des demandes non satisfaites différées. Si la probabilité de rupture est faible, comme c'est normalement le cas dans la politique d'approvisionnement de la CLA, l'impact des demandes non satisfaites (différées ou perdues) peut être négligé. Le nombre k_j de commandes en attente est nul si la période de révision calendaire est plus grande que le délai de mise à disposition ($\theta_j > D_j$) et positif dans le cas contraire. Dans ce dernier cas, on a $k_j = \arg \max(K | K \leq D_j / \theta_j)$. D'une manière générale, la position de stock à la commande est définie par la relation [6].

$$PS_j = S_j + \sum_{h=1}^{k_j} q_{j,t-h\theta}, \text{ avec } k_j = \arg \max(K | K \leq D_j / \theta_j) \quad [6]$$

On commencera par étudier la situation caractérisée par un horizon de planification P_j du client B inférieur ou égal au délai de mise à disposition D_j négocié avec le fournisseur A ($P_j \leq D_j$). Dans ce cas, la commande se fonde entièrement sur une connaissance statistique des besoins et le client B n'a aucun intérêt à négocier un délai de mise à disposition supérieur au délai de livraison car

dans le cas contraire, à risque identique, son stock de sécurité est plus important ($\rightarrow D_j = \lambda_j > P_j$).

On examinera ensuite le cas où $P_j > D_j$. Si $\theta_j > P_j - D_j$, la commande passée peut se fonder en partie sur des besoins connus. Il est évident que, dans le cas contraire ($\theta_j \leq P_j - D_j$), la commande est déterminée par les besoins certains à couvrir et qu'aucun stock de sécurité n'est nécessaire.

Dans ces deux premiers cas étudiés, on fait l'hypothèse qu'aucune contrainte de lotissement n'intervient dans la définition de la commande à passer. L'approvisionnement est alors qualifié d'unitaire. On traitera ensuite (§4.3) la prise en compte de la contrainte de lotissement sur les composants approvisionnés pour terminer (§4.4) par la prise en compte de la contrainte de capacité du transport utilisé.

Implicitement, on s'intéresse dans ce qui suit – au moins dans un premier temps – à un système dans lequel le composant j est demandé pour permettre la production d'un ou plusieurs composants alternatifs i demandés par le client C dont la production quotidienne est n . On lèvera cette hypothèse restrictive dans un second temps. Dans tous les cas de figure, on supposera que le risque de rupture de stock accepté α est prédéterminé et très faible.

4.1. Approvisionnements unitaires – demande uniquement stochastique

L'analyse qui vient d'être faite de cette situation conduit à utiliser une distribution de probabilités définie sur la période $\theta + \lambda$ et donc la loi $\mathcal{B}[n(\theta_j + \lambda_j), p_j]$. Si l'approximation Normale est possible, on utilise la distribution $\mathcal{N}[n(\theta_j + \lambda_j)p_j, \sqrt{n(\theta_j + \lambda_j)p_j(1-p_j)}]$. Dans ce cadre, l'adaptation des relations [1] et [2] conduit aux relations [7] et [8] de définition du niveau de recomplètement et du stock de sécurité.

$$R_{j,\theta+\lambda,\alpha} = n(\theta_j + \lambda_j)p_j + t_\alpha \sqrt{n(\theta_j + \lambda_j)p_j(1-p_j)} \quad [7]$$

$$SS_{j,\theta+\lambda,\alpha} = t_\alpha \sqrt{n(\theta_j + \lambda_j)p_j(1-p_j)} \quad [8]$$

Illustrons l'application de ces principes par un exemple numérique portant sur l'approvisionnement d'un carter C_1 qui n'est monté que sur le moteur M_1 ($p_1 = 54,46\%$). Supposons qu'une commande soit passée tous les deux jours ($\theta = 2$, les commandes étant passées les numéros de jour pairs) en fin de journée t sur la base de la différence entre le niveau de recomplètement R_{jt} et la position de stock PS_{jt} . Par ailleurs, supposons que le délai d'obtention soit de 10 jours ($\lambda = 10$). Dans ce contexte, la distribution de probabilité à utiliser est définie sur $\theta_j + \lambda_j = 12$ jours, ce qui conduit à la loi Binomiale $\mathcal{B}(12 \times 962 ; 0,5446)$. Pour un risque de rupture $\alpha = 0,01\%$, le niveau de recomplètement est $R_1 = 6\,486$ (voir tableau 3). Le tableau 8 illustre l'utilisation de cette politique d'approvisionnement sur 24 jours, avec des demandes générées aléatoirement.

Cet exemple numérique appelle deux commentaires pour une bonne compréhension du mécanisme d'approvisionnement simulé.

– Aux jours 3 et 4, le cumul des commandes en attente de livraison (5 201) correspond aux livraisons qui seront faites au jour 13 (1050, commande du jour 2), au jour 11 (1037, commande du jour -1), au jour 9 (1026, commande du jour -3), au jour 7 (1057, commande du jour -5) et au jour 5 (1031, commande du jour -7).

– On vérifie également la propriété énoncée au § 3.1 selon laquelle, en régime de croisière, la commande passée correspond au cumul des demandes observées depuis la précédente passation de commande ($q_4 = 1\,047 = D_3 + D_4 = 516 + 531$; $q_6 = 1\,029 = D_5 + D_6 = 511 + 518$; etc.). Les commandes passées sont bien des réalisations de variables aléatoires indépendantes.

Si le délai d'obtention est aléatoire et ou si la qualité n'est pas garantie à la livraison, on doit travailler sur une distribution générée par la méthode de Monte Carlo, comme on l'a présenté au § 3.1 pour déterminer le niveau de reapprovisionnement associé au risque α . La lecture du tableau 4 montre qu'en retenant toujours un risque de 0,01 % de rupture de stock, le niveau de reapprovisionnement du moteur 1 doit passer de 6 486 à :

– 7525, si λ_1 est aléatoire et suit la distribution uniforme discrète $\mathcal{U}(8, 12)$, $\Rightarrow \theta + \lambda_1 \sim \mathcal{U}(10, 14) \rightarrow cas\ 2$. Notons que dans cet exemple, il y a peu de chances pour que les livraisons se fassent dans l'ordre des commandes, ceci n'a pas d'impact sur le risque encouru et la détermination de la quantité à commander puisque dans le calcul de la position de stock, l'arrivée précoce d'une livraison augmente d'autant le stock physiquement détenu et, simultanément, diminue d'autant le cumul des livraisons attendues ;

– 6 553, si les pièces ne sont pas toutes bonnes ($\pi_1=1\%$; $\lambda_1=12$) $\rightarrow cas\ 3$;

