CAHIER DU LAMSADE

Laboratoire d'Analyse et Modélisation de Systèmes pour l'Aide à la Décision
(Université de Paris-Dauphine)
Unité Associée au CNRS n° 825

DOMINANCE STOCHASTIQUE EN ANALYSE MULTICRITERE FACE AU RISQUE [1]

CAHIER N° 100
novembre 1990

J.M. MARTEL [2]
K. ZARAS [3]

Texte déposé au LAMSADE en juin 1990.

---

[1] Cette recherche a bénéficié de l'aide financière du CRSNG du Canada.

[2] Professeur titulaire à la Faculté des Sciences de l'Administration, Université Laval. Professeur invité au LAMSADE en 1989.

[3] Professeur invité à la Faculté des Sciences de l'Administration, Université Laval.

TABLE DES MATIERES

STOCHASTIC DOMINANCE IN MULTICRITERION ANALYSIS UNDER RISK

Abstract

Traditionally, in decision-aid modeling literature, one notes a tendancy to treat expected utility models and outranking relation models as rivals. It may be possible, however, to benefit from the use of both approaches in a risky decision context. Stochastic dominance conditions can be used to establish, for each criterion, the preferences of a decision-maker and to characterize them by a concave or convex utility function.

Two levels of complexity in preference elicitation, designated as clear and unclear, are distinguished. Only in the case of unclear preferences it is potentially interesting to attempt to estimate the value function of the decision-maker, thus obtaining his (her) preferences with a reduced number of questions. The number of questions that must be asked depends upon the level of the concordance threshold required by the decision-maker in the construction of the outranking relation using the ELECTRE method.

DOMINANCE STOCHASTIQUE EN ANALYSE MULTICRITÈRE FACE AU RISQUE

Résumé

Dans la littérature sur les modèles d'aide à la décision, on a tendance à opposer les modèles basés sur la théorie de l'utilité espérée à ceux s'appuyant sur les relations de surclassement. Il nous semble, dans un contexte de décision face au risque, que l'on peut tirer profit des deux approches. On exploite les dominances stochastiques pour des fonctions d'utilité concaves et convexes afin d'établir les préférences du décideur par rapport à chaque critère.

On rencontre deux niveaux de complexité dans l'explicitation des préférences, que l'on désigne par clair et non-clair. Ce n'est que lorsque les préférences sont non-claires qu'il est potentiellement intéressant de chercher à identifier la fonction d'utilité du décideur. Il est ainsi possible de réduire le nombre de questions à poser au décideur pour obtenir ses préférences. Ce nombre dépend du niveau du seuil de concordance exigé par le décideur dans la construction des relations de surclassement selon la méthode ELECTRE.

1. INTRODUCTION

On peut facilement imaginer de très nombreuses situations de décision où les performances des actions à comparer ne sont pas connues avec certitude. Cependant, on retrouve relativement peu de travaux en analyse multicritère s'adressant aux décisions en contexte d'incertitude probabiliste.

Il y a ceux portant sur l'utilité multiattribut (MAUT) (Keeney et Raiffa, 1976) qui préconisent une approche du critère unique de synthèse (Roy, 1985) mais dont la mise en application est grandement compromise par la nécessité d'obtenir une information complète au sujet des préférences du décideur. Nous incluons, dans cette famille d'approches, la méthode hiérarchique multicritère (MHM) pour laquelle Saaty et Vargas [1987] ont proposé une version pour aborder les cas d'incertitude. Les travaux assez récents de Goicoechea *et al*. [1979], Leclercq [1982], Teghem *et al*. [1986] et Urli [1989], dans le cadre de la programmation mathématique multiobjectif (PMMO) en incertitude, se rangent dans la famille des approches du jugement local interactif avec itération essai-erreur. Toutefois, la puissance des outils PMMO utilisés dans ces recherches n'est pleinement justifiée que pour résoudre des problèmes où l'ensemble de décision est infini ou très grand.

Dans la famille des approches du surclassement de synthèse, on retrouve principalement, par ordre chronologique, les publications de Jacquet-Lagrèze [1977], Dendrou *et al*. [1980], Martel *et al*. [1982, 1986], Siskos [1983], Mareschal [1986] et d'Avignon et Vincke [1988]. Dans la plupart de ces travaux (sauf dans ceux de Siskos et Mareschal), on s'appuie sur un concept de relation binaire probabiliste qui est approché de façon fort différente d'un auteur à l'autre. Mareschal [1986] traite très peu de l'incertitude probabiliste et il le fait (dans la dernière page de son papier) à l'aide d'une notion de fonction de préférence espérée calculée à partir des distributions de probabilités des déviations entre deux performances. Siskos [1983] propose une méthode de régression ordinale stochastique (UTA stochastique) que l'on pourrait classer dans la famille des approches du critère unique de synthèse ou même dans celle des approches du jugement interactif (sauf que l'interaction porte plus sur la construction des préférences que sur l'ensemble des actions, Vincke [1989]).

Jacquet-Lagrèze [1977] construit des relations de préférences floues à partir de la résolution d'un programme linéaire exprimant des relations probabilistes et du calcul de trois relations de préférences triviales. Dendrou *et al*. [1980] bâtissent une matrice (qui n'est pas stochastique) des probabilités qu'une action soit supérieure à une autre. Puis ils déterminent des indices de concordance et de discordance pour construire des relations de surclassement comme dans ELECTRE I. Martel *et al*. [1982,1986] vont un peu dans le même sens. A partir des probabilités qu'une action soit au moins aussi performante qu'une autre, ils établissent un indice de confiance. Ils déterminent des indices de doute à partir des déviations moyennes défavorables au surclassement, des pondérations des critères et de la variabilité des évaluations distributionnelles. Ils introduisent, comme dans ELECTRE III, des seuils (indifférence, préférences strictes, veto,...) pour construire des relations de surclassement valuées, qualifiées de floues.

D'Avignon et Vincke [1988], quant à eux, déterminent des degrés de surclassement probabilisés qui incorporent les distributions de probabilités des performances et des indices de préférences relatives à ces performances (ils ne sont toutefois pas très explicites sur la procédure permettant d'obtenir ces indices). De ces degrés de surclassement, ils tirent deux types de distributions de probabilités. Pour chaque action, ils obtiennent une distribution exprimant sa "force" et une exprimant sa "faiblesse". Puis, toujours en s'inspirant des méthodes ELECTRE et PROMETHEE, ils proposent des procédures d'exploitation de ces résultats probabilistes.

