

CAHIER DU LAMSADE

Laboratoire d'Analyse et Modélisation de Systèmes pour l'Aide à la Décision
(Université Paris-Dauphine)

Unité de Recherche Associée au CNRS n° 825

SUR LA QUANTIFICATION DES JUGEMENTS DE VALEURS : L'APPROCHE MACBETH

CAHIER N° 117
septembre 1993

C.A. BANA e COSTA ¹
J.C. VANSNICK ²

reçu : juillet 1993.

¹ Université Technique de Lisbonne, IST/CESUR, Av. Rovisco Pais, 1000 Lisbonne, Portugal.

² Université de Mons-Hainaut, FSES, Place du Parc 21, 7000 Mons, Belgique.

TABLE DES MATIÈRES

Abstract	i
Résumé	i
1. Introduction	1
2. Comment interroger Z ?	3
3. Le mode de questionnement de MACBETH	5
4. Exploitation des réponses	8
5. Les programmes Mc1, Mc2, Mc3 et Mc4	11
6. Formulation mathématique	14
7. Exemples	19
8. Plan général de l'approche MACBETH	27
9. MACBETH et l'aide à la décision	30
Bibliographie	33

QUANTIFICATION OF VALUE JUDGEMENTS: THE MACBETH APPROACH

Abstract

In this paper we present MACBETH, a new approach to make easier the construction of a cardinal scale quantifying value judgements of a person Z about elements of a finite set A . MACBETH is a constructive approach where interaction and simplicity are fundamental ideas. To reach these purposes, the questioning procedure is based upon the expression by Z of absolute judgements of difference of attractiveness between elements of A .

In the aim of facilitating a dialogue with Z and aiding Z on learning about his or her preference system, MACBETH offers information concerning the internal coherence of his or her qualitative judgements, and it derives numerical values to be later on used as a basis for the construction of a measurable value function on A . In technical terms, these coherent data and numerical values are the outputs of a chain of four linear programmes that treat and explore the judgmental information given by Z .

MACBETH stands for **M**asuring **A**tttractiveness by a **C**ategorical **B**ased **E**valuation **T**ecHnique.

SUR LA QUANTIFICATION DES JUGEMENTS DE VALEUR : L'APPROCHE MACBETH

Résumé

L'objet de cet article est de présenter l'approche MACBETH, une nouvelle clé d'entrée pour la construction d'une échelle cardinale quantifiant les jugements de valeur qu'une personne Z peut émettre à propos des éléments d'un ensemble fini A . Nous y proposons un mode de questionnement de Z basé sur l'expression de jugements absolus concernant la différence d'attractivité pouvant exister entre deux éléments quelconques de A . L'approche s'insère dans une voie constructiviste et l'idée d'apprentissage et d'interaction avec Z y est fondamentale.

L'outil mathématique sous-jacent est la programmation linéaire. Quatre programmes linéaires permettent d'exploiter les informations qualitatives fournies par Z ; ils fournissent non seulement des valeurs numériques pouvant servir de base à l'élaboration d'une fonction de valeur mesurable sur A mais encore divers renseignements permettant de faciliter le dialogue avec Z .

L'origine du nom MACBETH est : **M**asuring **A**tttractiveness by a **C**ategorical **B**ased **E**valuation **T**ecHnique.

1. Introduction

L'objet de cet article est de présenter l'approche MACBETH, une voie nouvelle visant à aider une personne Z à élaborer des jugements de valeur de nature cardinale sur les éléments d'un ensemble fini A et à associer, à chaque élément a de A , un nombre réel $\mu(a)$ de telle sorte que la condition suivante soit satisfaite :

Condition I : $\forall a, b, c, d \in A$ avec a plus attractif que b et c plus attractif que d , aux yeux de Z , le rapport $[\mu(a) - \mu(b)] / [\mu(c) - \mu(d)]$ reflète le rapport (que Z ressent de façon plus ou moins précise) des différences d'attractivité entre a et b d'une part et c et d d'autre part.

Notons que cette condition implique que la relation binaire P définie sur A par : " $\forall a, b \in A, aPb$ si et seulement si, pour Z , a est strictement plus attractif que b " est asymétrique et négativement transitive.

Bien qu'il ne soit nullement nécessaire de faire l'hypothèse que l'on dispose, au début de l'application de l'approche MACBETH, d'une telle relation et que la construction de celle-ci puisse être vue comme une première étape du processus d'apprentissage que constitue MACBETH, nous supposons cependant ci-dessous qu'il en est ainsi. Pour pouvoir nous concentrer sur l'aspect "cardinal" du problème, nous ferons même l'hypothèse que non seulement l'on possède déjà un rangement des éléments de A par ordre d'attractivité décroissante, mais encore que ce rangement ne comporte pas d'ex-aequo. En d'autres termes, nous supposons dans ce papier que :

Hypothèse H : on dispose d'une relation binaire P sur A , asymétrique, négativement transitive et connexe, qui modélise les jugements d'attractivité de nature ordinale de Z concernant les éléments de A .