– 7 602, si les pièces ne sont pas toutes bonnes et si, en outre, λ_1 est aléatoire ($\pi_1=1\%$; $\theta + \lambda_1 \sim \mathcal{U}(10, 14)$) $\rightarrow cas\ 4$

jour t	Livraison	Stock début	Demande	Stock fin	En attente de livraison	PS	Commande à passer au début de $t+1$
1	1038	1270	520	750	5194	5944	
2		750	508	242	5194	5436	1050
3	1043	1285	516	769	5201	5970	
4		769	531	238	5201	5439	1047
5	1031	1269	511	758	5217	5975	
6		758	518	240	5217	5457	1029
7	1057	1297	534	763	5189	5952	
8		763	500	263	5189	5452	1034
9	1026	1289	514	775	5197	5972	
10		775	550	225	5197	5422	1064
11	1037	1262	524	738	5224	5962	
12		738	555	183	5224	5407	1079
13	1050	1233	510	723	5253	5976	
14		723	526	197	5253	5450	1036
15	1047	1244	544	700	5242	5942	
16		700	509	191	5242	5433	1053
17	1029	1220	526	694	5266	5960	
18		694	520	174	5266	5440	1046
19	1034	1208	549	659	5278	5937	
20		659	527	132	5278	5410	1076
21	1064	1196	510	686	5290	5976	
22		686	521	165	5290	5455	1031
23	1079	1244	549	695	5242	5937	
24		695	530	165	5242	5407	1079

Tableau 8. Simulation de la politique d'approvisionnement des carters avec conditionnement unitaire – commande passée tous les 2 jours – délai d'obtention de 10 jours

Le cas 3 est illustré par la simulation du tableau 9 qui reprend les mêmes demandes à satisfaire. Une colonne « livraison correcte » a été introduite : elle diminue la quantité livrée d'un nombre de pièces mauvaises, générées aléatoirement à partir d'une loi Binomiale dont le nombre d'épreuves correspond au nombre de pièces livrées, chacune ayant la même probabilité π_1 ($= 1\%$) de ne pas passer le contrôle (c'est aussi la probabilité utilisée dans la génération de la variable aléatoire Z suivant la loi Binomiale Négative). Le stock initial et les premières livraisons attendues ont été définis arbitrairement en tenant compte de ce problème de qualité ; ces données diffèrent donc de celle du tableau 8, dont on a conservé que les demandes.

Dans cette simulation, le contrôle de qualité est réputé être effectué à la réception (colonne « livraison correcte »). La simulation d'un contrôle de qualité fait au montage n'est guère plus compliquée. Dans ce cas, la colonne « livraison

correcte » disparaît et le stock disponible peut comporter des pièces non conformes tout comme les livraisons attendues. Il faut alors introduire dans l'équation de conservation des stocks une consommation additionnelle de pièces rejetées, obtenue comme une occurrence d'une variable aléatoire suivant une loi Binomiale Négative ayant pour arguments la demande de la journée considérée et π_1 .

jour t	Livraison	Livraison correcte	Stock début correct	Demande	Stock fin	En attente de livraison	PS	Commande à passer au début de $t+1$
1	1053	1043	1275	520	755	5251	6006	
2			755	508	247	5251	5498	1055
3	1051	1040	1287	516	771	5255	6026	
4			771	531	240	5255	5495	1058
5	1041	1031	1271	511	760	5272	6032	
6			760	518	242	5272	5514	1039
7	1066	1056	1298	534	764	5245	6009	
8			764	500	264	5245	5509	1044
9	1045	1037	1301	514	787	5244	6031	
10			787	550	237	5244	5481	1072
11	1048	1039	1276	524	752	5268	6020	
12			752	555	197	5268	5465	1088
13	1055	1039	1236	510	726	5301	6027	
14			726	526	200	5301	5501	1052
15	1058	1052	1252	544	708	5295	6003	
16			708	509	199	5295	5494	1059
17	1039	1028	1227	526	701	5315	6016	
18			701	520	181	5315	5496	1057
19	1044	1036	1217	549	668	5328	5996	
20			668	527	141	5328	5469	1084
21	1072	1061	1202	510	692	5340	6032	
22			692	521	171	5340	5511	1042
23	1088	1082	1253	549	704	5294	5998	
24			704	530	174	5294	5468	1085

Tableau 9. Simulation de la politique d'approvisionnement des carter avec conditionnement unitaire – commande passée tous les 2 jours – délai d'obtention de 10 jours – probabilité de 1 % de rejet d'une pièce au contrôle qualité

Du point de vue du pilotage de la chaîne logistique, deux observations importantes doivent être faites.

– Si tous les composants alternatifs montés sur un même poste de travail du client final C sont approvisionnés auprès d'un fournisseur unique B, la demande quotidienne totale de composants alternatifs est constante (n), les variables aléatoires Binomiales étant liées par une loi Multinomiale. Les quantités commandées périodiquement le sont aussi (θn). A son tour, le maillon B peut s'approvisionner en composants alternatifs j (tous les moteurs ont un carter, une même référence de carter pouvant être utilisée par plusieurs moteurs). S'il le fait auprès du même fournisseur, on retrouve la propriété de constance des quantités

commandées au fournisseur. A contrario, le partage de l'approvisionnement de composants alternatifs entre plusieurs fournisseurs induit pour chacun d'entre eux un volume périodique aléatoire de commandes à satisfaire. Cette fluctuation de charge rend plus difficile les engagements capacitaires du fournisseur et a de fortes chances d'induire des charges supplémentaires.

– Dans une perspective similaire, le maillon B peut non seulement n'approvisionner son client C que sur une partie des références qu'il produit, ce qui conduit à un volume aléatoire des commandes reçues de son client comme on vient de le voir, mais il peut en outre approvisionner d'autres clients sur des références communes, ce qui accroît la variabilité de la demande à satisfaire par B. La détermination de la distribution de demande du composant j , utilisé par des références achetées par les différents clients de B est inextricable analytiquement mais ne pose aucun problème avec une simulation de Monte-Carlo. Supposons que le composant j étudié soit monté sur le même composant fabriqué par le maillon B pour 3 chaînes d'assemblage. La première a une demande quotidienne qui suit la loi $\mathcal{S}(962; 54,62\%)$, la deuxième, la loi $\mathcal{S}(425; 17,23\%)$ et la dernière, la loi $\mathcal{S}(610; 5\%)$. L'utilisation de la méthode de Monte Carlo¹ pour générer la distribution de probabilité de la somme de ces 3 demandes conduit à un fractile de 7 765 pour un risque de 0,01 %. Le passage par la simulation est incontournable si l'on s'intéresse aux cas 2, 3 et 4 identifiés au § 3.2.1. Ajoutons qu'en cas de problème de qualité, la génération de la variable aléatoire Z doit, bien évidemment, s'appuyer sur le cumul des demandes générées pour ces trois clients.