Ces quelques travaux sont bien loin d'épuiser les moyens pouvant permettre de développer une méthode d'aide multicritère à la décision face au risque. Dans ce cahier, on propose une telle méthode qui s'appuie sur des résultats de dominance stochastique pour bâtir, comme dans les méthodes ELECTRE, des relations de surclassement qui laissent place à l'incomparabilité.

Ce cahier est structuré de la manière suivante. Le problème est formulé dans la section 2. La section 3 présente des résultats (monocritères) issus de la dominance stochastique et, dans la section 4, on utilise ces résultats pour bâtir des relations de surclassement. La méthode ainsi développée est appliquée pour résoudre quelques exemples tirés de la littérature dans la section 5.

2. LA FORMULATION DU PROBLÈME

Un problème multicritère stochastique discret peut être défini à partir des éléments suivants:

1) Un ensemble fini d'actions $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$;

2) Un ensemble d'attributs $X = \{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ avec la particularité que, pour chaque attribut $X_i \epsilon X$, la performance d'une action $a_j \epsilon A$ est exprimée à l'aide d'une distribution de probabilités. On peut ainsi associer, à la performance de chaque action a_j selon l'attribut X_i, une variable aléatoire X_{ij} avec une fonction de probabilité $f_i(x_{ij})$. Si l'on représente par $[x_{i*}, x_i^*]$ l'intervalle de variation de ces variables aléatoires selon l'attribut X_i où x_{i*} = la pire des valeurs selon l'attribut X_i et x_i^* = la meilleure de ces valeurs, la performance de l'action a_j est modélisée de telle façon que

$$\sum_{x_{ij} \epsilon [x_{i*}, x_i^*]} f_i(x_{ij}) = 1 \text{ pour une échelle d'attribut discrète et}$$

$$\int_{x_i*}^{x_i*} f_i(x_{ij}) dx_{ij} = \int_{x_i*}^{x_i*} dF_i(x_{ij}) = \int_{x_i*}^{x_i*} d\bar{F}_i(x_{ij}) = 1$$

pour une échelle d'attribut continue où $F_i(x)$ et $\bar{F}_i(x)$ représentent respectivement des fonctions de probabilité cumulées, l'une ascendante et l'autre descendante.

Nous supposons que ces attributs sont définis de manière à ce qu'une plus grande évaluation soit préférée à une plus petite ("more is better") et que les fonctions de probabilité soit connues. Nous supposons également qu'il s'agit d'un ensemble d'attributs X formé de n attributs, chacun d'eux étant <u>isolable</u> (Roy, 1985) par rapport aux n-1 autres, c'est-à-dire que l'on peut raisonner sur chaque attribut pris individuellement, "toutes choses égales par ailleurs", sur les n-1 autres attributs.

Dans un tel contexte, la comparaison entre deux actions a_j, $a_j' \epsilon A$ conduit à la comparaison de deux vecteurs de distributions de probabilité $\{f_1(x_{1j}), \ldots, f_n(x_{nj})\}$ et $\{f_1(x_{1j}'), \ldots, f_n(x_{nj}')\}$. On articule cette comparaison globale dans le cadre d'un système relationnel de préférences de la forme (S, R) (Roy, 1985). Il faut statuer sur des propositions de type "a_j est au moins aussi bonne que a_j'" pour toute paire $(a_j, a_j') \in A \times A$.

On approche ce problème multicritère stochastique en utilisant des résultats de dominance stochastique pour comparer les actions deux à deux sur chacun des attributs pris individuellement. On interprète ces comparaisons en termes de préférences partielles en ce sens qu'elles sont restreintes aux seuls aspects pris en compte dans l'axe de signification sous-tendant la définition du critère (Bouyssou, 1989). Par la suite, on suit l'approche de surclassement de synthèse (Roy, 1985) en construisant des relations de surclassement basées sur un indice de concordance et un indice de discordance.

Ces relations de surclassement sont finalement exploitées pour répondre à une problématique du choix ou du rangement.

3. PRÉFÉRENCE PARTIELLE ENTRE DEUX ACTIONS FACE AU RISQUE

Comme indiqué précédemment, on se place dans un contexte où la performance de chaque action par rapport à chaque attribut est exprimée par une distribution de probabilités. Souvent, il n'est pas nécessaire d'expliciter complètement les préférences (partielles, c'est-à-dire au niveau d'un attribut) du décideur pour statuer sur la proposition que, pour lui, "l'action a_j est au moins aussi bonne que a_j'" selon l'attribut X_i. En effet, à partir des dominances stochastiques FSD, SSD et TSD (voir définitions en annexe), on peut conclure de façon claire que cette proposition est vraie pour une large classe de fonctions d'utilité: la classe des fonctions d'utilité avec aversion absolue au risque décroissante (la classe des fonctions d'utilité DARA). Les fonctions d'utilité U_i appartenant à cette classe U_4 vérifient les conditions suivantes:

$U_4 = \{U_i(x_i)/U_i'(x_i) > 0, U_i''(x_i) \leq 0,\ U_i'''(x_i) \geq 0,\ r'(x_i) = (-U_i''(x_i)/U_i'(x_i))' \leq 0,$ $\forall x \in R\}$, où $r(x_i)$ mesure l'aversion absolue au risque (Pratt, 1964).

