

CAHIER DU LAMSADE

197

Octobre 2002

Prise en compte d'une connaissance imparfaite à l'aide d'un
pseudo-critère : procédure interactive de construction

A. Aït-Younes, B. Roy

Prise en compte d'une connaissance imparfaite à l'aide d'un pseudo-critère : procédure interactive de construction

A. Aït Younes et B. Roy

Lamsade, Université Paris-Dauphine

E-mail : {amine , roy}@lamsade.dauphine.fr

Les auteurs tiennent à remercier Marc Pirlot pour la lecture très attentive qu'il a bien voulu faire de cet article et pour les commentaires et suggestions pertinentes qui nous ont permis de l'améliorer.

Table des matières

Résumé	i
Abstract	i
1 Introduction	1
2 Résultats fondamentaux	2
2.1 Rappels de résultats	3
2.2 Nouvelle caractérisation d'un pseudo-ordre	4
2.3 Première exploitation de l'information de base	5
3 Informations supplémentaires : propagation et modes de questionnement	7
3.1 Tables de modifications	7
3.2 Deux modes de questionnement de Z	10
3.2.1 Question de type $\mathcal{P}(a_j)$	11
3.2.2 Question de type $\mathcal{I}(a_j)$	11
4 Protocoles de construction d'un pseudo-ordre	12
4.1 Définition et remarques préliminaires	13
4.2 Première approche	13
4.3 Deuxième approche	14
4.4 Compatibilité de l'information recueillie avec le modèle du pseudo-ordre . .	17
5 Comment définir un pseudo-critère représentatif du pseudo-ordre obtenu	19
5.1 A propos du cas général	19
5.2 Cas particulier où il existe une représentation avec deux seuils constants . .	21
5.2.1 Nouvelle caractérisation des pseudo-ordres à seuils constants	21
5.2.2 Détermination de la fonction g et des deux constantes q et p	23
6 Conclusion	24
Références	24

Prise en compte d'une connaissance imparfaite à l'aide d'un pseudo-critère : procédure interactive de construction

Résumé

Le modèle du pseudo-critère est défini par un pseudo-ordre qui fait intervenir les trois relations binaires $\mathcal{I}$, $\mathcal{Q}$ et $\mathcal{P}$. Nous supposons que l'information de base disponible est (i) un rangement des actions, (ii) la nature de la relation ($\mathcal{I}, \mathcal{Q}$ ou $\mathcal{P}$) entre chaque couple d'actions consécutives. Nous avons mis en œuvre une démarche permettant de déduire le modèle de préférence compatible avec l'information de base à partir d'une information supplémentaire obtenue avec un minimum de questions.

Après une présentation de quelques résultats fondamentaux, on mettra en évidence le parti qui peut en être tiré pour exploiter des informations supplémentaires et l'on introduira deux modes de questionnement (section 3). Sur ces bases, on définira un protocole d'acquisition de ces informations supplémentaires (section 4). Enfin, avant de conclure, on indiquera comment obtenir les fonctions g , q et p définissant un pseudo-critère représentatif du pseudo-ordre ainsi obtenu et on donnera une caractérisation du cas où ce dernier admet une représentation avec deux seuils constants.

Processing of an imperfect knowledge by a pseudo-criterion: an interactive procedure of construction

Abstract

The pseudo-criterion model is defined by a pseudo-order which is based on the three binary relations $\mathcal{I}$, $\mathcal{Q}$ and $\mathcal{P}$. We suppose that the basic information available is (i) a ranking of the alternatives, (ii) the relations ($\mathcal{I}, \mathcal{Q}$ or $\mathcal{P}$) on the sets of couples of consecutive alternatives. We develop an approach allowing us to infer the preference model compatible with the basic information, which takes into account additional informations obtained by asking questions. Moreover, we try to minimize the number of questions.

After presenting some fundamental results, we indicate how to exploit additional informations and we introduce two modes of questioning (section 3). On these bases, we define a protocol of acquisition of this additional information (section 4). Before concluding, we indicate how to obtain the functions g , q and p defining a pseudo-criterion representative of the obtained pseudo-order. Finally, we present a characterization of the case where such a pseudo-order has a representation with two constant thresholds

1 Introduction

Le modèle du pseudo-critère (cf. Roy (1978); Roy (1985) chapitre 10) est maintenant d'un usage courant en aide à la décision. Comme tout critère, ce modèle fait intervenir une évaluation $g(a)$ de la performance d'une action a selon un point de vue plus ou moins complexe; il conduit en outre à introduire deux seuils $q[g(a)]$ et $p[g(a)]$ appelés respectivement seuils d'indifférence et de préférence. Ceux-ci sont destinés à prendre en compte les facteurs d'imprécision, d'incertitude et d'indétermination susceptibles d'intervenir dans des jugements en termes d'indifférence (relation $\mathcal{I}$) et de préférence (relation $\mathcal{P}$) portant sur deux actions quelconques.

Le système relationnel de préférences (s.r.p.) associé au modèle du pseudo-critère fait intervenir, à côté des relations $\mathcal{I}$ et $\mathcal{P}$, une relation $\mathcal{Q}$ dite de préférence faible (en ce sens qu'il s'agit d'une préférence mal établie) qui reflète une ambiguïté, une hésitation entre situation d'indifférence et de préférence stricte. Ce système se présente sous la forme suivante :

$$\left\{ \begin{array}{ll} a\mathcal{I}b & \Longleftrightarrow \begin{array}{l} q[g(b)] \geq g(a) - g(b) \text{ et} \\ q[g(a)] \geq g(b) - g(a) \end{array} \\ a\mathcal{Q}b & \Longleftrightarrow q[g(b)] < g(a) - g(b) \leq p[g(b)] \\ a\mathcal{P}b & \Longleftrightarrow p[g(b)] < g(a) - g(b) \\ & p[g] \geq q[g] \geq 0 \\ & \frac{q[g(a)] - q[g(b)]}{g(a) - g(b)} \geq -1 \\ & \frac{p[g(a)] - p[g(b)]}{g(a) - g(b)} \geq -1 \end{array} \right. \quad (1)$$

Un tel s.r.p. a une structure de pseudo-ordre (cf. Roy et Vincke (1987)).

La construction d'un pseudo-critère revient ainsi à définir le triplet de fonctions (g, p, q) . Dans le cas d'un critère défini par une fonction, les performances sont bien définies et il existe plusieurs techniques efficaces pour spécifier les valeurs des deux seuils pour chaque action de l'ensemble $\mathcal{A}$.

Cependant, il n'est pas rare que l'homme d'étude soit confronté à des cas dans lesquels il n'est pas en mesure de définir ces trois fonctions. Il peut par exemple lui être plus facile ou plus naturel de ranger les actions (structure d'ordre) plutôt que d'attribuer une performance chiffrée aux actions de $\mathcal{A}$. Nous nous intéressons ici à deux contextes dans lesquels on est souvent conduit à se situer en pratique :

- Contexte n°1 : On dispose d'un ensemble pré-défini d'actions $\mathcal{A}$, rangées de la moins bonne à la meilleure, avec ou sans ex æquo (cf. Roy et Hugonnard (1982), chapitre 10 dans Roy et Bouyssou (1993)); dans ce contexte, les ex æquo doivent être considérés comme de vrais ex æquo (sous ce terme, on désigne des actions qui se comparent toutes de la même façon à n'importe quelle autre action).

- Contexte n°2 : On dispose d'une échelle ordinale destinée à évaluer des actions non nécessairement toutes définies, les actions se présentant au fur et à mesure. On suppose qu'il existe une procédure d'évaluation non dénuée d'ambiguïté qui permet d'affecter chaque action à un échelon et un seul. Il en résulte un rangement des actions par paquets qui doivent, ici encore, être considérées comme de vrais ex æquo (cf. Roy *et al.* (1986), Rogers *et al.* (2000)).

Pour construire un pseudo-critère dans chacun de ces deux contextes, on peut chercher tout d'abord à appréhender un s.r.p. de type $(\mathcal{I}, \mathcal{Q}, \mathcal{P})$ qui soit un pseudo-ordre et à définir ensuite trois fonctions g , q et p qui le représentent. Dans le premier contexte, on considère l'ensemble fini d'actions $\mathcal{A}$ alors que, dans le deuxième, on raisonne sur l'ensemble des actions susceptibles d'être affectées. Dans chacun de ces deux contextes, les vrais ex æquo n'ayant pas lieu d'être distingués, on peut considérer que :

- Dans le contexte n°1, le mot "action" désigne aussi bien une action de $\mathcal{A}$ qu'une classe de vrais ex æquo.
- Dans le contexte n°2, le mot "action" désigne un échelon de l'échelle.

Il s'ensuit que chacun de ces deux contextes est caractérisé par l'existence d'un ensemble $\mathcal{A}$ d'éléments appelés actions sur lequel est défini un ordre complet $\mathcal{W}$. On suppose que cet ordre a été obtenu par l'homme d'étude dans une interaction avec un expert ou un acteur interrogé $\mathcal{Z}$. On suppose en outre que, dans le cadre de cette interaction, $\mathcal{Z}$ a été capable de préciser la nature de la relation $\mathcal{I}$, $\mathcal{Q}$ ou $\mathcal{P}$ qui lie deux actions consécutives dans l'ordre $\mathcal{W}$; ceci constitue ce que nous appellerons l'information de base.

L'objet de notre travail est de définir une démarche permettant de déduire un système relationnel de préférences $(\mathcal{I}, \mathcal{Q}, \mathcal{P})$ compatible avec le modèle du pseudo-ordre qui représente l'information de base en prenant appui sur des informations supplémentaires obtenues avec un minimum de questions posées à $\mathcal{Z}$.

Après une présentation de quelques résultats fondamentaux, on mettra en évidence le parti qui peut en être tiré pour exploiter des informations supplémentaires et l'on introduira deux modes de questionnement (section 3). Sur ces bases, on définira un protocole d'acquisition de ces informations supplémentaires (section 4). Enfin, avant de conclure, on indiquera comment obtenir les fonctions g , q et p définissant un pseudo-critère représentatif du pseudo-ordre obtenu. Nous nous attacherons plus spécialement à l'examen d'un cas particulier important dont nous donnerons une nouvelle caractérisation : il s'agit de celui où le pseudo-ordre admet une représentation avec deux seuils constants.