Pour revenir à l'objet de ce travail, notons que la méthode du *direct rating* consiste à demander directement à Z de donner des nombres tels que $\mu(a)$, $a \in A$, mais qu'elle ne lui fournit en fait pas d'aide pour le faire, si ce n'est peut-être la donnée de deux points d'ancrage (généralement l'élément le moins attractif et l'élément le plus attractif, auxquels on associe arbitrairement deux nombres, d'habitude 0 et 100).

Même si Z a des sensations de différences d'attractivité, nous pensons qu'elle n'a pas nécessairement en tête ce que la méthode du *direct rating* lui demande et qu'il est important de disposer d'une méthode permettant de l'aider à construire une échelle sur A vérifiant la *condition I*.

L'approche MACBETH ("Measuring Attractiveness by a Categorical Based Evaluation TechNique"), dont la présentation constitue l'objet de ce papier, répond à cette préoccupation : c'est une *clé d'entrée* dans la modélisation des préférences cardinales.

Le papier est organisé comme suit.

En vue de bien mettre en lumière les idées sous-jacentes à MACBETH, nous consacrerons le paragraphe 2 à l'examen de modes de questionnement envisageables pour construire une échelle $\mu : A \rightarrow \Re$ vérifiant la *condition I*.

Les paragraphes 3 et 4 présenteront les principes de base de MACBETH : le mode de questionnement retenu et les idées générales concernant l'exploitation des réponses.

La mise en pratique de ces idées nous a conduits à l'élaboration de quatre programmes linéaires dont la présentation fera l'objet du paragraphe 5. Le paragraphe 6 sera consacré à leur formulation mathématique précise et le paragraphe 7 à la présentation d'applications numériques de ceux-ci.

Dans le paragraphe 8, nous présenterons un schéma général de l'approche MACBETH rassemblant, en un tout cohérent, les différentes étapes présentées au cours des paragraphes précédents.

Dans le paragraphe 9 enfin, nous montrerons l'intérêt de disposer d'une telle méthode pour l'aide à la décision, en quoi elle se différencie nettement de la méthode de Saaty mais aussi comment elle peut aisément être adaptée pour aider à construire une échelle de rapport dans le cas où le concept de base envisagé n'est pas celui d'attractivité mais un concept monopolaire tel que celui de priorité ou d'importance.

2. Comment interroger Z ?

Pour parvenir à déterminer une échelle $\mu : A \rightarrow \mathfrak{R}$ vérifiant la *condition 1*, il convient d'interroger Z à propos de différences d'attractivité entre éléments de A.

Il est clair cependant qu'il n'est pas possible, $\forall a, b, c, d \in A$ avec aPb et cPd , de demander à Z une estimation numérique du rapport des différences d'attractivité qu'il ressent entre a et b d'une part et c et d d'autre part. En effet, non seulement ce type de demande est très difficile mais de plus le nombre de questions à poser croît très rapidement avec le cardinal de A.

Afin de réduire ce nombre de questions, on peut envisager de choisir arbitrairement deux éléments x^+ et x^- de A avec x^+Px^- et de demander à Z, $\forall a, b \in A$ avec aPb , une estimation numérique (que nous noterons $E(a, b)$) du rapport des différences d'attractivité qu'elle ressent entre a et b d'une part et x^+ et x^- d'autre part.

Cependant, si ce mode de questionnement diminue très largement le nombre de questions à poser à Z, il n'empêche que celles-ci sont toujours aussi difficiles. Il y a d'ailleurs peu d'espoir que l'on puisse, à partir des réponses fournies, déterminer une application μ de A dans $\mathfrak{R}$ telle que :

$$\forall a, b \in A \text{ avec } aPb, [\mu(a) - \mu(b)] / [\mu(x^+) - \mu(x^-)] = E(a, b),$$

car il faudrait pour cela que :

$$\forall a, b, c \in A \text{ avec } aPb \text{ et } bPc, E(a, c) = E(a, b) + E(b, c),$$

ce qui exigerait de Z une cohérence tout à fait exceptionnelle dans ses réponses.

Comment alors rendre le questionnement plus facile ?

Une idée possible consiste à :

1) introduire N nombres réels $s_0, s_1, s_2, \dots, s_{N-1}$ tels que :

$$0 = s_0 < s_1 < s_2 < \dots < s_{N-1}$$

2) demander à Z de partitionner $\{(a,b) \in A \times A \mid aPb\}$ en N relations

$$P_1, P_2, \dots, P_N$$

telles que :

$\forall i = 1, 2, \dots, N-1 :$

$$P_i = \{(a,b) \in A \times A \mid aPb \text{ et } s_{i-1} < [\text{Diff. Attract. } (a,b)] / [\text{Diff. Attract. } (x^+, x^-)] < s_i\}$$

et

$$P_N = \{(a,b) \in A \times A \mid aPb \text{ et } s_{N-1} < [\text{Diff. Attract. } (a,b)] / [\text{Diff. Attract. } (x^+, x^-)]\}.$$

Au départ de ce type d'information, on pourrait essayer de déterminer une application μ de A dans $\mathfrak{R}$ vérifiant les conditions suivantes :

$\forall a, b \in A$ avec aPb :

$$\begin{cases} \forall i = 1, 2, \dots, N-1, s_{i-1} < [\mu(a) - \mu(b)] / [\mu(x^+) - \mu(x^-)] \leq s_i & \text{lorsque } (a,b) \in P_i \\ s_{N-1} < [\mu(a) - \mu(b)] / [\mu(x^+) - \mu(x^-)] & \text{lorsque } (a,b) \in P_N. \end{cases}$$

Une fois ces valeurs obtenues, elles pourraient servir comme point de départ d'une discussion avec Z quant à savoir si on peut considérer qu'elles satisfont la *condition I* ou si elles doivent être modifiées à cet effet (et comment).