Si la préférence (partielle) du décideur pour l'attribut X_i peut s'exprimer par une fonction d'utilité $U_i \in U_4$, alors sa préférence envers la fonction de distribution $F_{ij}(x_i)$ associée à l'action a_j selon l'attribut X_i, sera

$$g_i(F_{ij}(x_i)) = \int_{x_{i*}}^{x_i^*} U_i(x_i)dF_{ij}(x_i) \tag{1}$$

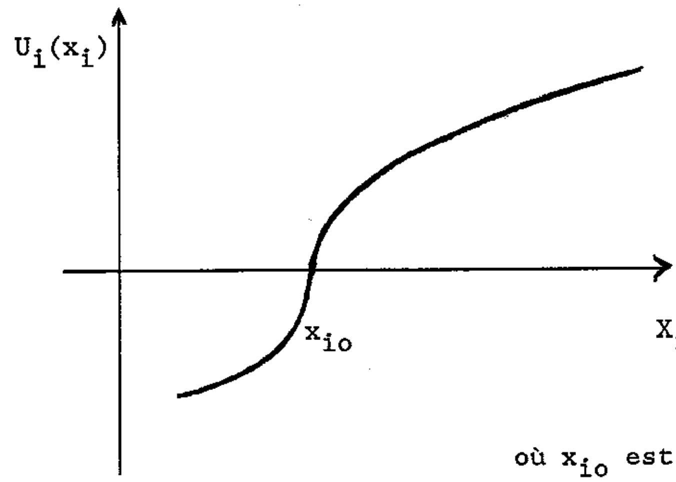
<u>Théorème 1</u>: (Hadar et Russel (1969), Whitmore (1970),...)

Si F_{ij} FSD $F_{ij'}$, ou F_{ij} SSD $F_{ij'}$, ou F_{ij} TSD $F_{ij'}$, et $\mu_{F_{ij}} \geq \mu_{F_{ij'}}$,
alors $g_i(F_{ij}) \geq g_i(F_{ij'})$ pour tout $U_i \epsilon U_4$
où F_{ij} et $F_{ij'}$ sont les fonctions de probabilité cumulée associées respectivement à a_j et à $a_{j'}$.

Ce théorème permet de statuer clairement sur la proposition "a_j est au moins aussi bonne que $a_{j'}$" selon l'attribut X_i dès que l'une des trois dominances stochastiques est vérifiée. De plus, Bawa [1975] a proposé des règles simples afin de vérifier l'existence de ces dominances pour certaines familles de distributions de probabilités.

Nous disons que, souvent, il n'est pas nécessaire d'expliciter complètement les préférences du décideur puisque, selon Levy et Sarnat [1984], la dominance stochastique du premier degré (FSD) est vérifiée dans environ 60% des cas de comparaisons entre deux distributions de probabilité. Si l'on ajoute aux cas de FSD ceux de dominance stochastique d'ordre deux (SSD) et d'ordre trois (TSD), on obtient un pourcentage assez élevé de situations où l'on peut conclure que a_j est au moins aussi bonne que $a_{j'}$ sans que l'on ait à expliciter complètement les préférences du décideur. Il faut cependant que les préférences du décideur coïncident avec une fonction d'utilité DARA. Arrow [1971] a constaté, en observant certains phénomènes économiques, que les fonctions d'utilité individuelles exhibent généralement une aversion absolue au risque décroissante et, occasionnellement, une aversion absolue au risque croissante. Par ailleurs, Stiglitz [1970] met en doute l'hypothèse de l'aversion absolue au risque croissante.

Il suffit de connaitre le comportement global du décideur face au risque sur l'attribut X_i pour statuer sur la proposition "a_j est au moins aussi bonne que $a_{j'}$". Si le comportement global du décideur montre du goût pour le risque plutôt que de l'aversion et que l'une des dominances stochastiques inverses SISD ou TISD1 ou TISD2 (voir définitions en annexe) est vérifiée, alors, à partir de Zaras [1989], on peut encore statuer clairement sur cette proposition. Si ce comportement global montre à la fois du goût et de l'aversion pour le risque (voir Figure 1), alors, pour statuer clairement sur la proposition, il faut



où x_{io} est le point de référence du décideur

Figure 1: Fonction de valeur selon Kahneman et Tversky [1979].

expliciter complètement la fonction U_i du décideur; cela peut être fait à partir de loteries de référence et en supposant une famille paramétrique de fonctions d'utilité (comme dans Becker et Sarin [1987] par exemple).

4. L'APPROCHE DU SURCLASSEMENT DE SYNTHÈSE

L'intérêt d'utiliser la dominance stochastique plutôt que d'essayer d'expliciter systématiquement les valeurs du critère $g_i(F_{ij})$ est que d'une part cela est plus simple et que, d'autre part, on obtient plus d'information sur le comportement du décideur face au risque. Cette dernière information peut être importante dans une approche multicritère constructiviste où l'on admet l'incomparabilité. Selon le comportement du décideur face au risque, on se réfère à l'un ou l'autre des deux groupes suivants de dominance: le groupe (SSD et TSD) pour la classe des fonctions concaves DARA et le groupe (SISD, TISD1 et TISD2) pour une famille de fonctions convexes (ZARAS, 1989). Si le décideur est plutôt conservateur, c'est-à-dire s'il a de l'aversion envers le risque, la proposition "a_j est au moins aussi bonne que a_j'" peut être violée à l'égard du second groupe de dominances stochastiques. S'il est plus progressiste, c'est-à-dire s'il a du goût envers le risque, la proposition peut être violée à l'égard du premier groupe de dominances stochastiques.

Dans le reste de ce document, on distingue uniquement deux situations de dominances stochastiques; on désigne par SD_α celles qui vérifient les conditions imposées par le théorème 1 et par SD_β celles qui ne vérifient pas cette condition. La relation de dominance étant antisymétrique, lorsque la relation entre les actions (a_j, a_j') sur l'attribut i est SD_α, celle entre (a_j', a_j) sur ce même attribut n'est pas considérée comme SD_β. Dans le cas SD_β, on admet que la dominance stochastique n'est pas vérifiée et qu'il faudrait éventuellement expliciter la fonction d'utilité du décideur, c'est-à-dire déterminer la fonction $U_i(x_i)$. On distingue donc deux niveaux de complexité dans l'expression des préférences du décideur face à chaque paire d'actions et selon chaque attribut X_i:

1. clair - si l'une des dominances SD_α est vérifiée;
2. non-clair - si l'on se trouve dans la situation SD_β.

La question qui se pose alors est la suivante: est-il toujours nécessaire de clarifier tous les cas où l'expression des préférences du décideur est non-claire pour apporter une aide multicritère dans des problématiques du choix ou du rangement? Nous allons voir que cela dépend du niveau du seuil de concordance exigé par le décideur dans la construction des relations de surclassement selon ELECTRE.