2 Résultats fondamentaux

Dans ce qui suit, on suppose que les actions de $\mathcal{A}$ sont numérotées conformément à l'ordre $\mathcal{W}$: $a_j \mathcal{W} a_i \implies j > i$ (a_m , a_1 désignent respectivement la meilleure et la moins bonne des actions).

Soit $\mathcal{M}$ une demi-matrice carrée (cf. figure 1), représentant les préférences de Z telle que la case $C_{k,j}$ contient $(\mathcal{I}, \mathcal{Q} \text{ ou } \mathcal{P})$ selon que Z a validé $a_k \mathcal{I} a_j$, $a_k \mathcal{Q} a_j$ ou $a_k \mathcal{P} a_j$.

	a_1	a_2	$\cdots$	a_{m-1}	a_m
a_1	$\mathcal{I}$				
a_2	$\mathcal{P}$	$\mathcal{I}$			
$\vdots$					
a_{m-1}				$\mathcal{I}$	
a_m				$\mathcal{Q}$	$\mathcal{I}$

FIG. 1: matrice $\mathcal{M}$

A ce stade, seules les cases de la première sous-diagonale, représentant l'information de base, sont remplies. Faisons observer ici que toute configuration $(\mathcal{I}, \mathcal{Q}, \mathcal{P})$ est possible sur la première sous-diagonale.

Les informations qu'il s'agit d'acquérir doivent permettre de remplir les $\frac{(m-1)(m-2)}{2}$ cases vides sans toutefois poser autant de questions qu'il y a de cases à remplir. La matrice $\mathcal{M}$ ainsi complétée par $\mathcal{I}, \mathcal{Q}$ ou $\mathcal{P}$ dans chacune des cases doit refléter la façon dont Z compare les deux actions concernées.

Pour pouvoir représenter un tel système de préférence par un pseudo-critère, il faut et il suffit que le système $(\mathcal{I}, \mathcal{Q}, \mathcal{P})$ ainsi obtenu soit un pseudo-ordre.

Nous commencerons par rappeler certains résultats fondamentaux relatifs à cette structure (cf. Roy et Vincke (1987), Pirlot et Vincke (1997), Tsoukiàs et Vincke (1998)). Nous introduirons ensuite une nouvelle caractérisation des pseudo-ordres fondée sur la condition de monotonie, ce qui nous permettra d'exploiter au mieux l'information de base et donc de réduire le nombre de questions supplémentaires à poser à Z .

2.1 Rappels de résultats

Pour présenter une première caractérisation des pseudo-ordres (cf. Roy et Vincke (1987)), nous rappelons que :

$$\begin{aligned}
a(\mathcal{P} \cup \mathcal{Q})b &\iff a\mathcal{P}b \text{ ou } a\mathcal{Q}b \\
a\mathcal{Q}^{-1}b &\iff b\mathcal{Q}a \\
a(\mathcal{I} \cup \mathcal{Q} \cup \mathcal{Q}^{-1})b &\iff a\mathcal{I}b \text{ ou } a\mathcal{Q}b \text{ ou } b\mathcal{Q}a
\end{aligned}$$

Définition 1 Soit $\mathcal{A}$ un ensemble sur lequel sont définies de façon exhaustive et mutuellement exclusive trois relations binaires $\mathcal{I}$: réflexive et symétrique, $\mathcal{Q}$ et $\mathcal{P}$: antisymétriques. Le triplet $(\mathcal{I}, \mathcal{Q}, \mathcal{P})$ est un pseudo-ordre si et seulement si les propriétés $Pr_1, \dots, Pr_8$ suivantes sont vérifiées :

$$\forall a, b, c, d \in \mathcal{A} :$$

- *Propriétés restrictives :*
 - Pr_1 : Si $a(\mathcal{P} \cup \mathcal{Q})b$ et $b(\mathcal{P} \cup \mathcal{Q})c$ et $a\mathcal{I}d$, alors $\text{non}\{c\mathcal{I}d\}$
 - Pr_2 : Si $a\mathcal{P}b$ et $b\mathcal{P}c$ et $a(\mathcal{I} \cup \mathcal{Q} \cup \mathcal{Q}^{-1})d$, alors $\text{non}\{c(\mathcal{I} \cup \mathcal{Q} \cup \mathcal{Q}^{-1})d\}$
- *Propriétés déductives :*
 - Pr_3 : Si $a(\mathcal{P} \cup \mathcal{Q})b$ et $b\mathcal{I}c$ et $c(\mathcal{P} \cup \mathcal{Q})d$, alors $a(\mathcal{P} \cup \mathcal{Q})d$
 - Pr_4 : Si $a\mathcal{P}b$ et $b(\mathcal{I} \cup \mathcal{Q} \cup \mathcal{Q}^{-1})c$ et $c\mathcal{P}d$, alors $a\mathcal{P}d$
 - Pr_5 : Si $a\mathcal{Q}b$ et $b\mathcal{I}c$ et $c\mathcal{P}d$, alors $a\mathcal{P}d$
 - Pr_6 : Si $a\mathcal{P}b$ et $b\mathcal{Q}c$ et $c\mathcal{I}d$, alors $a\mathcal{P}d$
 - Pr_7 : Si $a\mathcal{P}b$ et $b\mathcal{I}c$ et $c\mathcal{Q}d$, alors $a\mathcal{P}d$
 - Pr_8 : Si $a\mathcal{I}b$ et $b\mathcal{Q}c$ et $c\mathcal{P}d$, alors $a\mathcal{P}d$

Faisons observer que ces propriétés apportent des informations sur le contenu de certaines des cases de la matrice $\mathcal{M}$. Les propriétés restrictives (Pr_1, Pr_2) ne permettent pas de conclure directement à des relations mais plutôt de restreindre le champ des possibles. Par contre, les propriétés déductives permettent d'aboutir directement à une relation de préférence unique.

Toutefois, telles que ces propriétés sont formulées, leur utilisation systématique pour organiser le choix des questions à poser n'est pas facile. De plus, cette formulation ne prend pas en compte la présence de l'ordre $\mathcal{W}$, d'où l'intérêt du résultat suivant (cf. Aït Younes (2001) page 53) beaucoup mieux adapté pour l'organisation du questionnement.

2.2 Nouvelle caractérisation d'un pseudo-ordre

Dans ce qui suit, nous introduisons une hiérarchie entre les relations de préférence, que nous traduisons en disant que : la relation de préférence stricte $\mathcal{P}$ est plus forte que la relation de préférence faible $\mathcal{Q}$ qui elle-même plus forte que la relation d'indifférence $\mathcal{I}$.

Définition 2 : Condition de monotonie : Étant donné un ensemble $\mathcal{A}$ sur lequel sont définies les relations $\mathcal{I}$, $\mathcal{Q}$ et $\mathcal{P}$, nous dirons que la condition de monotonie est satisfaite vis-à-vis d'un ordre $\mathcal{W}$ des actions de $\mathcal{A}$ si, quel que soit le triplet (a, b, c) d'actions vérifiant $a\mathcal{W}b$ et $b\mathcal{W}c$, on a entre a et c une relation au moins aussi forte que la plus forte de celles qui existent entre (a, b) et (b, c) .

Théorème 1 Soit $\mathcal{A}$ un ensemble sur lequel sont définies de façon exhaustive et mutuellement exclusive trois relations binaires $\mathcal{I}$: réflexive et symétrique, $\mathcal{Q}$ et $\mathcal{P}$: antisymétriques.

- (i) : Si $\mathcal{A}$ peut être muni d'un ordre complet $\mathcal{W}$ tel que quelles que soient les actions a, b et c :

$$\begin{cases} a\mathcal{Q}b \implies a\mathcal{W}b \\ a\mathcal{P}c \implies a\mathcal{W}c \end{cases} \quad (2)$$

et si la condition de monotonie est satisfaite vis-à-vis de $\mathcal{W}$ par $(\mathcal{I}, \mathcal{Q}, \mathcal{P})$, alors ces trois relations définissent un pseudo-ordre sur $\mathcal{A}$.

- (ii) : Si $(\mathcal{I}, \mathcal{Q}, \mathcal{P})$ est un pseudo-ordre, alors $\mathcal{A}$ peut être muni d'un ordre complet $\mathcal{W}'$ vérifiant les implications (2) ci-dessus et vis-à-vis duquel la condition de monotonie est satisfaite; de plus, tout ordre $\mathcal{W}$ qui vérifie les implications (2) ne diffère de $\mathcal{W}'$ que par des permutations d'actions indifférentes.

2.3 Première exploitation de l'information de base

Quel que soit celui des deux contextes considérés (cf. §1), il s'agit, après avoir élaboré l'information de base, d'interagir avec Z de façon à déterminer le contenu $\mathcal{I}$, $\mathcal{Q}$ ou $\mathcal{P}$ de chacune des cases de la matrice située en-dessous de la sous-diagonale (cf. figure 1). Cette interaction a pour objet de construire le système $(\mathcal{I}, \mathcal{Q}, \mathcal{P})$ de telle sorte que Z le juge représentatif de ses préférences et que, si cela est possible, ce système puisse être représenté par un pseudo-critère.

La procédure que nous proposons dans cet article est conçue en supposant qu'il est possible de bâtir un système $(\mathcal{I}, \mathcal{Q}, \mathcal{P})$ acceptable par Z et représentable par un pseudo-critère, autrement dit un système qui soit un pseudo-ordre, quitte à faire apparaître en cours de procédure des impossibilités, c'est-à-dire des configurations de préférence qui soient incompatibles avec le modèle du pseudo-critère.