4.2. Approvisionnements unitaires – demande mixte stochastique / déterministe

Examinons maintenant la situation caractérisée par un horizon de planification P_j du client B excédant le délai de mise à disposition D_j négocié avec son fournisseur A, de moins de θ_j jours ($\theta_j > P_j - D_j > 0$). On suppose dans un premier temps que le délai d'obtention est certain et qu'il n'y a pas de problème de qualité ; ce délai de mise à disposition D_j peut être égal au délai d'obtention λ_j . Au moment de la passation de la commande au début du jour t , pour une livraison à la fin du jour $t + D_j$ (destinée à couvrir les besoins des jours suivants), le client B connaît avec certitude les besoins des périodes $t + D_j - 1$ à $t + P_j - 1$, ce qui correspond aux besoins de $P_j - D_j$ jours. Par exemple, avec $D_j = 10$, $P_j = 12$ et $\theta = 5$, la commande passée au début du jour $t = 1$ sera livrée à la fin du jour $t = 10$. Elle est destinée à satisfaire les besoins des périodes $t = 11$ à $t = 15$, sachant que les besoins des jours 11 et 12 sont certains et ceux des 3 jours suivants, inconnus.

La commande passée en t est la somme :

¹On peut remarquer que, dans cet exemple numérique, l'approximation Normale des lois Binomiales de chacune des demandes était possible, ce qui donne, pour la demande cumulée, une loi $\mathcal{N}(7531,6; 62,8)$ conduisant au même fractile.

– D’une quantité certaine $\sum_{h=t+D_j-1}^{h=t+P_j-1} x_{jh}$ égale à la demande des $P_j - D_j$ premiers jours suivant la livraison à la fin du jour $t + D_j$.

– D’une quantité égale à la différence entre un niveau de reapprovisionnement déterminé pour faire face, avec un risque α prédéterminé, à une demande aléatoire qui est définie sur une période couvrant le délai de mise à disposition D_j augmenté de la durée pendant laquelle la demande n’est pas connue $(\theta_j - (P_j - D_j))$. Le fait que cette absence d’information ferme concerne les jours précédant la prochaine livraison plutôt que ceux suivant la livraison visée par cette commande, n’a pas d’incidence. La période de référence est donc $\theta_j + 2D_j - P_j$, dans notre exemple numérique, cette période de référence est donc de 13 jours. Le niveau de reapprovisionnement est le fractile $R_{j,\theta+2D_j-P_j,\alpha}$ d’une distribution de probabilités définie sur la période $\theta_j + 2D_j - P_j$ ce qui donne la loi $\mathcal{B}(n(\theta_j + 2D_j - P_j), p_j)$. Si l’approximation Normale est possible, on a recours à la distribution $\mathcal{N}[n(\theta_j + 2D_j - P_j)p_j, \sqrt{n(\theta_j + 2D_j - P_j)p_j(1-p_j)}]$ et on peut utiliser la relation [9]. Si on exclut la possibilité de demandes non satisfaites perdues, cette différence est nécessairement égale au cumul de la demande observée sur les $\theta_j - P_j + D_j$ derniers jours précédant le jour t , c’est-à-dire $\sum_{h=t-\theta_j+P_j-D_j}^{h=t-1} x_{jh}$. La relation [10] résume la détermination de la commande à passer, en régime de croisière, dans le cas d’une demande mixte stochastique / déterministe.

$$R_{j,\theta+D_j-P_j,\alpha} = n(\theta_j + 2D_j - P_j)p_j + t_\alpha \sqrt{n(\theta_j + 2D_j - P_j)p_j(1-p_j)} \text{ si approximation Normale possible et } \theta > P_j - D_j > 0 \quad [9]$$

$$q_{jt} = \sum_{h=t+D_j-1}^{h=t+P_j-1} x_{jh} + \sum_{h=t-\theta_j+P_j-D_j}^{h=t-1} x_{jh} \quad [10]$$

Comme précédemment, la prise en compte des problèmes de qualité (*cas 3*) oblige à utiliser la simulation pour établir la distribution de probabilités de référence nécessaire à la détermination du fractile cherché. Pour définir la variable Z_j , qui suit une loi Binomiale Négative, il faut tenir compte du fait que le problème de qualité se pose sur la totalité de la commande qui est la somme d’une demande aléatoire et de commandes fermes. En régime de croisière, ces commandes fermes sont des variables aléatoires qui suivent une loi Binomiale de même probabilité que celle utilisée pour faire face aux besoins aléatoires pris en compte dans la commande. Il convient donc d’utiliser la distribution de référence donnée par la relation [11] pour déterminer le fractile $R_{j,\theta_j+2D_j-P_j,\alpha}$.

$$Y_j = X_j + Z_j, \text{ avec } X_j \sim \mathcal{B}(n(\theta_j + 2D_j - P_j), p_j) \text{ et } Z_j \sim \mathcal{BN}(X_j, \pi_j) \quad [11]$$

Dans notre exemple numérique, avec $D_j = 10$, $\theta = 5$ et $P_j = 12$, la période de référence est de $\theta + 2D_j - P_j = 13$ jours, d’où $X_1 \sim \mathcal{B}(12\ 506 ; 54,46\%)$. Le fractile

$R_{1;13;0,01\%}$ de Y_1 déterminé sur une simulation de cette distribution par la méthode de Monte Carlo est de 7 091 unités, le stock de sécurité s'élevant à 212.

Supposons maintenant que le délai d'obtention λ_j soit aléatoire et la qualité des articles livrés garantie ($\rightarrow$ cas 2). La commande passée au début du jour t vise toujours à couvrir les besoins des jours $t + D_j - 1$ à $t + \theta_j - 1$, sur lesquelles les demandes de $P_j - D_j$ jours sont connues avec certitude. En régime de croisière, ces besoins correspondent à une couverture d'un cumul de demandes quotidiennes suivant la même distribution que celle des autres jours (c'est-à-dire $\mathcal{B}(n, j)$). Il s'ensuit que la période de référence de la distribution à utiliser pour déterminer le niveau de reapprovisionnement est la somme du délai d'obtention aléatoire λ_j et de la durée pendant laquelle la demande n'est pas connue entre la livraison de la commande à émettre et la livraison suivante, c'est-à-dire : $(\theta_j - (P_j - D_j))$. Supposons que λ_j suive la loi uniforme discrète $\mathcal{U}(4; 8)$ et que la période de révision calendaire θ_j soit de 8 jours, que $P_j = 14$ et $D_j = 12$ (d'où $(\theta_j - (P_j - D_j)) = 6$). La période de référence $L_j = \lambda_j + 6$ suit alors la loi uniforme discrète $\mathcal{U}(10; 14)$, la demande X_{1L} du composant 1 suit la loi Binomiale $\mathcal{B}(962L; 54,46\%)$ étudiée en colonne 3 du tableau 4, ce qui conduit à un niveau de reapprovisionnement de 7 525 unités.