Plus ce niveau sera bas, plus il pourra s'avérer utile de clarifier des situations non-claires. Nous serons ainsi conduits à expliciter un plus grand nombre de fonctions $U_i(x_i)$ mais il en résultera un graphe de surclassement plus riche. Notre objectif est de réduire autant que possible ce nombre sans pour autant augmenter le risque de se tromper en concluant que "a_j est au moins aussi bonne que a_j'".

Etant donné un niveau du seuil de concordance désiré par le décideur, la valeur de l'indice de concordance peut se décomposer en deux parties:

1. Concordance expliquée. Elle est obtenue à partir des cas où l'expression des préférences du décideur est triviale ou claire.

$$C_E\ (a_j, a_j') = \sum_{i=1}^{n} W_i\ d_i^E\ (a_j, a_j')$$

$$\text{où } d_i^E\ (a_j, a_j') = \begin{cases} 1 \text{ si } F_{ij}\ SD_\alpha\ F_{ij}' \\ 0 \text{ sinon} \end{cases} \tag{2}$$

et W_i = importance relative accordée au i-ième attribut, avec $\sum_{i=1}^{n} W_i = 1$.

2. Concordance non expliquée. Elle correspond à la valeur potentielle des cas où l'expression des préférences du décideur est non-claire.

$$C_N\ (a_j, a_j') = \sum_{i=1}^{n} W_i\ d_i^N\ (a_j, a_j')$$

$$\text{où } d_i^N\ (a_j, a_j') = \begin{cases} 1 \text{ si } F_{ij}\ SD_\beta\ F_{ij}' \\ 0 \text{ sinon} \end{cases} \tag{3}$$

Cette deuxième partie de la concordance est une valeur potentielle puisqu'il n'est pas certain que, pour chacun de ces attributs, F_{ij} sera au moins aussi bonne que F_{ij}'. Nous pouvons formuler une condition pour laquelle il est valable de chercher à expliciter les fonctions d'utilité $U_i(x_i)$ du décideur correspondant à ces attributs.

Si la condition $0 \leq p - C_E\ (a_j,\ a_j') \leq C_N\ (a_j,\ a_j')$ (4)
où p = seuil de concordance est vérifiée, alors l'explication des cas non-clairs peut conduire à une valeur de l'indice de concordance telle que le test de concordance soit satisfait pour la proposition du surclassement global de a_j' par a_j (a_j S a_j').

L'indice de discordance pour chaque critère g_i peut être défini comme le ratio de la différence entre les moyennes sur l'étendue de l'échelle:

$$D_i\ (a_j,\ a_j') = \frac{\mu(F_{ij}') - \mu(F_{ij})}{(x_i^* - x_{i*})} \tag{5}$$

La différence entre les moyennes des distributions donne une bonne indication de la différence de performance entre les deux actions concernées. Si cette différence est assez grande (relativement à l'étendue de l'échelle), cela suffit pour bloquer le surclassement de a_j' par a_j.

Le test de discordance fait appel à la notion de seuil de veto v_i pour chaque attribut X_i. Les ensembles de concordance et de discordance sur l'ensemble A des actions potentielles sont formulés de manière classique:

$$\begin{aligned} &\forall (a_j,\ a_j') \in A \times A, \quad [(a_j,\ a_j') \in Cp \Longleftrightarrow C\ (a_j,\ a_j') \geq p] \\ &\forall (a_j,\ a_j') \in A \times A, \quad [(a_j,\ a_j') \in D_v \Longleftrightarrow \exists i / D_i(a_j,\ a_j') \geq v_i] \end{aligned} \tag{6}$$

L'ensemble de surclassement résulte de l'intersection entre l'ensemble de concordance et l'ensemble complémentaire à l'ensemble de discordance:

$$S(p, v_i) = Cp \cap \bar{D}_V. \tag{7}$$

Puis, selon que l'on est confronté à une problématique de choix ou de rangement, on détermine le noyau du graphe de surclassement ou on exploite les relations de surclassement, comme dans ELECTRE II par exemple.

5. APPLICATIONS

Pour illustrer notre approche, on reprend trois exemples qui ont été traités dans des publications antérieures. On commence par l'exemple assez simple utilisé par d'Avignon et Vincke [1989]. Dans cet exemple, on cherche à modéliser les préférences du décideur pour 4 actions: a, b, c, d évaluées sous la forme de distributions de probabilités (voir tableau 1) pour chacun des 3 critères retenus. On suppose que les trois critères ont la même importance.

Tableau 1: Tableau d'évaluations distributionnelles

Actions	i = 1	i = 2	i = 3
	[0,1,2]	[0,1,2]	[0,1,2]
a	0.0,0.0,1.0	0.0,0.5,0.5	0.3,0.4,0.4
b	0.0,0.5,0.5	0.3,0.3,0.4	0.5,0.5,0.0
c	1.0,0.0,0.0	0.3,0.7,0.0	0.5,0.0,0.5
d	0.3,0.7,0.0	0.5,0.5,0.0	0.5,0.5,0.0

Pour appliquer notre approche, il faut tout d'abord vérifier les types de dominances stochastiques entre chaque paire d'actions et cela pour chaque critère. On constate que toutes les dominances stochastiques sont de type FSD (voir tableau 2), de sorte que l'expression des préférences est claire dans tous les cas. Les ensembles de concordance et de discordance sont les suivants:

$Q_{2/3} = \{(a,b), (a,c), (a,d), (b,c) (b,d), (c,d)\}$

$D_{1/3} = \{(c,d), (c,a), (c,b), (d,b), (b,a)\}$, tous les v_i sont fixés égaux à 1/3.

Finalement, l'ensemble de surclassement $S(p, v_i) = C_p \cap \bar{D}_v$ est:

$S(2/3, 1/3)=\{(a,b),(a,c),(a,d),(b,c),(b,d)\}$,

d'où l'on obtient l'ordre suivant:

$\{a\} \rightarrow \{b\} \rightarrow \{c,d\}$

qui est précisément l'ordre trouvé par d'Avignon et Vincke pour un seuil de concordance de 2/3 et un seuil de discordance de 1/3.