Dans ces conditions, s'il existe un pseudo-ordre $(\mathcal{I}, \mathcal{Q}, \mathcal{P})$, il existe aussi (partie (ii) du théorème 1) un ordre complet $\mathcal{W}'$ des actions de $\mathcal{A}$ vis-à-vis duquel la condition de monotonie est satisfaite. L'information de base a précisément été conçue de façon à appréhender "au mieux" l'ordre $\mathcal{W}'$ à partir de l'ordre $\mathcal{W}$. Ce dernier respecte les implications (2) vis-à-vis des couples d'actions consécutives. Il s'ensuit que $\mathcal{W}$ ne peut différer de $\mathcal{W}'$ que par des permutations d'actions déclarées indifférentes. Il découle de ce qui précède que la construction du système $(\mathcal{I}, \mathcal{Q}, \mathcal{P})$ peut être conduite en supposant, a priori, que ce système vérifie la condition de monotonie vis-à-vis de l'ordre $\mathcal{W}$ issu de l'information de base. Si l'interaction ainsi conduite permet d'aboutir à un système qui, effectivement, ne viole pas cette condition, celui-ci sera un pseudo-ordre (partie (i) du théorème 1). Si au contraire en cours de processus ou au terme de celui-ci la condition est violée :

- Dans le contexte n°1, avant de conclure à l'impossibilité de représenter les préférences de Z par un pseudo-critère, il sera nécessaire de vérifier que les violations constatées ne peuvent pas être éliminées par simples permutations d'actions déclarées indifférentes dans l'information de base.
- Dans le contexte n°2, on pourra immédiatement conclure à l'impossibilité de représenter les préférences de Z par un pseudo-critère car la conception de l'échelle entraîne l'identité de $\mathcal{W}$ et $\mathcal{W}'$; si l'échelle a été bien conçue, cette impossibilité ne doit pas se produire.

Considérons la case située ligne k , colonne j ($k > j$) dans la matrice $\mathcal{M}$; son contenu $C_{k,j}$, à un stade quelconque de la procédure traduit ce que l'on sait relativement à la relation de préférence qui lie a_k et a_j . Si cette relation a dû être déterminée, $C_{k,j}$ prend l'une des valeurs $\mathcal{I}$, $\mathcal{Q}$ ou $\mathcal{P}$. Sinon, trois cas sont possibles :

- Indétermination forte : $C_{k,j} = ??$ traduit une ignorance complète quant au contenu de la case.
- Indétermination faible de type + : $C_{k,j} = ?+$ traduit le fait que la case ne peut contenir que $\mathcal{Q}$ ou $\mathcal{P}$.
- Indétermination faible de type - : $C_{k,j} = ?-$ traduit le fait que la case ne peut contenir que $\mathcal{I}$ ou $\mathcal{Q}$.

Ainsi, tout au long de la procédure, $C_{k,j}$ prend ses valeurs dans l'ensemble :

$$\Omega = \{\mathcal{I}, \mathcal{Q}, \mathcal{P}, ?-, ?+, ??\}$$

Définition 3 *Considérons une suite de "f" cases de la forme :*

$$(i_{f+1}, i_f), \dots, (i_{h+1}, i_h), \dots, (i_2, i_1) \text{ avec } i_{h+1} > i_h \text{ pour } h = 1 \dots f$$

La suite formée par les contenus de ces cases est appelée chaîne relationnelle (f est la longueur de la chaîne). Cette chaîne est dite sous-diagonale si $i_{f+1} = f + i_1$, autrement dit si $i_{h+1} = h + i_1$ pour $h = 1 \dots f$.

Exemple 1 *Soit $\mathcal{A} = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7\}$*

La suite formée par le contenu des cases (6,4), (4,3) et (3,2) est une chaîne relationnelle de longueur 3.

La suite formée par le contenu des cases (6,5), (5,4) et (4,3) est une chaîne sous-diagonale (notée (6,3)) qui débute en $i_{f+1} = 6$ et qui se termine en $i_1 = 3$.

Remarquons qu'une chaîne sous-diagonale est complètement définie par la première case (i_{f+1}, i_f) et la dernière case (i_2, i_1) . Elle sera notée (i_{f+1}, i_1) .

Compte tenu de la façon dont on vient de préciser le déroulement de la procédure, on peut l'initialiser en exploitant, pour toute case (k, j) , la chaîne sous-diagonale (k, j) qui débute en $i_{f+1} = k$ et qui se termine en $i_1 = j$. En effet, la condition de monotonie étant supposée vérifiée vis-à-vis de l'ordre $\mathcal{W}$, la case (k, j) doit contenir une relation au moins aussi forte que la plus forte de celles qui sont présentes sur cette chaîne sous-diagonale. On peut donc débiter la procédure en remplissant la demi-matrice $\mathcal{M}$ comme suit :

- $C_{k,j} = \mathcal{P}$ si la chaîne sous-diagonale (k, j) comporte au moins un $\mathcal{P}$.
- $C_{k,j} = ?+$ si la chaîne sous-diagonale (k, j) ne comporte pas de $\mathcal{P}$ mais au moins un $\mathcal{Q}$.
- $C_{k,j} = ??$ si la chaîne sous-diagonale (k, j) ne comporte que des $\mathcal{I}$.

3 Informations supplémentaires : propagation et modes de questionnement

Les informations supplémentaires doivent nous permettre de substituer $\mathcal{I}$, $\mathcal{Q}$ ou $\mathcal{P}$ selon le cas à tous les points d'interrogation qui figurent dans la demi-matrice $\mathcal{M}$ après l'avoir complétée comme indiqué ci-dessus. Plaçons-nous à une étape quelconque de la procédure et considérons une case (k,j) dont le contenu fait apparaître une indétermination. Dès lors qu'une information supplémentaire permet de réduire (passer d'une indétermination forte à une indétermination faible) ou de supprimer l'indétermination dans la case (k,j) , on peut chercher à propager cette information en étudiant ses répercussions dans d'autres cases de façon à respecter la condition de monotonie. Cette propagation peut permettre de réduire ou supprimer des indéterminations qui subsistent dans d'autres cases. Les tables de modifications présentées en section 3.1 ont précisément pour objet de mettre en évidence toutes ces réductions ou suppressions selon la nature de l'information supplémentaire obtenue. Nous étudierons ensuite (cf. §3.2) deux modes de questionnement de Z dont on montrera qu'ils fournissent des informations supplémentaires particulièrement riches.

3.1 Tables de modifications

Pour présenter ces tables de modifications, on définit les zones suivantes de la demi-matrice $\mathcal{M}$ (voir figure 2) :

- $\mathcal{R}[k,j]$ représente l'ensemble des cases appartenant au rectangle défini par les cases $(k,1)$, (k,j) , (m,j) et $(m,1)$.
- $\mathcal{T}[k,j]$ représente l'ensemble des cases appartenant au triangle défini par les cases (k,j) , $(j+1,j)$ et $(k,k-1)$.

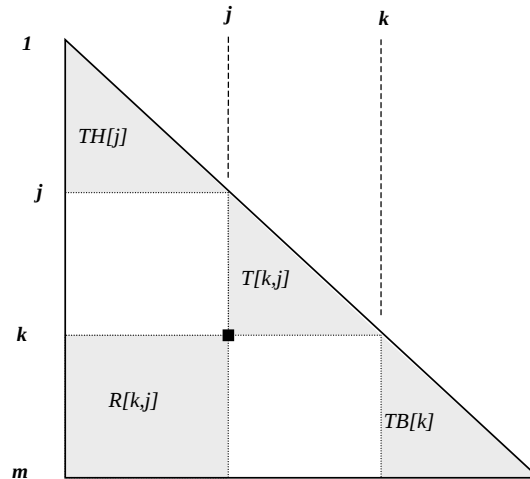


FIG. 2: Zones associées à la case (k,j) dans la demi-matrice $\mathcal{M}$

Remarques (voir figure 3) :

- Le contenu d'une case appartenant à $\mathcal{R}[k,j]$ nous donne la nature de la relation entre $a_{k'}$ et $a_{j'}$ avec $k' \geq k$ et $j' \leq j$.
- Le contenu d'une case appartenant à $\mathcal{T}[k,j]$ nous donne la nature de la relation entre $a_{k'}$ et $a_{j'}$ avec $k' \leq k$ et $j' \geq j$.

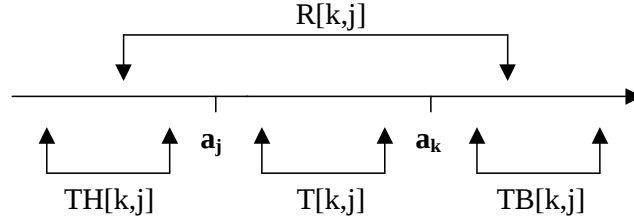


FIG. 3: Représentation des zones

Pour justifier le contenu de ces tables et le fait qu'elles prennent en compte tout ce que la condition de monotonie permet de déduire d'un supplément d'information, il nous faut maintenant étendre la relation "est au moins aussi fort que" à l'ensemble $\Omega = \{\mathcal{I}, \mathcal{Q}, \mathcal{P}, ?-, ?+, ??\}$ et énoncer sur ces bases un nouveau résultat.

Cette extension est définie par la relation binaire Φ qui est vérifiée par le couple (ω, ω') d'éléments de Ω si et seulement si :

- la moins forte des relations que représente ω est au moins aussi forte que la moins forte des relations que représente ω' ;
- la plus forte des relations que représente ω est au moins aussi forte que la plus forte des relations que représente ω' .

Par exemple : soient $\omega = ?+$ et $\omega' = ??$; la moins forte des relations que représente ω est $\mathcal{Q}$ et celle de ω' est $\mathcal{I}$; la plus forte des relations que représente ω est $\mathcal{P}$ et celle de ω' est $\mathcal{P}$; ce qui donne $\omega \Phi \omega'$.

Cette relation réflexive, antisymétrique et transitive définit un ordre partiel sur Ω . Celui-ci est représenté par le graphe de la figure 4 (pour simplifier le graphe, les arcs de transitivité n'ont pas été dessinés).