Supposons qu'en outre on ait un problème de qualité ($\rightarrow$ cas 4), avec $\pi_1 = 1\%$ de chance de ne pas être conforme. La variable aléatoire de référence Y_1 est traitée dans la colonne 6 du tableau 4, ce qui conduit à un niveau de reapprovisionnement de 7 602.

4.3. Approvisionnements par lot

Dans la pratique, l'approvisionnement externe dépend souvent de contraintes de lotissement qui font que toute commande passée est nécessairement un multiple du nombre κ d'unités du conditionnement utilisé en transport. Ce cas de figure est pris en compte dans les modèles de gestion des stocks : la solution analytique se caractérise alors par une double inégalité portant sur les probabilités cumulées de deux valeurs discrètes successives multiples de κ devant encadrer une probabilité-cible optimale dépendant de la structure relative des coûts pris en compte dans la fonction-objectif du modèle. Pour l'approvisionnement d'une chaîne logistique – amont, nous avons privilégié l'utilisation d'un risque α à ne pas dépasser. Ce qui suit est valable dans les 4 cas introduits au tableau 1.

– Si la commande passée est ramenée au multiple le plus faible de κ respectant la condition d'une probabilité de rupture inférieure à α , c'est-à-dire $q_j^{\sup} = \kappa \cdot \arg \min(K | K \geq (R_j - PS_j) / \kappa)$, la protection contre la rupture de stock peut être jugée excessive ;

– Si la commande passée est ramenée au multiple le plus fort de κ respectant la condition d'une probabilité de rupture supérieure à α , c'est-à-dire $q_j^{\inf} = \kappa \cdot \arg \max(K | K \leq (R_j - PS_j) / \kappa)$, la protection contre la rupture de stock peut être jugée insuffisante.

Reprenons l'exemple du tableau 8 (λ certain et $\pi = 0\%$) et supposons maintenant que le composant 1 approvisionné (carter, par exemple) soit transporté par conteneur de $\kappa = 18$ unités. Avec un risque α de 0,01 %, le niveau de reemplètement utilisé dans le tableau 8 était de $R = 6\,486$. Considérons que l'on accepte d'aller jusqu'au risque β de 0,015 %, en raison du problème posé par le lotissement. Sachant que $q_1 = R_1 - PS_1 (\Rightarrow R_1 = q_1 + PS_1)$, le remplacement de q_1 par $q_{\inf}$ revient à diminuer R d'un entier compris entre 0 et $\kappa - 1$ puisque que la différence $q - q_{\inf}$ est un entier compris entre 0 et $\kappa - 1$. Le tableau 10 montre que tant que $q - q_{\inf}$ reste inférieur à 6, le choix de $q_{\inf}$ conduit à une prise de risque ne dépassant pas β .

R_1	6479	6480	6481	6482	6483	6484	6485
$P(X_1 > R_1)$	0,0157%	0,0146%	0,0136%	0,0126%	0,0117%	0,0109%	0,0101%
R_1	6486	6487	6488	6489	6490	6491	6492
$P(X_1 > R_1)$	0,0094%	0,0087%	0,0081%	0,0075%	0,0070%	0,0064%	0,0060%

Tableau 10. Évolution du risque de rupture en fonction du niveau de reemplètement utilisé, avec $X_1 \sim \mathcal{N}(12,962 ; 54,46 \%)$.

Le tableau 11 simule la politique d'approvisionnement avec les hypothèses du tableau 8, mais en tenant compte de la contrainte de lotissement ($\kappa = 18$). Lorsque la commande passée est mise en italique, on est en présence d'une minoration ; dans le cas contraire, il y a majoration. L'adaptation de cette démarche pour traiter les cas 2, 3 et 4 est immédiate, la seule différence étant que la distribution de probabilités de référence est obtenue par simulation.

jour	Livraison	Stock début	Demande	Stock fin	En attente de livraison	PS	Commande par lot de 18	Commande lotissement unitaire
1	1038	1270	520	750	5194	5944		
2		750	508	242	5194	5436	1044	1050
3	1043	1285	516	769	5195	5964		
4		769	531	238	5195	5433	1062	1053
5	1031	1269	511	758	5226	5984		
6		758	518	240	5226	5466	1026	1020
7	1057	1297	534	763	5195	5958		
8		763	500	263	5195	5458	1026	1028
9	1026	1289	514	775	5195	5970		
10		775	550	225	5195	5420	1062	1066
11	1037	1262	524	738	5220	5958		
12		738	555	183	5220	5403	1080	1083
13	1044	1227	510	717	5256	5973		
14		717	526	191	5256	5447	1044	1039
15	1062	1253	544	709	5238	5947		
16		709	509	200	5238	5438	1044	1048
17	1026	1226	526	700	5256	5956		
18		700	520	180	5256	5436	1044	1050
19	1026	1206	549	657	5274	5931		
20		657	527	130	5274	5404	1080	1082
21	1062	1192	510	682	5292	5974		
22		682	521	161	5292	5453	1044	1033
23	1080	1241	549	692	5256	5948		
24		692	530	162	5256	5418	1062	1068

Tableau 11. Simulation de la politique d'approvisionnement des carters avec conditionnement unitaire – commande passée tous les 2 jours – délai d'obtention de 10 jours – livraisons par multiples de 18.