Tableau 2: Dominances observées pour l'exemple de d'Avignon et Vincke.

	i=1				i=2				i=3			
	a	b	c	d	a	b	c	d	a	b	c	d
a	*	FSD	FSD	FSD	*	FSD	FSD	FSD	*	FSD	FSD	FSD
b	-	*	FSD	FSD	-	*	FSD	FSD	-	*	-	FSD
c	-	-	*	-	-	-	*	FSD	-	FSD	*	FSD
d	-	-	FSD	*	-	-	-	*	-	FSD	-	*

Comme deuxième exemple, on reprend celui utilisé par Siskos [1983] concernant la classification de six candidats au poste de directeur de vente et évalués par rapport aux trois attributs: personnalité, niveau intellectuel et expérience (voir tableau 3).

Tableau 3: Évaluations distributionnelles des six candidats

Candidats	Personnalité			Niveau Intellectuel			Expérience		
	+	++	+++	+	++	+++	+	++	+++
A	.3	.4	.3	.2	.6	.2	.3	.6	.1
B	.1	.1	.8	.3	.5	.2	.7	.2	.1
C	.5	.2	.3	0	.2	.8	0	.7	.3
D	.1	.3	.6	.4	.4	.2	0	.1	.9
E	.4	.4	.2	.3	.5	.2	.4	.4	.2
F	.2	.5	.3	.4	.5	.1	.5	.4	.1

Dans cet exemple, on constate que les relations entre toutes les actions comparées sont expliquées par des dominances stochastiques de type FSD ou SSD et cela pour les trois critères retenus (voir tableau 4).

Tableau 4: Dominances observées pour l'exemple de Siskos

	Personnalité						Niveau intellectuel						Expérience					
	A	B	C	D	E	F	A	B	C	D	E	F	A	B	C	D	E	F
A	-		FSD		FSD		-	FSD		FSD	FSD	FSD	-	FSD			FSD	FSD
B	FSD	-	FSD	FSD	FSD	FSD		-		FSD	FSD	FSD		-				
C			-				FSD	FSD	-	FSD	FSD	FSD	FSD	FSD	-		FSD	FSD
D	FSD		FSD	-	FSD	FSD				-		FSD	FSD	FSD	FSD	-	FSD	FSD
E			SSD		-			FSD		FSD	-	FSD			FSD		-	FSD
F	FSD		FSD		FSD	-						-			FSD			-

Nous nous retrouvons donc avec le niveau de complexité clair si nous acceptons l'hypothèse que les fonctions d'utilité du décideur sur chacun des attributs appartiennent à la classe DARA. Les poids des critères sont les suivants: $W_1 = 0.3$, $W_2 = 0.4$ et $W_3 = 0.3$. Les valeurs de l'indice de concordance expliquée sont présentées dans le tableau 5.

Tableau 5. Concordance expliquée $C_E\ (a_j,\ a_j') = C_{FSD+SSD}$

	a	b	c	d	e	f
a	x	0.7	0.3	0.4	1.0	0.7
b	0.3	x	0.3	0.7	0.7	0.7
c	0.7	0.7	x	0.4	0.7	0.7
d	0.6	0.3	0.6	x	0.6	1.0
e	0.0	0.7	0.3	0.4	x	0.7
f	0.3	0.3	0.3	0.0	0.3	x

Pour un seuil de concordance de $p = 0.6$ et des seuils de veto $v_i = 0.3$ pour tout i, on trouve un classement similaire à celui obtenu par Siskos à l'aide de la méthode Electre III avec un seuil de discrimination de niveau $s = 0.12$. L'ensemble de surclassement est:

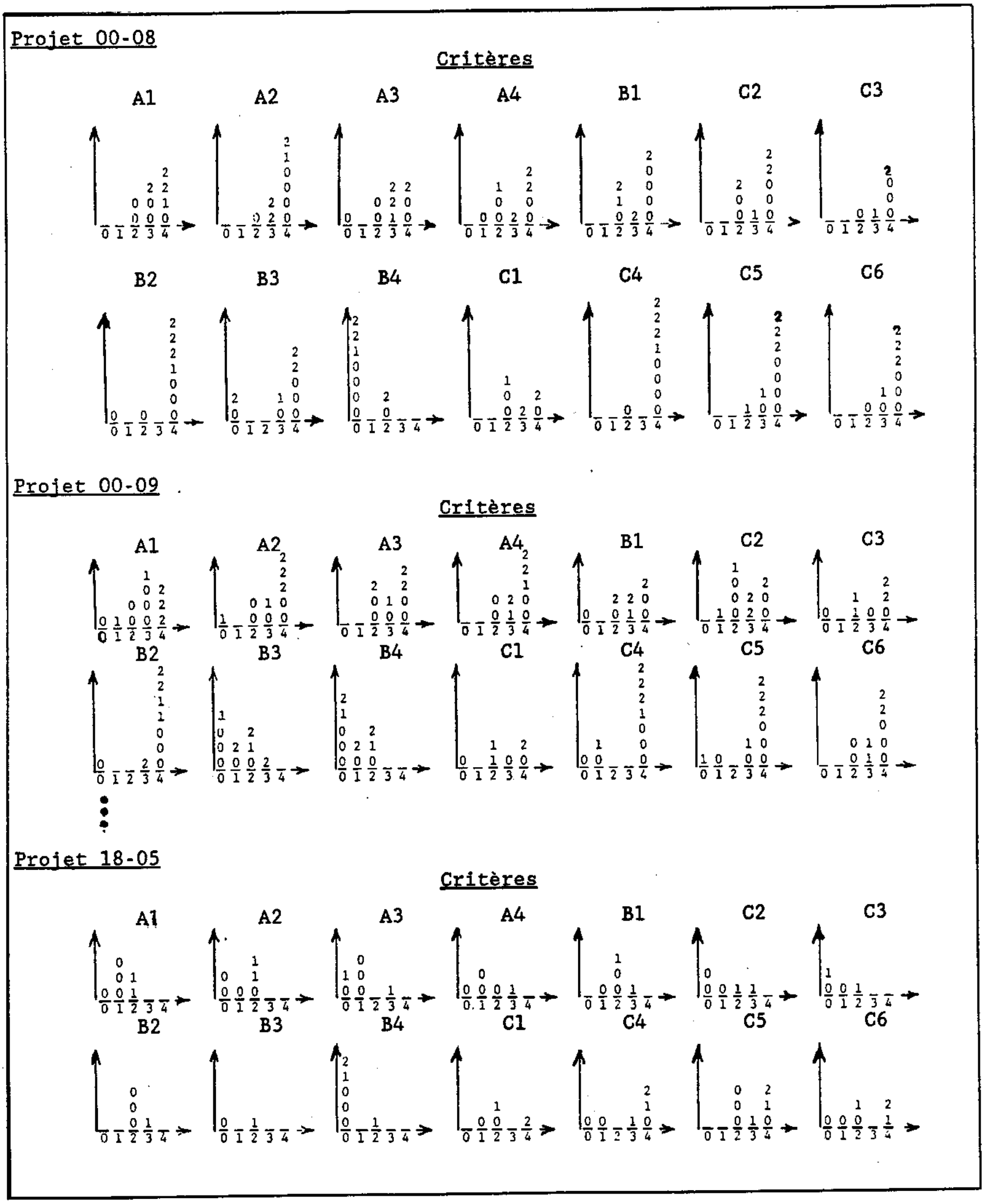
$$S(0.6,\ 0.3) = \{(a,b)(a,e)(a,f)(b,e)(g,f)(c,a)(c,e)(c,f)(d,f)(e,f)\}.$$