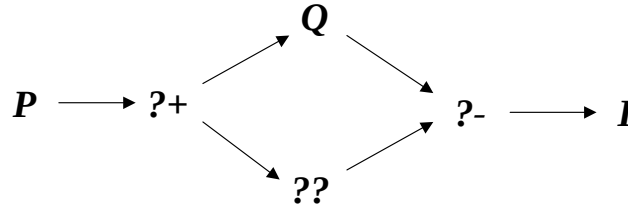


FIG. 4: L'ordre partiel Φ

Une information supplémentaire qui vient réduire ou supprimer une indétermination relative au contenu de la case (k,j) peut conduire à modifier (en prenant en compte la condition de monotonie) le contenu d'une case (k',j') dans les deux cas suivants :

1. $k' \geq k > j \geq j'$, autrement dit $(k',j') \in R[k,j]$: on doit alors avoir $C_{k',j'} \Phi C_{k,j}$ (ce qui découle de la condition de monotonie appliquée à la suite d'actions $a_{k'}, a_k, a_j, a_{j'}$).
2. $k \geq k' > j' \geq j$, autrement dit $(k',j') \in T[k,j]$: on doit alors avoir $C_{k,j} \Phi C_{k',j'}$ (ce qui découle de la condition de monotonie appliquée à la suite d'actions $a_k, a_{k'}, a_{j'}, a_j$).

Le lecteur vérifiera aisément que si la case (k',j') n'appartient ni à $R[k,j]$ ni à $T[k,j]$ alors quelle que soit la modification apportée à $C_{k,j}$, la condition de monotonie n'entraîne aucune modification de $C_{k',j'}$. Ceci justifie la proposition suivante :

Proposition 1 *Si on obtient de l'information concernant le contenu d'une case (k,j) , alors seul le contenu des cases de $\mathcal{R}[k,j]$ et $\mathcal{T}[k,j]$ est susceptible d'être modifié par application de la condition de monotonie vis-à-vis de l'ordre $\mathcal{W}$.*

Revenons aux deux cas considérés ci-dessus, il suffit de poser tout d'abord $k' = k$ dans chacun d'eux puis $j' = j$, également dans chacun d'eux, pour établir le résultat suivant :

Proposition 2 *Toute demi-matrice $\mathcal{M}$ qui vérifie la condition de monotonie vis-à-vis de l'ordre $\mathcal{W}$ est nécessairement telle que :*

- sur toute ligne k : $C_{k,h} \Phi C_{k,h'}$ pour tout $h < h'$.
- sur toute colonne j : $C_{h',j} \Phi C_{h,j}$ pour tout $h' > h$.

Les tables qui suivent ne font que traduire ces résultats. Elle concernent successivement le cas où $C_{k,j} = ?-$, $C_{k,j} = ?+$, $C_{k,j} = ??$ (dans les deux premiers cas, on suppose que l'information recueillie est conforme au contenu de la case). Chacune de ces tables explicite toutes les modifications qui peuvent être déduites de l'information acquise afin de satisfaire la condition de monotonie vis-à-vis de l'ordre $\mathcal{W}$. En remarquera que ces modifications ne sont jamais en contradiction avec le contenu des cases concernées.

Table $C_{k,j} = ?-$:

Information acquise	Modifications déduites
$\mathcal{I}$	Si $?- \in \mathcal{T}[k,j]$, alors : $?- \longrightarrow \mathcal{I}$
$\mathcal{Q}$	Si $?- \text{ ou } ?? \in \mathcal{R}[k,j]$, alors : $?- \longrightarrow \mathcal{Q}$ $?? \longrightarrow ?+$

Table $C_{k,j} = ?+$:

Information acquise	Modifications déduites
$\mathcal{Q}$	Si $?+$ ou $?? \in \mathcal{T}[k,j]$, alors : $?+ \longrightarrow \mathcal{Q}$ $?? \longrightarrow ?-$
$\mathcal{P}$	Si $?+ \in \mathcal{R}[k,j]$, on transforme : $?+ \longrightarrow \mathcal{P}$

Table $C_{k,j} = ??$:

Information acquise	Modifications déduites
$\mathcal{I}$	Si $?-$ ou $?? \in \mathcal{T}[k,j]$, alors : $?- \longrightarrow \mathcal{I}$ $?? \longrightarrow \mathcal{I}$
$\mathcal{Q}$	Si $?? \in \mathcal{R}[k,j]$, alors : $?? \longrightarrow ?+$ Si $?? \in \mathcal{T}[k,j]$, alors : $?? \longrightarrow ?-$
$\mathcal{P}$	Si $?+ \text{ ou } ?? \in \mathcal{R}[k,j]$, alors : $?+ \longrightarrow \mathcal{P}$ $?? \longrightarrow \mathcal{P}$
$?-$	Si $?? \in \mathcal{T}[k,j]$, alors : $?? \longrightarrow ?-$
$?+$	Si $?? \in \mathcal{R}[k,j]$, alors : $?? \longrightarrow ?+$

La proposition suivante peut être établie aisément à partir de ce qui précède :

Proposition 3 *L'obtention d'information concernant le contenu d'une case quelconque du triangle $\mathcal{T}[k,j]$ n'induit aucune information sur le contenu des cases des triangles $\mathcal{TH}[j]$ et $\mathcal{TB}[k]$ (cf. figure 2).*

3.2 Deux modes de questionnement de Z

Considérons une case (k,j) contenant une indétermination; on pourrait songer à interroger directement Z sur la nature de la relation qui, selon lui, doit exister entre a_k et a_j et à propager ensuite l'information recueillie en utilisant les tables du 3.1. On peut craindre qu'il faille poser beaucoup de questions de ce type car chacune d'elle n'interroge Z que sur le contenu d'une seule case. On pourrait chercher à ordonner les couples d'actions à prendre en compte en fonction de la propagation de l'information obtenue de manière à diminuer le nombre de questions. Les couples d'actions soumises à Z risqueraient dans ce cas d'être très variables d'une question à l'autre, ce qui pourrait demander à Z un effort de concentration assez difficile. Les deux modes d'interrogation présentés ci-après reposent

sur des questions qui, tout en restant simples et aisément intelligibles par Z , l'amène à fournir une information qui dépasse le simple contenu d'une case. La façon dont il convient d'enchaîner ces questions est étudiée dans la section suivante.

3.2.1 Question de type $\mathcal{P}(a_j)$

Par définition, ce type de question vise à déterminer, parmi les actions qui suivent une action a_j dans l'ordre $\mathcal{W}$, la première (si elle existe) qui est strictement préférée à a_j . On la note $P(a_j) = a_{k(j)}$. Une telle question n'apporte de l'information que si la colonne j de la matrice comporte au moins un $?+$ ou un $??$. Nous dirons dans ces conditions que l'action a_j présente une **indétermination de type $\mathcal{P}$** .

Pour déterminer l'action de type $a_{k(j)}$ (si elle existe), l'interrogation de Z peut être par exemple conduite par encadrement; accepte-il :

- $a_m \mathcal{P}a_j$; sinon, $a_{k(j)}$ n'existe pas; si oui, poursuivre par exemple avec
- $a_{j+1} \mathcal{P}a_j$; si oui terminé; sinon,
- $a_{m-1} \mathcal{P}a_j$, etc.

Une procédure de détermination plus directe peut également être envisagée. De même, au lieu de procéder par encadrement, une approche de type dichotomique peut être envisagée. Cependant, celle-ci ne présente de l'intérêt que dans le cas où l'intervalle $[a_m, a_j]$ comporte un nombre élevé d'actions, et d'autre part, contrairement avec la procédure par encadrement, chaque question n'est pas associée à un test d'arrêt.

Dès l'instant où $a_{k(j)}$ a été déterminée, l'information obtenue peut être propagée comme suit (d'après la proposition 2) :

L'obtention de l'information $P(a_j) = a_{k(j)}$ permet les déductions suivantes :

1. Si une case $(k', j') \in \mathcal{R}[k(j), j]$, alors $C_{k', j'} = \mathcal{P}$
2. Si une case $(k', j') \in \mathcal{T}[k(j) - 1, j]$ avec :

$$\begin{cases} C_{k', j'} = ?? \text{ alors, } C_{k', j'} = ?- \\ C_{k', j'} = ?+ \text{ alors, } C_{k', j'} = \mathcal{Q} \end{cases}$$

Si $a_{k(j)}$ n'existe pas, la propagation ne concerne que le triangle $T[m, j]$ auquel il convient d'appliquer les modifications du point 2 ci-dessus. Dans tous les cas, aucune autre modification n'est possible (il est facile de le vérifier à partir de la proposition 1 et des tables du 3.1).

3.2.2 Question de type $\mathcal{I}(a_j)$

Par définition, ce type de question vise à déterminer, parmi les actions qui suivent une action a_j dans l'ordre $\mathcal{W}$, la dernière qui est indifférente à a_j . On la note $\mathcal{I}(a_j) = a_{h(j)}$. On peut avoir $h(j) = j$ et on a nécessairement $h(j) < k(j)$. Une telle question n'apporte de l'information que si la colonne j de la matrice comporte au moins un $?-$ ou un $??$. Nous dirons dans ces conditions que l'action a_j présente une **indétermination de type $\mathcal{I}$** .

Pour déterminer l'action de type $a_{h(j)}$, on peut ici encore interroger Z de façon directe ou en procédant par encadrement. Dès l'instant où $a_{h(j)}$ a été déterminée, l'information obtenue peut être propagée comme suit et ceci de façon exhaustive d'après les tables du 3.1 :

1. Si une case $(k', j') \in \mathcal{T}[h(j), j]$, alors $C_{k', j'} = \mathcal{I}$
2. Si une case $(k', j') \in \mathcal{R}[h(j) + 1, j]$ avec :
$$\begin{cases} C_{k', j'} = ??, \text{ alors } C_{k', j'} = ?+ \\ C_{k', j'} = ?- , \text{ alors } C_{k', j'} = \mathcal{Q} \end{cases}$$

Faisons observer que, dès l'instant où Z a répondu aux questions de type $\mathcal{P}(a_j)$ et $\mathcal{I}(a_j)$ (lorsqu'elles présentent de l'intérêt), toutes les indéterminations de la colonne j de la matrice ont disparu puisque, $\forall i$ tel que $h(j) < i < k(j)$, on a nécessairement été conduit à $C_{i, j} = \mathcal{Q}$. Il s'ensuit que :

Proposition 4 *L'obtention des informations de type $\mathcal{P}(a_j)$ et $\mathcal{I}(a_j)$ pour toute action qui présente une indétermination permet d'obtenir une matrice n'ayant aucune indétermination.*

Proposition 5 *Soit n_1 le nombre d'actions qui présentent une indétermination forte (??) et n_2 le nombre d'actions qui présentent uniquement une indétermination faible de type "+" (?+). La borne supérieure du nombre de questions à poser à Z pour éliminer toutes les indéterminations est de : $2n_1 + n_2$.*

4 Protocoles de construction d'un pseudo-ordre

Pour éliminer toutes les indéterminations de la demi-matrice $\mathcal{M}$ et définir un pseudo-ordre unique en faisant intervenir des informations de type $(\mathcal{I}(a_j)$ et $\mathcal{P}(a_j))$, nous présentons ci-après deux protocoles. Le premier privilégie la clarté du processus de questionnement de Z alors que le deuxième vise à réduire le nombre total de questions à poser à Z .