4.4. Risque encouru et contrainte de capacité de transport

On a vu au § 3.1 que, dans une politique calendaire, la quantité commandée – et donc à transporter – est une variable aléatoire. En général, les moyens de transport ont une capacité limitée G que la quantité commandée ne pourra excéder ($\Rightarrow \text{Max}(R_j - PS_j, G)$). Le risque encouru sera plus élevé que celui souhaité, sauf si cette capacité a très peu de chances d'être dépassée, auquel cas le transport risque d'être peu efficient. Reprenons l'exemple de l'approvisionnement unitaire du carter C_1 du § 4.1 caractérisé par $\alpha = 2$, $\beta = 10$, $R_1 = 6\,486$ (défini pour le risque $\alpha = 0,01\%$) et supposons que $G = 1\,060$; une simulation de cette politique d'approvisionnement sur 50 millions de jours ($\rightarrow$ 25 millions de livraisons) conduit à un risque encouru de 0,0774 %. Si l'on veut maintenir le risque cible de 0,01 %, il convient d'augmenter le niveau de reapprovisionnement qu'il faut établir par tâtonnements (méthode par dichotomie pouvant être utilisée ici sans problème). Avec cette contrainte de transport, pour limiter le risque de rupture à 0,01 %, le niveau de reapprovisionnement passe de 6486 à 6530. Le stock de sécurité (très peu différent du stock résiduel) passe alors de 199,1 (cf. tableau 6) à 233,4. La

simulation permet de dépasser une vision locale de l'optimisation en donnant accès à un arbitrage global entre coûts de transport, coûts de possession, coûts de passation de commande et coûts de rupture de stock.

La prise en compte complémentaire d'une contrainte de conditionnement est à peine plus compliquée, la contrainte de capacité du transport étant nécessairement un multiple de la taille du conditionnement.

5. Stock de sécurité de composants produits

On s'intéresse maintenant à la production d'un produit i fabriqué par le maillon B pour faire face à une demande de son client, le maillon C de la chaîne logistique. Dans ce contexte, le délai de livraison λ_i , séparant un lancement en production, de la rentrée en stock du composant fabriqué, peut raisonnablement être considéré comme certain. Ce délai d'obtention correspond, en production, à ce que l'on appelle temps de cycle ou délai de fabrication.

Reprenons l'analyse du problème faite au § 3.1. Le client C (ligne d'assemblage véhicule) transmet ses commandes de la référence i (moteur) à son fournisseur B, en début de journée tous les θ_i jours (ouvrables). La commande reçue au début du jour t est à expédier à la fin de la journée $t + D_i$. Avec un délai de livraison λ_i , le maillon B dispose de $D_i - \lambda_i$ jours pour expédier la commande passée (avec $D_i \geq \lambda_i$). Les lancements en fabrication du composant i s'intègrent dans un cycle de fabrication de H jours, la production du composant i s'achevant F_i jours après le début du cycle ; si ce cycle ne porte que sur le seul composant i , il est évident que $H = F_i$. Notons qu'il n'y a pas de raison d'avoir de synchronisation entre les expéditions (tous les θ_i jours) et les lancements en production (tous les H jours).

On examinera le cas d'une production entièrement pour stock puis celui d'une production entièrement à la commande avant de traiter le cas d'une production partiellement pour stock et partiellement à la commande.

5.1. Production entièrement pour stock

Si le cycle de fabrication H n'est pas plus grand que la période de révision calendaire θ ($\rightarrow H \leq \theta_i$) et si la commande reçue du client C est immédiatement exécutable ($D_i - \lambda_i = 0$) ou, ce qui revient au même, si le temps restant avant expédition est inférieur à la période de révision calendaire θ ($\rightarrow D_i - \lambda_i \leq \theta_i$) la distribution de référence à retenir pour déterminer le niveau de reapprovisionnement est la loi Binomiale $\mathcal{B}(n\theta_i, p_i)$. En régime de croisière, la quantité à lancer en production par B est égale à la quantité venant d'être expédiée vers C, c'est donc une variable aléatoire. Toutefois, si le fournisseur produit toutes les références alternatives qui sont montées sur le poste d'assemblage de la ligne du client et si celles-ci sont approvisionnées en même temps ($\rightarrow \theta_i = \theta$), le cumul des quantités commandées est stable ($n\theta$) car on est en présence d'une loi Multinomiale.

$H \leq \theta_i$ et $D_i - \lambda_i \leq \theta_i \rightarrow$ production pour stock, R déterminé à partir de $X_i \sim \mathcal{B}(n\theta_i, p_i)$ [12]

Si le cycle de fabrication H est plus grand que la période de révision calendaire θ_i et si le temps restant avant livraison est inférieur au cycle de fabrication ($D_i - \lambda_i < H$), deux cas doivent être distingués.

a) Si le produit i est le seul à être fabriqué dans ce cycle de production, alors $H = F_i$. Au moment de la passation de commande au début de la journée t , la position de stock PS_{it} de composant i augmenté de la quantité lancée en production q_{it} ($= R_{it} - PS_{it}$) qui sera livrée au début du jour $t + H$ doit permettre de couvrir la demande jusqu'à la fin du cycle de production suivant en $t + 2H$. Le nombre de livraisons pouvant survenir au cours d'une période de $2H$ jours est nécessairement compris entre $\eta_1 = \arg \max(K | K < 2H / \theta)$ et $\eta_2 = \arg \min(K | K > 2H / \theta)$. Par exemple, avec $H = 5$ et $\theta = 4$, le nombre de livraisons est soit 2, soit 3 ; bien évidemment si $2H$ est un multiple de θ , le nombre de livraisons sur une période de $2H$ jours est constant. La distribution de référence à utiliser pour déterminer le niveau de reapprovisionnement est la loi Binomiale $\mathcal{B}(n\eta\theta_i, p_i)$, avec $\eta = \eta_1$ ou $\eta = \eta_2$ qui pourra, dans de nombreux cas, être approximée par la loi $\mathcal{N}(n\eta\theta; \sqrt{2n\eta\theta p_i(1-p_i)})$. Le tableau 12 illustre la politique de reapprovisionnement de stock du maillon B qui reçoit des commandes tous les 4 jours du maillon C avec expédition immédiate ; le cycle de fabrication de ce composant i étant de 5 jours, les distributions de référence sont les lois $\mathcal{B}(962 \times 2 \times 4; 0,5446)$, et $\mathcal{B}(962 \times 3 \times 4; 0,5446)$, qui conduit à des niveaux de reapprovisionnement définis au risque de 0,01 % de 4 373 (couverture pour 2 livraisons) et 6 486 (couverture pour 3 livraisons) ; les stocks résiduels avant livraison sont du même ordre de grandeur et leurs espérances mathématiques sont définies par la relation [4] appliquée à chacune des deux distributions.