On obtient le classement suivant:

$\{c,d\} \rightarrow \{a\} \rightarrow \{b\} \rightarrow \{e\} \rightarrow \{f\}$.

Le troisième exemple de Martel, d'Avignon et Couillard [1986] concerne la sélection de projets de développement dans des centres hospitaliers universitaires au Québec. On a limité cette analyse aux 14 projets de catégorie A (voir tableau 6). Cet exemple réel est un peu plus compliqué que les précédents. Dans ce cas, on retrouve tous les types de dominances stochastiques à l'exception de la TSD. Les importances relatives des critères sont les suivantes: $W_{A1} = W_{A2} = W_{C2} = 10/41$ et $W_{A3} = W_{A4} = W_{B1} = W_{B2} = W_{B4} = W_{C1} = W_{C3} = W_{C4} = W_{C5} = W_{C6} = 1/41$. On a calculé la concordance expliquée et la concordance non-expliquée pour l'ensemble des paires d'actions $(a_j,\ a_j')$. Les résultats sont présentés dans les tableaux 7 et 8. Pour un seuil de condordance $p = 0.93$ (par exemple), on obtient, à partir uniquement de la concordance expliquée

Tableau 6. Évaluations distributionnelles pour trois projets de la catégorie A.



et avec des seuils de discordance $v_i = 0.3$ pour tous les critères i, des relations de surclassement entre les paires d'actions suivantes:

(00-08, 00-09); (00-08, 25-00); (00-10, 17-14); (00-10, 19-01);(15-39, 25-00); (25-21, 17-13); (25-21, 18-05); (25-21, 25-00); (26-02, 19-01);(27-11, 17-14); (34-04, 17-14) et (34-04, 18-05). Si l'on tient compte de la concordance non-expliquée, alors, toujours pour p = 0.93, nous pouvons obtenir potentiellement plusieurs autres relations de surclassement.

En effet, puisque C_E $(a_j, a_j') = 0.88$ et C_N $(a_j\ a_j') = 0.05$ pour les paires (00-09, 26-02) et (17-14, 17-13) où le test de non-discordance est vérifié, en explicitant les fonctions d'utilité $U_i(x_i)$ du décideur pour les critères B1, B2 et C1, nous serions en mesure de dire s'il existe ou non des relations de surclassement entre ces deux paires d'actions. Il en serait de même pour les paires suivantes pour lesquelles le test de non-discordance est vérifié:

(34-04, 26-02) puisque C_E (34-04, 26-02) = 0.90 et C_N (34-04, 26-02) = 0.05;

(25-21, 19-01) puisque C_E (25-21, 19-01) = 0.90 et C_N (25-21, 19-01) = 0.07;

(00-11, 26-02) puisque C_E (00-11, 26-02) = 0.88 et C_N (00-11, 26-02) = 0.07;

(25-21, 17-14) puisque C_E (25-21, 17-14) = 0.71 et C_N (25-21, 17-14) = 0.24;

(25-21, 26-02) puisque C_E (25-21, 26-02) = 0.71 et C_N (25-21, 26-02) = 0.26.

Si l'on supposait que, pour ces sept paires d'actions, une relation de surclassement est vérifiée, le classement moyen des 14 actions de cette catégorie serait:

{00-08} → {00-10, 34-04, 27-11, 00-11} → {25-21, 15-39, 00-09} → {17-14} → {26-02, 18-05, 25-00} → {17-13} → {19-01}. Sept des huit projets acceptés dans cette catégorie (dans le cas réel d'où a été tiré cet exemple) se retrouvent en tête de liste; le projet 27-11 n'a pas été retenu alors que le 26-02 l'a été.

En analysant attentivement les graphes de surclassement, il est ressorti que l'existence ou non d'une relation de surclassement entre les actions 00-09 et 26-02 était assez crucial. En effet, si cette relation de surclassement est vérifiée, c'est-à-dire (00-09) S (26-02), en plus des relations de surclassement établies uniquement sur la base de la concordance expliquée, on obtient comme classement moyen {00-09} → {00-10, 34-04, 27-11, 25-21, 15-39} → {00-11} → {00-09} → {26-02} → {17-14, 18-05, 25-00, 17-13} → {19-01}. Les huit premières actions dans ce classement sont les mêmes que celles du classement moyen précédent où l'on a supposé que les sept relations de surclassement sont vérifiées. On n'a donc pas tellement intérêt dans ce cas à déployer beaucoup d'efforts afin d'expliciter les fonctions d'utilité pour les attributs autres que ceux permettant de statuer sur la relation entre les actions 00-09 et 26-02.