Les deux protocoles sont présentés en supposant que les réponses obtenues respectent la condition de monotonie vis-à-vis de l'ordre $\mathcal{W}$ (cf. théorème 1). La détection ainsi que le traitement des informations non conformes seront examinés dans la dernière sous-section. Au préalable, nous présentons quelques considérations préliminaires.

4.1 Définition et remarques préliminaires

Définition 4 *On considère une chaîne relationnelle sous-diagonale dont la première case et la dernière case sont respectivement $(j + n + 1, j + n)$, $(j + 1, j)$ qui ne contient aucune relation $\mathcal{P}$ et telle que : $C_{j+n+2, j+n+1} = \mathcal{P}$ (si $j + n + 2 \leq m$) et $C_{j, j-1} = \mathcal{P}$ (si $j \geq 2$).*

Par définition, le triangle délimité par les cases $(j + n + 1, j + n - 1)$, $(j + 2, j)$ et $(j + n + 1, j)$ est appelé triangle d'indétermination primaire. Il est dit de dimension n ; a_j en est la première action.

Par exemple, $a_5 \mathcal{Q} a_4 \mathcal{I} a_3 \mathcal{Q} a_2 \mathcal{I} a_1$ est une chaîne sous-diagonale de longueur 4 qui engendre un triangle d'indétermination primaire de dimension 3. L'action a_1 est la première action de ce triangle (voir figure 5).

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
a_1	$\mathcal{I}$					
a_2	$\mathcal{I}$	$\mathcal{I}$				
a_3	?+	$\mathcal{Q}$	$\mathcal{I}$			
a_4	?+	?+	$\mathcal{I}$	$\mathcal{I}$		
a_5	?+	?+	?+	$\mathcal{Q}$	$\mathcal{I}$	
a_6	$\mathcal{P}$	$\mathcal{P}$	$\mathcal{P}$	$\mathcal{P}$	$\mathcal{P}$	$\mathcal{I}$

FIG. 5: Triangle d'indétermination primaire

Il découle de la construction de la matrice (application de la condition de monotonie, cf. §2.3) qu'un triangle d'indétermination primaire, avant toute acquisition (traitement) d'information supplémentaire, ne contient pas de case dont le contenu présente une indétermination "?-".

D'après la proposition 3, si, dans une demi-matrice, il existe plusieurs triangles d'indétermination primaire, éliminer l'indétermination sur un des triangles n'a aucun effet sur les autres. On peut donc traiter les triangles dans n'importe quel ordre et de façon indépendante les uns des autres.

Dans les deux protocoles qui vont suivre, les triangles d'indétermination primaire sont traités les uns après les autres. Leur détection étant immédiate, les protocoles sont présentés pour un triangle quelconque.

4.2 Première approche

Cette approche privilégie la clarté du processus de questionnement de Z en regroupant les questions de même type.

Dans une première étape, on interroge Z afin qu'il détermine $(\mathcal{P}(a_j))$ pour chacune des actions du triangle d'indétermination en les considérant dans l'ordre $\mathcal{W}$.

Une fois ces informations obtenues, les seules indéterminations qui peuvent subsister dans le triangle sont de type "?-". Celles-ci s'organisent en triangles qu'on appellera triangles d'indétermination secondaire. La seconde étape a pour objet de les détecter.

Ces triangles sont également indépendants; ils peuvent être traités dans n'importe quel ordre. La troisième et dernière étape consiste à éliminer ces triangles d'indétermination secondaire par l'acquisition des informations de type $(\mathcal{I}(a_j))$ pour toute action appartenant à ces triangles.

Cette approche peut être formulée comme suit :

On considère un triangle d'indétermination primaire de dimension n :

– *Etape 1* :

- Trouver $\mathcal{P}(a_j) = a_{k(j)}$ (a_j : première action du triangle)
- Pour $i \in \{1, \dots, n-1\}$: Trouver $\mathcal{P}(a_{j+i}) = a_{k(j+i)}$

– *Etape 2* :

Lister les triangles d'indétermination secondaire.

– *Etape 3* :

Pour chaque triangle secondaire de dimension n' :

- Trouver $\mathcal{I}(a_j) = a_{h(j)}$ (a_j : première action du triangle)
- Pour $i \in \{1, \dots, n'-1\}$: Trouver $\mathcal{I}(a_{j+i}) = a_{h(j+i)}$

4.3 Deuxième approche

Afin de mettre en évidence l'intérêt de cette seconde approche, on va montrer sur quelques exemples que l'ordre des questions (type $\mathcal{P}(a_j)$ et $\mathcal{I}(a_j)$ et action traitée) est susceptible de modifier le nombre de questions qu'il est nécessaire de poser.

Exemple 2 Soit $\mathcal{A} = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$

Avec : $a_5 \mathcal{I} a_4 \mathcal{I} a_3 \mathcal{I} a_2 \mathcal{I} a_1$

Matrice représentant l'information de base

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
a_1	$\mathcal{I}$				
a_2	$\mathcal{I}$	$\mathcal{I}$			
a_3	??	$\mathcal{I}$	$\mathcal{I}$		
a_4	??	??	$\mathcal{I}$	$\mathcal{I}$	
a_5	??	??	??	$\mathcal{I}$	$\mathcal{I}$

Matrice complète

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
a_1	$\mathcal{I}$				
a_2	$\mathcal{I}$	$\mathcal{I}$			
a_3	$\mathcal{I}$	$\mathcal{I}$	$\mathcal{I}$		
a_4	$\mathcal{I}$	$\mathcal{I}$	$\mathcal{I}$	$\mathcal{I}$	
a_5	$\mathcal{I}$	$\mathcal{I}$	$\mathcal{I}$	$\mathcal{I}$	$\mathcal{I}$

Si, au lieu de demander l'information $\mathcal{P}(a_1)$, on obtient l'information $\mathcal{I}(a_1) = a_5$, alors la matrice est totalement définie.

Exemple 3 Soit $\mathcal{A} = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$

Avec : $a_5 \mathcal{Q} a_4 \mathcal{I} a_3 \mathcal{I} a_2 \mathcal{I} a_1$

Matrice représentant l'information de base

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
a_1	$\mathcal{I}$				
a_2	$\mathcal{I}$	$\mathcal{I}$			
a_3	??	$\mathcal{I}$	$\mathcal{I}$		
a_4	??	??	$\mathcal{I}$	$\mathcal{I}$	
a_5	?+	?+	?+	$\mathcal{Q}$	$\mathcal{I}$

Matrice complète

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
a_1	$\mathcal{I}$				
a_2	$\mathcal{I}$	$\mathcal{I}$			
a_3	$\mathcal{I}$	$\mathcal{I}$	$\mathcal{I}$		
a_4	$\mathcal{I}$	$\mathcal{I}$	$\mathcal{I}$	$\mathcal{I}$	
a_5	$\mathcal{P}$	$\mathcal{P}$	$\mathcal{P}$	$\mathcal{Q}$	$\mathcal{I}$

Si, au lieu d'obtenir les informations $\mathcal{P}(a_1)$, $\mathcal{I}(a_1)$, $\mathcal{P}(a_2)$ et $\mathcal{P}(a_3)$, on obtient les informations $\mathcal{I}(a_1)$ et $\mathcal{P}(a_3)$, alors la matrice est totalement définie.

Cette seconde approche vise à tirer parti de cette influence de l'ordre des questions afin d'en réduire le nombre. Pour cela, on se base sur la nature des transformations sur la matrice qu'induit l'acquisition de chaque type d'information.

- Une information de type $\mathcal{I}(a_j)$ permet de définir le contenu de toutes les cases appartenant à $\mathcal{T}[h(j), j]$ par une relation d'indifférence ($\mathcal{I}$). On propose de commencer par obtenir ce type d'information pour les premières actions du triangle d'indétermination.
- Une information de type $\mathcal{P}(a_j)$ permet de définir le contenu de toutes les cases appartenant à $\mathcal{R}[k(j), j]$ par une relation de préférence stricte ($\mathcal{P}$). On propose d'obtenir ce type d'information en partant des actions du milieu du triangle d'indétermination.

L'algorithme commence en traitant la première action du triangle d'indétermination primaire (a_j). Si elle ne présente que de l'indétermination "?+", il suffit d'obtenir l'information de type $\mathcal{P}(a_j)$ pour éliminer toutes les indéterminations concernant le contenu des cases appartenant à la colonne j (cf. §3.2). Si elle présente d'autres types d'indétermination, on propose d'obtenir l'information $\mathcal{I}(a_j) = a_{h(j)}$, ce qui permet d'éliminer toutes les indéterminations du triangle $\mathcal{T}[h(j), j]$, puis l'information $\mathcal{P}(a_{-1+h(j)}) = a_{k(-1+h(j))}$, ce qui permet d'éliminer toutes les indéterminations du rectangle $\mathcal{R}[k(-1+h(j)), -1+h(j)]$. On propose ensuite d'éliminer les indéterminations du rectangle défini par les cases $(1+h(j), j)$, $(1+h(j), -1+h(j))$, $(-1+k(-1+h(j)), j)$, $(-1+k(-1+h(j)), -1+h(j))$ en obtenant, si nécessaire, successivement les informations $\mathcal{I}(a_{-1+h(j)})$, $\mathcal{P}(a_j)$ et $\forall i \in \{j+1, \dots, -2+h(j)\}$ $\mathcal{I}(a_i)$ et $\mathcal{P}(a_i)$ (cf. Figure 6). On poursuit l'algorithme en traitant l'action $a_{h(j)}$.