$F_i = H > \theta_i$ et $D_i - \lambda_i < H \rightarrow$ production pour stock, R déterminé à partir de $X_i \sim \mathcal{B}(n\eta\theta_i, p_i)$, avec $\eta = \arg \max(K | K < 2H / \theta)$ ou $\eta = \arg \min(K | K > 2H / \theta)$ [13]

Cycle	jour t	Livraison (début jour)	Stock début	Demande	Stock fin	PSt	R	Production lancée (OF) au début de $t+1$
-	1		2153	2075	78	2178	4373	2195
1	2	2100	2178		2178	4373		
	3		2178		2178	4373		
	4		2178		2178	4373		
	5		2178	2063	115	2310		
	6	2195	2310		2310	2310	4373	2063
2	7		2310		2310	4373		
	8		2310		2310	4373		
	9		2310	2143	167	2230		
	10		167		167	2230		
	11	2063	2230		2230	2230	4373	2143
3	12		2230		2230	4373		
	13		2230	2089	141	2284		
	14		141		141	2284		
	15		141		141	2284		
	16	2143	2284		2284	2284	6486	4202
4	17		2284	2122	162	4364		
	18		162		162	4364		
	19		162		162	4364		
	20		162		162	4364		
	21	4202	4364	2110	2254	2254	4373	2119
5	22		2254		2254	4373		
	23		2254		2254	4373		
	24		2254		2254	4373		
	25		2254	2072	182	2301		
	26	2119	2301		2301	2301	4373	2072

Tableau 12. Simulation de la politique de production du moteur 1, le cycle de production étant de 5 jours – mise à disposition de la production au bout de 5 jours – Niveau de reapprovisionnement de 4 373 (si 2 livraisons à couvrir) ou 6 486 (si 3 livraisons à couvrir)

En régime de croisière, la production varie d'un cycle de production à l'autre puisque le lancement en production correspond à un cumul de demandes passées ; ces variations périodiques de la production sont fortement amplifiées si la longueur du cycle de production H n'est pas un multiple de celle du cycle d'approvisionnement $\square$. On peut noter par ailleurs que la quantité à lancer en production par B n'est égale au cumul de quantités expédiées précédemment vers C que si le niveau de reapprovisionnement utilisé pour le lancement en production est le même que celui utilisé au lancement précédent.

b) Supposons maintenant qu'au début de la journée t , on décide du lancement en production d'un ensemble de références alternatives sur un nouveau cycle de fabrication, l'ordre de lancement de ces références étant le même quel que soit le cycle. Supposons que, sur un cycle de 5 jours, la production du composant 1, dont le rang de lancement n'est pas nécessairement le premier, soit disponible à la fin du

deuxième jour du cycle ($F_i = 2$; $H = 5$). Au moment de la passation de commande au début de la journée t , la position de stock PS_{it} de composant i augmenté de la quantité lancée en production q_{it} ($= R_{it} - PS_{it}$) qui sera livrée au début du jour $t + H$ doit permettre de couvrir la demande jusqu'à la livraison suivante au début du jour $t + H + F_i$. Le nombre de livraisons pouvant survenir au cours d'une période de $(H + F_i)$ jours est nécessairement compris entre $\nu_1 = \arg \max(K | K < (H + F_i) / \theta)$ et $\nu_2 = \arg \min(K | K > (H + F_i) / \theta)$. Dans notre exemple, le nombre de livraisons à couvrir est soit 1, soit 2. Si $(H + F_i)$ est un multiple de θ , le nombre de livraisons sur une période de $(H + F_i)$ jours est constant. La distribution de référence à utiliser pour déterminer le niveau de reapprovisionnement est la loi Binomiale $\mathcal{B}(n\nu\theta_i, p_i)$, avec $\nu = \nu_1$ ou $\nu = \nu_2$ qui pourra, dans de nombreux cas, être approximée par la loi $\mathcal{N}(n\nu\theta; \sqrt{2n\nu\theta p_i(1-p_i)})$. Le tableau 13 illustre la politique de reapprovisionnement de stock du maillon B pour le composant 1 ; les distributions de référence sont les lois $\mathcal{B}(962 \times 2 \times 4 ; 0,5446)$, et $\mathcal{B}(962 \times 1 \times 4 ; 0,5446)$, qui conduit à des niveaux de reapprovisionnement définis au risque de 0,01 % de 4 373 (couverture pour 2 livraisons) et 2 211 (couverture pour 1 livraison). Si, au cours de n'importe quel cycle de production, toutes les références alternatives produites couvrent la totalité des besoins sur la ligne d'assemblage finale, alors la quantité totale produite de l'ensemble de ces références alternatives ne peut être stable d'un cycle à l'autre que si le nombre de livraisons à couvrir par la production d'une référence est toujours un même multiple de θ , quels que soient la référence et le cycle de production. Dans le cas contraire, en régime de croisière, des fluctuations de production sont inévitables et induiront des fluctuations accrues en approvisionnement des composants nécessaires à leurs productions.

5.2. Production entièrement à la commande

Si le cycle de fabrication n'est pas plus long que la période de révision calendaire ($\rightarrow H \leq \theta_i$) et si l'anticipation dont le fournisseur dispose ($D_i - \lambda_i$) est supérieure à la période de révision calendaire ($\rightarrow D_i - \lambda_i > \theta_i$), alors la production peut se faire entièrement à la commande et le lancement en production concernera au plus une seule livraison. Dans ce cas, il n'y aura pas systématiquement de lancement en production, le nombre maximum de lancements nuls consécutifs étant égal à $\arg \max(K | K < (D_i - \lambda_i) / H)$. Supposons, par exemple, que $H = 5$, $\theta_i = 12$ et $D_i - \lambda_i = 14$, le nombre maximum de lancements nuls consécutifs sera 2 ; si le premier lancement en production coïncide avec le début d'un cycle de révision calendaire (la quantité à livrer a début du jour 1 ayant été nécessairement produite antérieurement), seuls les cycles de production commençant au début des jours 6, 16, 32, 41, 52... lanceront en production la référence i pour des livraisons à expédier au début des jours 13, 25, 37, 49, 61... et les cycles commençant au début des jours 1, 11, 21, 26, 36, 46, 57... ne lancent pas en production cette référence (on peut noter que les lancements potentiels des cycles de production successifs commençant les jours 21 et 26 ne sont pas utilisés).

Si le cycle de fabrication est plus long que la période de révision calendaire ($\rightarrow H > \theta_i$) et si l'anticipation dont le fournisseur dispose ($D_i - \lambda_i$) est

supérieure à deux fois le cycle de fabrication ($\rightarrow D_i - \lambda_i > 2H$), alors la production peut se faire entièrement à la commande. Dans ce cadre, il est possible de lancer en production ce qui devra être livré au cours du cycle de production suivant et, si l'anticipation est suffisante, une ou plusieurs livraisons ultérieures. Il est préférable cependant de lisser la charge et de s'en tenir à lancer en production le cumul des livraisons à effectuer au cours du cycle de production suivant.