Tableau 7. Concordance expliquée $C_E(a_j, a_j')$

	00-08	00-09	00-10	00-11	15-39	17-13	17-14	18-05	19-01	25-00	25-21	26-02	27-11	34-04
00-08	x	≥0.93	0.37	0.85	0.85	≥0.93	0.85	≥0.93	≥0.93	≥0.93	0.38	≥0.93	0.59	0.12
00-09	0.12	x	0.1	0.12	0.59	0.68	0.44	≥0.93	0.88	0.71	0.02	0.88	0.10	0.05
00-10	0.88	0.85	x	0.63	≥0.93	≥0.93	≥0.93	≥0.93	≥0.93	≥0.93	0.59	≥0.93	0.56	0.34
00-11	0.07	0.63	0.12	x	0.57	≥0.93	0.56	≥0.93	≥0.93	0.71	0.15	0.88	0.34	0.12
15-39	0.07	0.39	0.02	0.36	x	0.54	0.54	≥0.93	0.81	≥0.93	≥0.93	0.39	0.02	0.10
17-13	0.02	0.05	0.00	0.05	0.02	x	0.08	0.59	0.05	0.08	0.00	0.05	0.00	0.02
17-14	0.00	0.00	0.00	0.00	0.02	0.88	x	0.08	0.59	0.51	0.02	0.34	0.02	0.02
18-05	0.02	0.05	0.00	0.05	0.05	0.34	0.00	x	0.02	0.08	0.02	0.08	0.00	0.00
19-01	0.00	0.08	0.05	0.05	0.08	0.63	0.08	0.88	x	0.15	0.02	0.19	0.00	0.00
25-00	0.00	0.02	0.00	0.02	0.00	0.05	0.24	0.37	0.27	x	0.02	0.08	0.00	0.00
25-21	0.59	0.86	0.10	0.8	0.9	≥0.93	0.71	≥0.93	0.90	≥0.93	x	0.71	0.39	0.61
26-02	0.02	0.05	0.02	0.02	0.02	0.86	0.34	0.87	≥0.93	0.02	0.24	x	0.07	0.02
27-11	0.34	≥0.93	0.10	0.39	0.68	0.73	≥0.93	≥0.93	≥0.93	0.86	0.54	≥0.93	x	0.39
34-04	0.1	0.86	0.10	0.48	0.8	≥0.93	≥0.93	≥0.93	0.86	≥0.93	0.37	0.90	0.34	x

Tableau 8. Concordance non expliquée $C_N(a_j, a_j')$

	00-08	00-09	00-10	00-11	15-39	17-13	17-14	18-05	19-01	25-01	25-21	26-02	27-11	34-04
00-08	x	-	-	0.02	0.02	0.02	0.05	0.02	0.05	-	0.07	0.05	0.05	0.78
00-09	-	x	0.02	0.26	0.05	0.24	0.49	0.07	0.05	-	-	0.05	0.05	0.07
00-10	0.02	0.02	x	0.26	0.05	0.02	-	0.05	-	0.02	0.26	0.02	0.29	0.29
00-11	0.02	-	-	x	-	0.02	0.26	0.07	0.07	-	-	0.07	0.07	0.29
15-39	-	-	-	0.05	x	0.02	0.24	0.05	0.05	-	0.02	0.32	0.05	0.02
17-13	-	-	-	-	0.02	x	-	0.02	0.02	0.02	0.05	0.05	0.05	-
17-14	0.05	0.02	0.02	0.02	0.07	0.05	x	0.07	0.05	0.24	0.02	0.05	0.05	0.05
18-05	-	-	-	-	-	-	0.02	x	-	-	-	-	0.02	0.02
19-01	-	-	-	-	0.02	0.29	0.49	0.05	x	-	-	-	-	-
25-01	-	0.29	0.02	0.26	0.05	0.59	0.51	0.31	0.56	x	0.02	0.29	0.02	0.02
25-21	-	-	0.02	-	-	-	0.24	-	0.07	-	x	0.26	0.02	-
26-02	-	-	-	-	-	0.02	0.24	-	-	-	0.02	x	-	-
27-11	-	-	-	0.24	0.02	-	-	0.02	0.02	-	0.26	0.05	x	0.24
34-04	-	-	0.02	0.05	-	0.05	-	-	0.05	-	0.05	0.05	-	x

Conclusion

Dans ce cahier, on suppose que les performances des actions comparées sont exprimées par des distributions de probabilités connues. On a montré que, dans ce contexte, il était possible de modéliser les préférences du décideur à l'aide de la dominance stochastique et en construisant des relations de surclassement.

On a distingué deux niveaux de complexité dans l'expression de ces préférences que l'on a qualifiés de clair et non-clair. Pour le premier niveau, il est possible de déduire les préférences du décideur sur la base de la connaissance de son comportement global. C'est uniquement pour le deuxième niveau (le niveau non-clair) qu'il est éventuellement nécessaire d'expliciter la fonction d'utilité du décideur. Dans les deux premiers exemples que nous avons traités, nous n'avons pas besoin de poser de questions au décideur concernant sa fonction d'utilité puisque tous les cas de comparaisons rencontrés sont de niveau clair. Dans le troisième exemple, comportant 14 critères, il serait éventuellement nécessaire d'interroger le(s) décideur(s) pour construire ses (leurs) fonctions d'utilité pour certains critères mais cela dépend du niveau du seuil de concordance qu'il(s) exige(nt) dans la construction des relations de surclassement. De toute manière, il est généralement ainsi possible de réduire, et parfois de façon très significative, le nombre de questions à poser au décideur dans une approche d'aide multicritère pour une décision face au risque et cela sans augmenter le risque de mal le conseiller.

Références

ARROW, K.J., "Theory of Risk Aversion", in Essays in the Theory of Risk Bearing, chap. 3, Chicago, Markham Publishing, 1971.

BAWA, V.S., "Optimal Rules for Ordering Uncertain Prospects", Journal of Financial Economics, Vol. 2, 1975 (95-121).

BECKER, J.L. and K.P. SARIN, "Lottery Dependent Utility", Management Science, Vol. 33, 11, 1987 (1367-82).

BOUYSSOU, D., "Problèmes de construction de critères" Université de Paris-Dauphine, Cahier du LAMSADE no. 91, , avril 1989, 32 p.

D'AVIGNON, G.R. and PH. VINCKE, "An Outranking Method Under Uncertainty". EJOR, Vol. 36, 1988 (311-21).