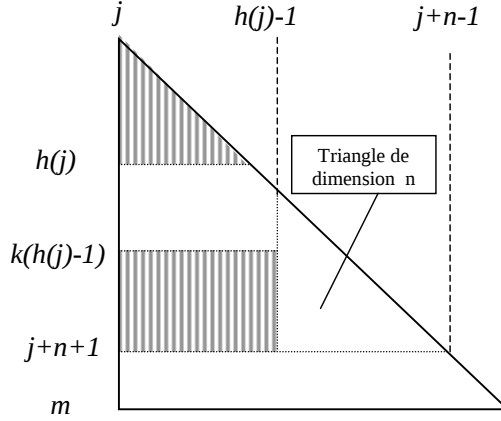


FIG. 6: Protocole de construction d'un pseudo-ordre : deuxième approche

Cette approche peut être formalisée comme suit :

On considère un triangle d'indétermination primaire de dimension n :

1. On pose $a_l = a_j$ (a_j : première action du triangle)
2. – Si a_l ne présente que de l'indétermination de type "?+" :

$$\begin{cases} \text{trouver } \mathcal{P}(a_l) = a_{k(l)} \\ \text{on pose } l = l + 1; \\ \text{si } l \leq (j + n - 1), \text{ aller en (2).} \end{cases}$$

– Sinon :

$$(a) \text{ trouver } \begin{cases} \mathcal{I}(a_l) = a_{h(l)} \\ \mathcal{P}(a_{-1+h(l)}) = a_{k(-1+h(l))} \end{cases} \quad \text{si } \exists i, C_{i,-1+h(l)} \in \{??, ?+\}$$

$$(b) \text{ trouver } \begin{cases} \mathcal{I}(a_{-1+h(l)}) & \text{si } \exists i, C_{i,-1+h(l)} \in \{??, ?-\} \\ \mathcal{P}(a_l) & \text{si } \exists i, C_{i,l} \in \{??, ?+\} \end{cases}$$

$$(c) \text{ pour } i = l + 1, \dots, -2 + h(l) \text{ trouver } \begin{cases} \mathcal{I}(a_i) & \text{si } \exists i, C_{i,l} \in \{??, ?-\} \\ \mathcal{P}(a_i) & \text{si } \exists i, C_{i,l} \in \{??, ?+\} \end{cases}$$

(d) on pose $l = h(l)$; si $l \leq (j + n - 1)$, aller en (2).

Cet algorithme conduit de façon générale (en raison des remarques faites au début du 4.3) à poser un nombre de questions qui devrait, en principe, être plus qu'avec le premier algorithme. On pourra cependant constater, sur l'exemple suivant, que, dans certains cas particuliers, ce nombre peut être légèrement supérieur.

Exemple 4 Soit $\mathcal{A} = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$

Avec : $a_5 \mathcal{Q} a_4 \mathcal{I} a_3 \mathcal{I} a_2 \mathcal{I} a_1$

Matrice représentant l'information de base

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
a_1	$\mathcal{I}$				
a_2	$\mathcal{I}$	$\mathcal{I}$			
a_3	??	$\mathcal{I}$	$\mathcal{I}$		
a_4	??	??	$\mathcal{I}$	$\mathcal{I}$	
a_5	?+	?+	?+	$\mathcal{Q}$	$\mathcal{I}$

Matrice complète

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
a_1	$\mathcal{I}$				
a_2	$\mathcal{I}$	$\mathcal{I}$			
a_3	$\mathcal{I}$	$\mathcal{I}$	$\mathcal{I}$		
a_4	$\mathcal{I}$	$\mathcal{I}$	$\mathcal{I}$	$\mathcal{I}$	
a_5	$\mathcal{Q}$	$\mathcal{Q}$	$\mathcal{Q}$	$\mathcal{Q}$	$\mathcal{I}$

- L'utilisation du premier algorithme conduit à poser deux questions ($\mathcal{P}(a_1)$ et $\mathcal{I}(a_1)$). $a_{k(1)}$ n'existe pas, ce qui entraîne la transformation de toutes les indéterminations fortes (??) en ?– et les indéterminations ?+ en préférence faible $\mathcal{Q}$.
 $a_{h(1)} = 4$, ce qui entraîne la transformation de toutes les indétermination ?– en indifférence $\mathcal{I}$.
- le deuxième algorithme conduit à poser trois questions ($\mathcal{I}(a_1)$, $\mathcal{P}(a_3)$ et $\mathcal{P}(a_1)$).
 $a_{h(1)} = 4$, ce qui entraîne la transformation de toutes les indétermination ?? en indifférence $\mathcal{I}$.
 $a_{k(3)}$ n'existe pas, ce qui entraîne la transformation de la case (5,3) en préférence faible $\mathcal{Q}$.
 $a_{k(1)}$ n'existe pas, ce qui entraîne la transformation des cases (5,1) et (5,2) en préférence faible $\mathcal{Q}$.

4.4 Compatibilité de l'information recueillie avec le modèle du pseudo-ordre

La proposition suivante découle aisément de la proposition 2.

Proposition 6 La condition nécessaire et suffisante pour que les informations recueillies respectent la condition de monotonie vis-à-vis de l'ordre $\mathcal{W}$ est que :

$$\forall a_i, a_j \in \mathcal{A} \text{ telles que } i < j, \text{ alors } \begin{cases} k(i) \leq k(j) \\ h(i) \leq h(j) \end{cases}$$

Si les réponses données par Z respectent les conditions de la proposition 6, alors la matrice obtenue définit un pseudo-ordre. Dans le cas contraire, on doit examiner si les incompatibilités constatées peuvent être corrigées par une simple permutation d'actions déclarées indifférentes dans l'information de base. En effet, si on suppose que le modèle de préférence de Z peut être représenté par un pseudo-ordre, alors il existe (partie (ii) du théorème 1) un ordre complet $\mathcal{W}'$ vis-à-vis duquel la demi-matrice $\mathcal{M}$ respecte la condition

de monotonie. Cet ordre peut être identique à l'ordre $\mathcal{W}$ ou ne différer de celui-ci que par des permutations d'actions dites indifférentes.

Cette permutation d'actions est impossible lorsque l'on est dans le contexte n°2 (cf. §1). Dans une optique constructive, on peut poser les questions à Z en mettant en évidence des intervalles qui, d'après la proposition 6, garantissent la compatibilité avec la condition de monotonie. Pour chaque question posée ($\mathcal{P}(a_j)$ ou $\mathcal{I}(a_j)$), on proposera un sous-ensemble d'actions. Par exemple, soit trois actions a_i , a_j et a_l avec $i < j < l$. Si on a l'information suivante :

$$\begin{cases} \mathcal{P}(a_i) = a_{k(i)} \\ \mathcal{P}(a_l) = a_{k(l)} \end{cases}$$

Pour obtenir l'information $\mathcal{P}(a_j)$, on proposera à Z les actions appartenant à l'intervalle $[a_{k(i)}, a_{k(l)}]$.

Dans le contexte n°1 (cf. §1), si des incompatibilités avec la monotonie sont constatées, on doit se demander s'il existe un ordre $\mathcal{W}'$ qui peut être déduit de $\mathcal{W}$ par simples permutations d'actions indifférentes. Cependant, ces permutations ne doivent pas engendrer d'autres incompatibilités.

On se place ici dans le cas où les informations acquises compatibles avec la structure de pseudo-ordre n'ont pas à être remises en cause dans la suite du processus (bien que l'ordre des questions ait une influence sur les réponses de Z).

Sachant que la permutation des actions a_j et a_{j+1} dans le rangement se traduit sur la demi-matrice $\mathcal{M}$ par la permutation des deux lignes j et $j+1$ et des deux colonnes j et $j+1$, les incompatibilités peuvent être détectées et corrigées dans deux cas :

1. Cas 1 : on acquiert des informations supplémentaires sur deux actions consécutives et indifférentes a_{j+1} et a_j . Pour que des incompatibilités constatées puissent être corrigées sans en engendrer d'autres, il faut que les conditions suivantes soient vérifiées :

$$\begin{cases} \forall i \in \{1, \dots, j-2\}, \text{ on a } C_{j,i} = C_{j+1,i} \\ P(a_j) = P(a_{j+1}) \text{ si ces informations ont été obtenues} \\ I(a_j) = I(a_{j+1}) \text{ si ces informations ont été obtenues} \end{cases} \quad (3)$$

Pour obtenir les informations $\mathcal{P}(a_j)$ et $\mathcal{P}(a_{j+1})$, on peut ici encore adopter une attitude constructive en proposant à Z des intervalles; dans ce cas, au lieu d'utiliser les intervalles $[a_{k(j-1)}, a_{k(j+1)}]$ et $[a_{k(j)}, a_{k(j+2)}]$, il convient d'utiliser le même intervalle $[a_{k(j-1)}, a_{k(j+2)}]$: on laisse ainsi à Z la possibilité de répondre $k(j) > k(j+1)$. Cette réponse conduira à un ordre $\mathcal{W}'$ dans lequel a_j et a_{j+1} sont permutées. Dans ce cas, il faut obtenir la nature des relations, si elles ne sont pas définies, entre les actions (a_{j+1}, a_{j-1}) et (a_{j+2}, a_j) . Ces relations doivent respecter la condition de monotonie; elles doivent être au plus aussi fortes que celles entre (a_j, a_{j-1}) pour la première et (a_{j+2}, a_{j+1}) pour la deuxième.

On procédera de la même manière pour obtenir les informations $\mathcal{I}(a_j)$ et $\mathcal{I}(a_{j+1})$.