Cycle	jour t	Livraison (début jour)	Stock début	Demande	Stock fin	PSt	R	Production lancée (OF) au début de $t+1$
-	1		2153	2075	78	78	2211	2133
1	2		78		78	2211		
	3		78		78	2211		
	4	2133	2211		2211	2211		
	5		2211	2063	148	2281		
	6		148		148	148	4373	4225
2	7		148		148	4373		
	8		148		148	4373		
	9	4225	4373	2143	2230	2230		
	10		2230		2230	2230		
	11		2230		2230	2230	4373	2143
3	12		2230		2230	4373		
	13		2230	2089	141	2284		
	14	2143	2284		2284	2284		
	15		2284		2284	2284		
	16		2284		2284	2284	4373	2089
4	17		2284	2122	162	2251		
	18		162		162	2251		
	19	2089	2251		2251	2251		
	20		2251		2251	2251		
	21		2251	2110	141	141	2211	2070
5	22		141		141	2211		
	23		141		141	2211		
	24	2070	2211		2211	2211		
	25		2211	2072	139	139		
	26		139		139	139	4373	4234

Tableau 13. Simulation de la politique de production du moteur 1, le cycle de production étant de 5 jours – mise à disposition de la production au bout de 2 jours

Là encore, ce nombre de livraisons à prendre en considération peut varier d'un cycle de production à l'autre : il est d'au moins une livraison et ne peut dépasser $\arg \max(K | K > (D_i - \lambda_i - H) / \theta)$. Supposons, par exemple, que $H = 5$, $\theta_i = 3$ et $D_i - \lambda_i = 11$, ce qui conduit à lancer en production au plus la quantité correspondant à 2 livraisons successives ; si le premier lancement en production coïncide avec le début d'un cycle de révision calendaire, le cycle de production commençant au début du jour 1 produit ce qui sera livré au début des jours 7 et 10 (les livraisons des jours 1 et 4 ayant fait l'objet d'une production au cours du cycle précédent), le cycle débutant le jour 6 produira la livraison du jour 13, celui du jour 11 les livraisons des jours 16 et 19, celui débutant le jour 16, les livraisons des jours 22 et 25, etc.

L'irrégularité du nombre de lancements associés aux quantités lancées en production conduit nécessairement à une désorganisation préjudiciable. Elle peut être éliminée si le cycle de fabrication coïncide avec la période de révision calendaire tout en restant inférieur à l'anticipation dont le fournisseur dispose ($\rightarrow D_i - \lambda_i > \theta$). D'une commande à l'autre les quantités varient puisqu'elles correspondent à des remplacements de quantités consommées qui suivent des lois Binomiale. Cela étant, si le fournisseur produit toutes les références alternatives qui sont montées sur le poste d'assemblage de la ligne du client, le cumul des quantités commandées est stable ($n\theta$) car on est en présence d'une multinomiale. Si ce fournisseur a plusieurs clients pour tout ou partie des références produites, la condition qui vient d'être énoncée doit être étendue pour chaque client.

5.3. Production partiellement pour stock et partiellement à la commande

Il vient d'être montré que :

- si $(H \leq \theta_i)$, on ne pouvait que produire pour stock si $D_i - \lambda_i \leq \theta_i$ et à la commande dans le cas contraire ($D_i - \lambda_i > \theta_i$) ;
- si $H > \theta_i$, on produit à la commande si $D_i - \lambda_i > 2H$.

Dans le cas où $H > \theta_i$ et $H < D_i - \lambda_i \leq 2H$ on est amené à produire partiellement à la commande et partiellement pour stock. L'analyse des configurations possibles est similaire à celle présentée au § 5.1a. La seule différence est que les μ livraisons au client effectuées dans les $D_i - \lambda_i$ jours suivant le lancement en production de la référence i au début de la journée t sont connues et doivent être couvertes par une production à la commande. Ce nombre est soit $\mu_1 = \arg \max(K | K < (D_i - \lambda_i) / \theta)$, soit $\mu_2 = \arg \min(K | K > (D_i - \lambda_i) / \theta)$. La différence, éventuellement nulle, entre η et μ correspond donc aux livraisons à couvrir par une production pour stock. Le tableau 14 illustre ce cas de figure avec $D_i - \lambda_i = 7$, $\theta = 4$ et $H = 5$.

La position de stock y est réactualisée au moment de la prise de décision (le soir de la veille du lancement) ; elle intègre les commandes fermes du client et les livraisons attendues, connues au moment de la prise de décision. Dans cet exemple, la production lancée au début du 2^e cycle de fabrication est entièrement à la commande, tandis que celles des cycles 1 et 4 sont entièrement pour stock et ne concernent qu'une livraison, tandis que la production du 3^e cycle est partiellement à la commande et partiellement pour stock (2 livraisons concernées).

Comme dans le cas étudié au §5.1a, on est en présence d'une variation possible de la production d'un cycle à l'autre liée au nombre variable de demandes du client à prendre en compte. La différence porte sur l'importance du stock de sécurité qui est plus faible, voire disparaît lorsque l'on peut produire à la commande.

Cycle	jour t	Livraison (début jour)	Stock début	Demande	Stock fin	PSt	R	Production lancée (OF) au début de $t+1$
-	1		2153	2075	78	2178	*	2028
1	2	2100	2178		2178	4206		
	3		2178		2178	4206		
	4		2178		2178	4206		
	5		2178	2063	115	2143		
	6		115		115	2143	*	2089
2	7	2028	2143		2143	4232		
	8		2143		2143	4232		
	9		2143	2143	0	2089		
	10		0		0	2089		
	11		0		0	2089	2211	4333
3	12	2089	2089		2089	6422		
	13		2089	2089	0	4333		
	14		0		0	4333		
	15		0		0	4333		
	16		0		0	4333	*	1971
4	17	4333	4333	2122	2211	4182		
	18		2211		2211	4182		
	19		2211		2211	4182		
	20		2211		2211	4182		
	21		2211	2110	101	2072	*	2048
5	22	1971	2072		2072	4120		
	23		2072		2072	4120		
	24		2072		2072	4120		
	25		2072	2072	0	2048		
	26		0		0	2048	*	4299

Tableau 14. Simulation de la politique de production du moteur 1, le cycle de production étant de 5 jours – horizon de planification de 8 jours – dans la colonne R, * implique une production entièrement à la commande