DENDROU, B.A.,DENDROU, S.A. and E.N. HOUTIS, "Multiobjective Decisions Analysis for Engineering Systems", Comput. & Ops. Res., Vol. 7, 1980 (301-12).

GOICOECHEA, A., DUCKSTEIN, L. and M.M. FOGEL, "Multiple Objectives Under Uncertainty: An Illustration Application of PROTRADE" Water Resources Research, Vol. 15, 2, 1979 (203-210).

HADAR, J. and W. RUSSEL, "Rules for Ordering Uncertain Prospect", American Economic Review, Vol. 59, 1969 (25-34).

JACQUET-LAGRÈZE, E. "Modelling Preferences among Distributions using Fuzzy Relations", in Jungermann and de Zeeuw (Eds.), Decision Making and Change in Human Affairs, D. Reidel Publishing Company, 1977 (99-114).

KAHNEMAN, D. and A. TVRESKY, "Prospect Theory: an Analysis of Decision under Risk", Econometrica, vol. 47, 1979, (263-91).

KEENEY, R.L. and H. RAIFFA, Decisions with Multiple Objectives: Preferences and Value Tradeoffs, Wiley, N.Y. 1976.

LECLERCQ, J.P. "Stochasting Programming: An Interactive Multicriteria Approach", EJOR Vol. 10, 1982 (33-41).

LEVY, H. and M. SARNAT, Portfolio and Investment Selection: Theory and Practice, Prentice-Hall International, Inc., 1984.

MARESCHAL, B. "Stochastic Multicriteria Decision Making and Uncertainty", EJOR, Vol. 26, 1986 (58-64).

MARTEL, J.M. and G.R. D'AVIGNON, "Projects Ordering with Multicriteria Analysis" EJOR Vol. 10, 1982 (59-69).

MARTEL, J.M., D'AVIGNON, G.R. and J. COUILLARD, "A Fuzzy Relation in Multicriteria Decision Making", EJOR, Vol. 25, 1986 (258-71).

PRATT, J.W., "Risk Aversion in the Small and in the Large", Econometrica, Vol. 32, 1964 (122-36).

ROY, B., Méthodologie multicritère d'aide à la décision, Economica, 1985.

SAATY, T.L. and L.G. VARGAS, "Uncertainty and Rank Order in the Analytic Hierarchy Process", EJOR, Vol. 32, 1987 (107-117).

SISKOS, J., "Analyse de systèmes de décision multicritère en univers aléatoire", Foundations of Control Engineering, Vol. 8, 3-4, 1983 (193-212).

STIGLITZ, J.E., "Review of some Aspects of Theory of Risk Bearing by K.J. Arrow", Econometrica, Vol. 38, 1970.

TEGHEM J., DUFRANE, D., THAUVOYE, M. and P. KUNSCH, "STRANGE: An interactive Method for Multi-objective Linear Programming under Uncertainty", EJOR, Vol. 26, 1986 (65-82).

URLI, B., La programmation multicritère stochastique avec information incomplète, thèse de doctorat, Faculté des sciences de l'administration, Université Laval, 1989.

VINCKE, PH., L'aide multicritère à la décision, Éditions de l'Université de Bruxelles, Collection SMA, 1989.

WHITMORE, G.A., "Third-Degree Stochastic Dominance", Amer. Econ. Rev., Vol. 60, June 1970 (457-59).

ZARAS, K., "Dominances stochastiques pour deux classes de fonctions d'utilité: concaves et convexes", RAIRO, Recherche Opérationnelle, Vol. 23, 1, 1989 (57-65).

ANNEXE

Nous considérons l'ensemble des dominances stochastiques, à savoir FSD (Dominance Stochastique du premier Degré), SSD (Dominance Stochastique du second Degré), SISD (Dominance Stochastique du deuxième Degré Inverse), TSD (Dominance Stochastique du troisième Degré) TISD1 (Dominance Stochastique du troisième degré Inverse, Première Espèce) et TISD2 (Dominance Stochastique du troisième degré Inverse, Seconde Espèce). Ces dominances stochastiques sont définies de la façon suivante:

Définition 1

F_{ij} FSD F_{ij}' si et seulement si $F_{ij} \neq F_{ij}'$

$$H_1(x_i) = F_i(x_{ij}) - F_i(x_{ij}') \leq 0 \text{ pour tout } x_i \in [x_{i*}, x_i^*]$$

Définition 2

F_{ij} SSD F_{ij}' si et seulement si $F_{ij} \neq F_{ij}'$

$$\text{et } H_2(x_i) = \int_{x_{i*}}^{x_i} H_1(y)\,dy \leq 0 \text{ pour tout } x_i \in [x_{i*}, x_i^*]$$

Définition 3

$\bar{F}_{ij}$ SISD $\bar{F}_{ij}'$ si et seulement si $\bar{F}_{ij} \neq \bar{F}_{ij}'$

$$\text{et } \bar{H}_2(x_i) = \int_{x_i}^{x_i^*} (\bar{F}_{ij}(y) - \bar{F}_{ij}'(y))\,dy \geq 0 \text{ pour tout } x_i \in [x_{i*}, x_i^*]$$

Définition 4

F_{ij} TSD F_{ij}' si et seulement si $F_{ij} \neq F_{ij}'$

$$\text{et } H_3(x_i) = \int_{x_{i*}}^{x_i} H_2(y)\,dy \leq 0 \text{ pour tout } x_i \in [x_{i*}, x_i^*]$$

<u>Définition 5</u>

$\bar{F}_{ij}$ TISD1 $\bar{F}_{ij'}$ si et seulement si $\bar{F}_{ij} \neq \bar{F}_{ij'}$

$$\text{et } \hat{H}_3(x_i) = \int_{x_{i*}}^{x_i} \bar{H}_2(y)\, dy \geq 0 \text{ pour tout } x_i \in [x_{i*}, x_i^*]$$

<u>Définition 6</u>

$\bar{F}_{ij}$ TISD2 $\bar{F}_{ij'}$ si et seulement si $\bar{F}_{ij} \neq \bar{F}_{ij'}$

$$\text{et } \bar{H}_3(x_i) = \int_{x_i}^{x_i^*} \bar{H}_2(y)\, dy \geq 0 \text{ pour tout } x_i \in [x_{i*}, x_i^*]$$