2. Cas 2 : on acquiert des informations supplémentaires sur deux actions consécutives et non indifférentes a_{j+1} et a_j . Pour que des incompatibilités constatées puissent être corrigées sans en engendrer d'autres, il faut que les conditions (4) ou (5) suivantes soient vérifiées :

$$\left\{ \begin{array}{l} h(j+1) = h(j) - 1 \\ a_{h(j)} \mathcal{I} a_{h(j+1)} \\ \forall i \in \{1, \dots, j-1\} \cup \{j+2, -3+h(j)\}, \text{ on a } C_{h(j),i} = C_{h(j+1),i} \\ P(a_{h(j)}) = P(a_{h(j+1)}) \text{ si ces informations ont été obtenues} \\ I(a_{h(j)}) = I(a_{h(j+1)}) \text{ si ces informations ont été obtenues} \end{array} \right. \quad (4)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} k(j+1) = k(j) - 1 \\ a_{k(j)} \mathcal{I} a_{k(j+1)} \\ \forall i \in \{1, \dots, j-1\} \cup \{j+2, -3+k(j)\}, \text{ on a } C_{k(j),i} = C_{k(j+1),i} \\ P(a_{k(j)}) = P(a_{k(j+1)}) \text{ si ces informations ont été obtenues} \\ I(a_{k(j)}) = I(a_{k(j+1)}) \text{ si ces informations ont été obtenues} \end{array} \right. \quad (5)$$

Pour obtenir les informations $\mathcal{P}(a_j)$ et $\mathcal{P}(a_{j+1})$, on peut ici encore adopter une attitude constructive en proposant à Z des intervalles; dans ce cas, au lieu d'utiliser les intervalles $[a_{k(j-1)}, a_{k(j+1)}]$ et $[a_{k(j)}, a_{k(j+2)}]$, il convient d'utiliser les intervalles $[a_{k(j-1)}, a_{1+k(j+1)}]$ et $[a_{-1+k(j)}, a_{k(j+2)}]$: on laisse ainsi à Z la possibilité de répondre $k(j) = 1+k(j+1)$ (si $a_{k(j)} \mathcal{I} a_{k(j+1)}$). Cette réponse conduira à un ordre $\mathcal{W}'$ dans lequel $a_{k(j)}$ et $a_{k(j+1)}$ sont permutées. Dans ce cas, il faut obtenir la nature des relations, si elles ne sont pas définies, entre les actions $(a_{k(j)}, a_{-2+k(j)})$ et $(a_{1+k(j)}, a_{k(j+1)})$. Ces relations doivent respecter la condition de monotonie.

On procédera de la même manière pour obtenir les informations $\mathcal{I}(a_j)$ et $\mathcal{I}(a_{j+1})$.

5 Comment définir un pseudo-critère représentatif du pseudo-ordre obtenu

Après un examen relativement rapide du cas général, nous traiterons plus en profondeur un cas particulier important.

5.1 A propos du cas général

On se place ici dans l'un quelconque des deux contextes définis en introduction et l'on suppose que les réponses de Z ont permis de construire un pseudo-ordre $(\mathcal{I}, \mathcal{Q}, \mathcal{P})$ représentatif de ses préférences sur $\mathcal{A}$. Il s'agit maintenant de définir trois fonctions g , q et p qui fournissent une représentation de ce pseudo-ordre facile à manipuler. Ces fonctions sont reliées au s.r.p. $(\mathcal{I}, \mathcal{Q}, \mathcal{P})$ comme on l'a précisé en introduction (cf. relations (1)).

La détermination d'une représentation numérique des préférences de Z (le triplet de fonctions) permettra l'utilisation des procédures d'agrégation multicritère prenant appui sur le modèle du pseudo-critère. Il est indispensable de définir ces trois fonctions pour attribuer une valeur à des indices tels que ceux de concordance, non discordance, crédibilité, ... qui interviennent dans les méthodes de type ELECTRE (cf. Brans *et al.* (1984), Roy et Bouyssou (1993), Vincke (1992)).

On peut très facilement définir les trois fonctions g , q et p en procédant comme suit :

Poser $\forall a_j \in \mathcal{A} : g(a_j) = x_j$,

on peut facilement définir les seuils variables en posant :

$$\forall a_j \in \mathcal{A} : \begin{cases} q[x_j] = x_{h(j)} - x_j \\ p[x_j] = x_{k(j)} - x_j - \varepsilon \text{ (avec } 0 < \varepsilon < 1) \end{cases}$$

avec :

- $\mathcal{P}(a_j) = a_{k(j)}$: la première action mieux classée que a_j qui lui est préférée
- $\mathcal{I}(a_j) = a_{h(j)}$: la dernière action mieux classée a_j qui lui est indifférente

Par exemple, si on pose, $\forall a_j \in \mathcal{A} : g(a_j) = j$ (la performance d'une action est donnée par son rang dans le rangement), on obtient les seuils de discrimination suivants :

$$\forall a_j \in \mathcal{A} : \begin{cases} q[j] = h(j) - j \\ p[j] = k(j) - j - \varepsilon \end{cases}$$

Cependant, pour pouvoir utiliser ces seuils dans les logiciels existants, il faut que ceux-ci soient des fonctions affines (cf. Roy (1985), Vallée et Zielniewicz (1994), Mousseau *et al.* (1999), Aït Younes *et al.* (2000)).

La recherche d'une solution repose donc sur l'étude du système suivant :

$$\forall j \in \{1 \dots m-1\} : \begin{cases} x_{h(j)} - x_j & \leq & \alpha_q x_j + \beta_q \\ x_{1+h(j)} - x_j & > & \alpha_q x_j + \beta_q \\ x_{-1+k(j)} - x_j & \leq & \alpha_p x_j + \beta_p \\ x_{k(j)} - x_j & > & \alpha_p x_j + \beta_p \\ x_j & < & x_{j+1} \end{cases}$$

Ce système est non linéaire car des produits de variables α_q (ou α_p) et x_j apparaissent au second membre.

Il convient d'ajouter à ce système les contraintes suivantes sur les inconnues α_q , β_q , α_p , β_p , x_1 et x_m pour assurer la cohérence des fonctions seuils (cf. Aït Younes *et al.* (2000)) :

$$\begin{cases} \alpha_q \geq -1 \\ \alpha_p \geq -1 \\ \alpha_q x_1 + \beta_q \leq \alpha_p x_1 + \beta_p \\ \alpha_q x_m + \beta_q \leq \alpha_p x_m + \beta_p \end{cases}$$

On ne traite ci-après que du cas particulier d'une représentation numérique du pseudo-ordre avec des seuils constants ($\alpha_q = \alpha_p = 0$).

5.2 Cas particulier où il existe une représentation avec deux seuils constants

Après avoir énoncé un nouveau résultat pour caractériser ce cas, nous indiquerons comment la fonction g et les deux constantes q et p peuvent être obtenues.

5.2.1 Nouvelle caractérisation des pseudo-ordres à seuils constants

Plusieurs travaux ont été réalisés sur l'existence d'une représentation d'un pseudo-ordre avec deux seuils constants : Cozzens et Roberts (1982); Roubens et Vincke (1985); Roy et Vincke (1987); Doignon (1987). En se basant sur ces travaux, nous présentons une condition nécessaire et suffisante pour l'existence d'une telle représentation adaptée à notre contexte.

Définition 5 Soit λ^* la longueur de la plus petite chaîne relationnelle (b_{λ^*+j}, b_j) ne contenant que des relations $\mathcal{I}$ avec $b_{\lambda^*+j} \mathcal{P} b_j$.

Définition 6 Soit μ^* la longueur de la plus grande chaîne relationnelle (c_{μ^*+j}, c_j) ne contenant que des relations $\mathcal{Q}$ avec $c_{\mu^*+j} \mathcal{Q} c_j$.

Prenant appui sur ces deux définitions, nous avons pu établir le résultat suivant (cf. Aït Younes (2001) page 86) :

Théorème 2 On considère un ensemble $\mathcal{A}$ sur lequel est défini :

- un ordre complet $\mathcal{W}$,
- un pseudo-ordre $(\mathcal{I}, \mathcal{Q}, \mathcal{P})$ vérifiant les relations (2) du théorème 1 et la condition de monotonie vis-à-vis de l'ordre $\mathcal{W}$.

Une condition nécessaire et suffisante pour que ce pseudo-ordre puisse être représenté par un pseudo-critère avec deux seuils q et p constants et des évaluations $g(a)$ conformes à l'ordre $\mathcal{W}$ est que :

1. $\mu^* < \lambda^*$,
2. $\mathcal{I} \mathcal{P} \mathcal{Q} \cap \mathcal{Q} = \mathcal{Q} \mathcal{P} \mathcal{I} \cap \mathcal{Q} = \emptyset$.

Pour illustrer ce résultat, on présente deux exemples pour lesquels les conditions ne sont pas vérifiées (pour des exemples vérifiant ces conditions, voir Aït Younes (2001) page 92).

Exemple 5 Soit $\mathcal{A} = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8\}$ l'ensemble des actions rangées de la plus mauvaise à la meilleure.

La nature de la relation de préférence entre tout couple d'actions est donnée par la matrice suivante :

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8
a_1	$\mathcal{I}$							
a_2	$\mathcal{P}$	$\mathcal{I}$						
a_3	$\mathcal{P}$	$\mathcal{I}$	$\mathcal{I}$					
a_4	$\mathcal{P}$	$\mathcal{Q}$	$\mathcal{Q}$	$\mathcal{I}$				
a_5	$\mathcal{P}$	$\mathcal{Q}$	$\mathcal{Q}$	$\mathcal{I}$	$\mathcal{I}$			
a_6	$\mathcal{P}$	$\mathcal{P}$	$\mathcal{Q}$	$\mathcal{Q}$	$\mathcal{I}$	$\mathcal{I}$		
a_7	$\mathcal{P}$	$\mathcal{P}$	$\mathcal{P}$	$\mathcal{P}$	$\mathcal{Q}$	$\mathcal{I}$	$\mathcal{I}$	
a_8	$\mathcal{P}$	$\mathcal{P}$	$\mathcal{P}$	$\mathcal{P}$	$\mathcal{Q}$	$\mathcal{Q}$	$\mathcal{Q}$	$\mathcal{I}$

- Pour λ^* : $a_7 \mathcal{I} a_6 \mathcal{I} a_5 \mathcal{I} a_4$ et $a_7 \mathcal{P} a_4$; on a donc $\lambda^* = 3$.
- Pour μ^* : $\begin{cases} a_8 \mathcal{Q} a_7 \mathcal{Q} a_5 & \text{et} & a_8 \mathcal{Q} a_5 \\ a_6 \mathcal{Q} a_4 \mathcal{Q} a_3 & \text{et} & a_6 \mathcal{Q} a_3 \end{cases}$; on a donc $\mu^* = 2$.