6. Conclusion

Dans une chaîne logistique dédiée à la production de masse de produits fortement diversifiés, pilotée par des politiques de réapprovisionnement calendaires, l'analyse du régime de croisière des relations entre un maillon d'une chaîne logistique et ses maillons adjacents montre la nécessité de constituer les stocks de sécurité de composants produits et de composants approvisionnés. L'importance de ces stocks est liée au niveau et à la structure de la production du maillon de l'assemblage final, de la variabilité des délais d'obtention, du niveau de maîtrise de la qualité mais aussi de règles de lotissement du transport et des contraintes de capacité de transport. La variabilité des quantités échangées périodiquement entre deux maillons dépend, en outre, de l'anticipation de la demande, disponible lors la prise de décision, du niveau de synchronisation des flux expédiés, produits et réapprovisionnés qui peut conduire ou éviter la création de cycles. Un maillon aura nécessairement une activité

globale plus variable s'il ne traite pas toute la diversité induite à son niveau par l'ensemble des composants alternatifs montés sur un poste de ligne d'assemblage final. La pertinence des règles de réapprovisionnement ou de lancement en production repose sur celle des informations structurelles propagées le long de la chaîne logistique. Ces informations ne peuvent être les informations brutes de l'unité d'assemblage final (nomenclature de planification et volume de production quotidien), il convient d'utiliser en cascade le mécanisme d'explosion des nomenclatures pour déterminer la demande d'un composant fabriqué dans un maillon quelconque de la CLA. L'appel à la simulation de Monte Carlo pour déterminer cette distribution de référence est incontournable si le composant considéré se retrouve dans des véhicules produits sur plus d'une ligne d'assemblage. La stabilité postulée du régime de croisière est nécessaire pour mettre en évidence les conditions d'un pilotage performant. Cette performance reste possible en cas de remise en cause périodique des caractéristiques du régime de croisière, à condition que soient diffusées à temps ces nouvelles informations le long de la chaîne logistique en tenant compte du décalage temporel séparant la production d'un composant de son intégration dans le produit fini. Au final, la performance de la CLA dépend tout autant de l'entreprise propriétaire des usines d'assemblage final qui doit transmettre aux acteurs de la CLA les informations spécifiques qui le concerne, que de l'unité qui reçoit ces informations et qui doit les exploiter aussitôt de manière pertinente.

7. Références bibliographiques

- Anderson D.M. & Pine II J, *Agile Product Development for Mass Customization*, McGraw-Hill, 1997.
- Axsater S., Zhang W., "A joint replenishment policy for multi-echelon inventory control", *International journal of production economics*, vol. 59, 1999, p. 243–250.
- Camisullis C., Giard V., « Analyse des déterminants à court terme de la capacité d'une unité de production », *Journal européen des systèmes automatisés*, vol. 43, n° 10, 2009, p. 1207-1226.
- Chen F., "Worst-case analysis of (R;Q) policies in a two stage serial inventory system with deterministic demand and backlogging", *Operations research letters*, vol. 25, 1999, p. 51-58.
- Chiu H., Huang H., "A multi-echelon integrated JIT inventory model using the time buffer and emergency borrowing policies to deal with random delivery lead times", *International journal of production research*, vol. 41, 2003, p. 2911–2931.
- Clark A., Scarf H., "Optimal policies for a multi echelon inventory problem", *Management science*, vol. 6, 1960, p. 475–490.
- Diks E., de Kok A., "Optimal control of a divergent multi-echelon inventory system", *European journal of operational research*, vol. 111, 1998, p. 75–97.

- Forsberg R., "Exact evaluation of (R, Q)-policies for two level inventory systems with Poisson demand", *European journal of operational research*, vol. 96, 1996, p. 130-138.
- Giard V., *Gestion de la production et des flux*, Economica, 3^e édition, Paris, 2003.
- Giard V., Mendy G., « Production à flux tirés dans une chaîne logistique », *Revue française de gestion industrielle*, vol. 26, 2007, p. 87-110.
- Guide V., Srivastava R., "A review of techniques for buffering against uncertainty with MRP systems", *Production planning and control*, vol. 11, n° 3, 2000, p. 223-233.
- Gunasekarana A., Ngaib E., "Build-to-order supply chain management: a literature review and framework for development", *Journal of operations management*, vol. 23, n° 5, 2005, p. 423-451.
- Ho C., Law W., Rampal R., "Uncertainty dampening methods for reducing MRP system nervousness", *International journal of production research*, vol. 33, 1995, p. 483-496.
- Koh S., Saadj S., Jones M., "Uncertainty under MRP-planned manufacture: review and categorization", *International journal of production research*, vol. 40, n° 10, 2002, p. 2399-2421.
- Krupp J., "Safety stock management", *Production and inventory management journal*, vol. 3, 1997, p. 11-18.
- Liberopoulos G., Koukounialos S., "Tradeoffs between base stock levels, numbers of kanbans, and planned supply lead times in production/inventory systems with advance demand information", *International journal of production economics*, vol. 96, 2005, p. 213-232.
- Lowerre W., "Protective scheduling smoothes jittery MRP plans: buffer forecast error the key", *Production and inventory management journal*, vol. 1, 1985, p. 1-21.
- Mohebbi E., Posner M., Sole M., "Versus dual sourcing in a continuous-review inventory system with lost sales", *Computers and industrial engineering*, vol. 34, n° 2, 1998, p. 321-336.
- Moinzadeh K., "A multi-echelon inventory system with information exchange", *Management science*, vol. 48, n° 3, 2002, p. 414-426.
- Ng W., Piplani R., Viswanathan S., "Simulation workbench for analyzing multi-echelon supply chains", *Integrated manufacturing systems*, vol. 14, n° 5, 2003, p. 449-457.
- Rau H., Wu M., Wee H., "Integrated inventory model for deteriorating items under a multi-echelon supply chain environment", *International journal of production economics*, vol. 86, 2003, p. 155-168.
- Seifbarghy M., Jokar M., "Cost evaluation of a two-echelon inventory system with lost sales and approximately Poisson demand", *International journal of production economics*, vol. 102, 2005, p. 244-254.
- So K., Zheng X., "Impact of supplier's lead-time and forecast demand updating on retailer's order quantity variability in a two-level supply chain", *International journal of production research*, vol. 86, 2003, p. 169-179.

- Tang O., Grubström R., "The detailed coordination problem in a two-level assembly system with stochastic lead times", *International journal of production economics*, vol. 81-82, 2003, p. 415–429.
- Vargas G., Dear R., "Managing uncertainty in multi-level manufacturing systems", *Integrated manufacturing systems*, vol. 2, 1991, p. 14-26.
- Wemmerlov U., "A time-phased order-point system in environments with and without demand uncertainty: a comparative analysis of non-monetary performance variables", *International journal of production research*, vol. 24, 1986, p. 343-358.