La première condition est vérifiée : $\lambda^* > \mu^*$.

Par contre, la deuxième condition n'est pas vérifiée car on a : $a_6 \mathcal{I} a_7 \mathcal{P} a_4 \mathcal{Q} a_3$ et $a_6 \mathcal{Q} a_3$.

Exemple 6 Soit $\mathcal{A} = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8\}$ l'ensemble des actions rangées de la plus mauvaise à la meilleure.

La nature de la relation de préférence entre tout couple d'actions est donnée par la matrice suivante :

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8
a_1	$\mathcal{I}$							
a_2	$\mathcal{P}$	$\mathcal{I}$						
a_3	$\mathcal{P}$	$\mathcal{I}$	$\mathcal{I}$					
a_4	$\mathcal{P}$	$\mathcal{Q}$	$\mathcal{Q}$	$\mathcal{I}$				
a_5	$\mathcal{P}$	$\mathcal{Q}$	$\mathcal{Q}$	$\mathcal{I}$	$\mathcal{I}$			
a_6	$\mathcal{P}$	$\mathcal{P}$	$\mathcal{Q}$	$\mathcal{Q}$	$\mathcal{I}$	$\mathcal{I}$		
a_7	$\mathcal{P}$	$\mathcal{P}$	$\mathcal{P}$	$\mathcal{P}$	$\mathcal{P}$	$\mathcal{I}$	$\mathcal{I}$	
a_8	$\mathcal{P}$	$\mathcal{P}$	$\mathcal{P}$	$\mathcal{P}$	$\mathcal{P}$	$\mathcal{Q}$	$\mathcal{Q}$	$\mathcal{I}$

- Pour λ^* : $\begin{cases} a_7 \mathcal{I} a_6 \mathcal{I} a_5 \mathcal{I} a_4 & \text{et} & a_7 \mathcal{P} a_4 \\ a_7 \mathcal{I} a_6 \mathcal{I} a_5 & \text{et} & a_7 \mathcal{P} a_5 \end{cases}$; on a donc $\lambda^* = 2$.
- Pour μ^* : $a_6 \mathcal{Q} a_4 \mathcal{Q} a_3$ et $a_6 \mathcal{Q} a_3$; on a donc $\mu^* = 2$.

La condition $\lambda^* > \mu^*$ n'est pas vérifiée.

Si on veut tester, directement sur la matrice, l'existence d'une représentation avec seuils constants, alors un algorithme est nécessaire soit pour mettre en évidence l'existence d'une configuration interdite soit pour prouver qu'il n'en existe pas.

Dans certains cas particuliers (cf. Aït Younes (2001) page 91), la détermination d'une représentation avec seuils constants est immédiates. Dans le cas général, pour s'assurer qu'elle existe, et surtout pour en obtenir une, il peut paraître préférable de revenir au système de contraintes présenté dans le cas général (cf. fin §5.1).

5.2.2 Détermination de la fonction g et des deux constantes q et p

Toute représentation numérique (g, q, p) du pseudo-ordre avec les deux seuils constants doit vérifier le système suivant :

$$\forall j \in \{1 \dots m\} : \begin{cases} x_{h(j)} - x_j & \leq q \\ x_{1+h(j)} - x_j & > q \\ x_{-1+k(j)} - x_j & \leq p \\ x_{k(j)} - x_j & > p \\ x_j & < x_{j+1} \\ 0 & \leq q \leq p \end{cases}$$

Pour déterminer une telle représentation, on doit résoudre un problème de programmation linéaire défini par $m + 2$ variables qui sont : q, p et $x_j \forall j \in \{1, \dots, m\}$.

Remarques

- Il n'est pas restrictif de poser $x_1 = 1$.
- Comme il est d'usage en programmation linéaire, on transforme les inégalités strictes en inégalités larges en introduisant des variables d'écart supplémentaires.
Si l'on se limite à des valeurs entières pour les inconnues x_j , la contrainte $x_j < x_{j+1}$ peut s'écrire $x_j \leq x_{j+1} - 1$ (avec $x_1 = 1$). Dans ces conditions, x_j prend une valeur au moins égale à son rang et les inégalités strictes présentées ci-dessus peuvent être remplacées par :

$$\begin{cases} x_{1+h(j)} - x_j & \geq q + 1 \\ x_{k(j)} - x_j & \geq p + 1 \end{cases}$$

- Dans le contexte n°1 (défini dans l'introduction), l'inégalité $x_j < x_{j+1}$ peut être remplacée par $x_j \leq x_{j+1}$, ce qui conduira à des valeurs égales uniquement dans le cas où les actions a_j et a_{j+1} sont de vrais *ex æquo* (cf. §1).
- Tel que le système est écrit, certaines contraintes sont redondantes; c'est notamment le cas pour $x_j < x_{j+1}$ dès que a_{j+1} et a_j sont non indifférentes (pour plus de détails, voir Aït Younes (2001) page 94) .
- Si le problème admet une solution, celle-ci n'est pas unique car toute transformation affine de la fonction de performance g est également solution.
- Si le système admet une solution, on peut vouloir obtenir une échelle la plus compacte possible, ce qui revient à définir comme fonction objectif du programme linéaire de minimiser $(x_m - x_1)$ (ceci correspond à la notion de ε -représentation minimale; cf. Doignon (1988), Pirlot (1990)). Si on pose $x_1 = 1$, il faut minimiser x_m .

6 Conclusion

Dans un souci opérationnel, l'ensemble de la démarche permettant de déduire un système relationnel de préférences $(\mathcal{I}, \mathcal{Q}, \mathcal{P})$ compatible avec le modèle du pseudo-ordre, à partir d'une information de base définie par un rangement des actions et la nature de la relation de préférence entre tout couple d'actions consécutives a été implémentée dans un logiciel convivial sous environnement Windows® (cf. Aït Younes (2001) page 119).

Ce logiciel est composé de deux parties qui peuvent être utilisées de façon indépendante. Dans la première, plusieurs fenêtres interactives facilitent l'acquisition de l'information de base. L'information supplémentaire minimale, nécessaire pour définir un pseudo-ordre complet, est ensuite obtenue en utilisant les démarches présentées en section 4. La deuxième partie permet de construire une représentation numérique du pseudo-ordre avec deux seuils constants par la résolution d'un programme linéaire (cf. §5). Si le problème linéaire prouve qu'il n'y a pas de solutions, il en propose néanmoins une qui viole "le moins possible" l'information recueillie.

Le logiciel comporte en outre une approche graphique permettant d'obtenir une solution avec des seuils affines.

Références

- Aït Younes, A. (2001). *Problèmes liés à la construction d'un pseudo-critère : développements théoriques et implémentation informatique*. Thèse de doctorat, Université Paris-Dauphine, France.
- Aït Younes, A., Azibi, R., et Roy, B. (2000). ELECTRE IS : Manuel d'utilisation. Document du LAMSADE No. 118, Université Paris-Dauphine, France.
- Brans, J., Mareschal, B., et Vincke, P. (1984). PROMETHEE: a New Family of Outranking Methods in Milticriteria Analysis. In J. Brans, editor, *Operational Research '84*. North-Holland.
- Cozzens, M.B. et Roberts, F.S. (1982). Double semiorders and double indifference graphs. *SIAM Journal on Algebraic and Discrete Methods*, **3**, 566–583.
- Doignon, J.-P. (1987). Threshold representations of multiple semiorders. *SIAM Journal of Algebraic Discrete Methods*, **8**, 77–84.
- Doignon, J.-P. (1988). Sur les représentations minimales des semiordres et des ordres d'intervalles. *Mathématiques et Sciences Humaines*, **101**, 49–59.
- Mousseau, V., Slowinski, R., et Zielniewicz, P. (1999). ELECTRE TRI, version 3.0a, Methodological guide and user's manual. Document du LAMSADE No. 111, Université Paris-Dauphine, France.
- Pirlot, M. (1990). Minimal representation of a semiorder. *Theory and Decision*, **28**, 109–141.
- Pirlot, M. et Vincke, Ph. (1997). *Semiorders: Properties, Representations, Applications*. Kluwer Academic Publishers, Boston, Dordrecht, London.

- Rogers, M., Bruen, M., et Maystre, L-Y. (2000). *ELECTRE and decision support*. Kluwer Academic Publishers, London.
- Roubens, M. et Vincke, Ph. (1985). *Preference modelling*. number 250 in Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, Springer-Verlag.
- Roy, B. (1978). ELECTRE III: Un algorithme de classement fondé sur une représentation floue des préférences en présence de critères multiples. *Cahiers du Centre d'études de Recherche Opérationnelle*, **20**(1), 3–24.
- Roy, B. (1985). *Méthodologie Multicritère d'Aide à la Décision*. Economica, Paris.
- Roy, B. et Bouyssou, D. (1993). *Aide Multicritère à la Décision : Méthodes et Cas*. Economica, Paris.
- Roy, B. et Hugonnard, J.Ch. (1982). Ranking of suburban line extension projects on the Paris metro system by a multicriteria method. *Transportation Research*, **16 A**, 301–312.
- Roy, B. et Vincke, Ph. (1987). Pseudo-orders: Definition, properties and numerical representation. *Mathematical Social Sciences*, **14**, 263–274.
- Roy, B., Présent, M., et Silhol, D. (1986). A programming method for determining which Paris metro stations should be renovated. *European Journal of Operational Research*, **24**, 318–334.
- Tsoukiàs, A. et Vincke, Ph. (1998). Double threshold orders: a new axiomatization. *Journal of Multi Criteria Decision Analysis*, **7**, 285–301.
- Vallée, D. et Zieliwicz, P. (1994). ELECTRE III-IV, version 3.x, Aspects Méthodologiques (tome 1), Guide d'utilisation (tome 2). Document du LAMSADE no. 85 et 85 bis, Université de Paris Dauphine, France.
- Vincke, Ph. (1992). *Multicriteria Decision-Aid*. Wiley.