Avant de commenter cette façon d'interroger Z et d'arriver au mode de questionnement adopté dans MACBETH, notons cependant qu'il se pourrait qu'une application μ vérifiant les conditions ci-dessus n'existe pas. En effet, même si elles sont moins faciles à exprimer que précédemment, des conditions de cohérence apparaissent également dans ce cas. Ainsi par exemple,

si $(a,b) \in P_2$ et $(b,c) \in P_4$,

on déduit de

$$\begin{cases} s_1 < [\mu(a) - \mu(b)] / [\mu(x^+) - \mu(x^-)] \leq s_2 \\ s_3 < [\mu(b) - \mu(c)] / [\mu(x^+) - \mu(x^-)] \leq s_4 \end{cases}$$

que l'on doit avoir

$$s_1 + s_3 < [\mu(a) - \mu(c)] / [\mu(x^+) - \mu(x^-)] \leq s_2 + s_4,$$

ce qui limite les possibilités de réponse concernant le couple (a,c).

Nous renvoyons à [Doignon, 1987], et plus particulièrement à la proposition 3 de ce papier, pour l'expression d'une condition nécessaire et suffisante pour qu'une application μ telle que nous la recherchons existe.

3. Le mode de questionnement de MACBETH

Le mode de questionnement précédent présente à nos yeux deux points faibles. D'abord, en demandant de comparer deux différences d'attractivité, chaque question fait intervenir quatre éléments, ce qui la rend difficile pour Z.

Ensuite, la procédure compte de nombreux points d'ancrage (les éléments x^+ et x^- ainsi que les valeurs $s_1, s_2, \dots, s_{N-1}$) qui, comme on le sait (voir par exemple [Russo et Schoemaker, 1989], peuvent fortement influencer les réponses de Z. Même dans une conception constructiviste, il est gênant de savoir que le résultat final risque de dépendre pour une bonne part d'éléments arbitraires indépendants de Z.

En vue de palier ces points faibles, nous avons eu recours, dans l'approche MACBETH, à un mode de questionnement basé sur la notion de jugement absolu plutôt que sur celle de jugement comparatif.

Voici comment le psychologue Arthur L. Blumenthal présente, dans son ouvrage *The Process of Cognition*, ces deux notions :

"Absolute judgement is the identification of the magnitude of some simple stimulus – for instance, the brightness of a light, the loudness of a tone, or the curvature of a line – whereas comparative judgement is the identification of some relation between two stimuli both present to the observer." [Blumenthal, 1977, p. 95].

L'une des idées de base de MACBETH est de demander à Z d'émettre, pour tout couple (a, b) de $A \times A$ avec aPb , *un jugement absolu sur la différence d'attractivité existant entre a et b.*

D'après Blumenthal, le nombre de nuances qu'une personne est capable d'introduire lors de l'expression d'un jugement absolu est extrêmement limité :

"These limits vary within a narrow range now commonly known as the magical number 7 plus-or-minus 2 following Miller's (1956) description". [Op. cit., p. 88].

Le mode de questionnement utilisé dans MACBETH tient compte de ces connaissances, puisque l'on demande à Z de partitionner $\{(a, b) \in A \times A \mid aPb\}$ en 6 catégories (on pourrait aussi dire en 6 relations) que nous proposons d'introduire sémantiquement comme suit :

- trois **catégories fondamentales**

$C_2 = \{(a,b) \in A \times A \mid aPb \text{ et la différence d'attractivité entre } a \text{ et } b \text{ est } \mathbf{faible}\}$

$C_4 = \{(a,b) \in A \times A \mid aPb \text{ et la différence d'attractivité entre } a \text{ et } b \text{ est } \mathbf{forte}\}$

$C_6 = \{(a,b) \in A \times A \mid aPb \text{ et la différence d'attractivité entre } a \text{ et } b \text{ est } \mathbf{extrême}\}$

- trois **catégories intermédiaires**

(essentiellement pour prendre en compte des situations d'hésitation)

$C_1 = \{(a,b) \in A \times A \mid aPb \text{ et la différence d'attractivité entre } a \text{ et } b \text{ est } \mathbf{négligeable \text{ ou très faible} - on pourrait aussi dire de nulle à faible}\}$

$C_3 = \{(a,b) \in A \times A \mid aPb \text{ et la différence d'attractivité entre } a \text{ et } b \text{ est } \mathbf{modérée} - on pourrait aussi dire de faible à forte}\}$

$C_5 = \{(a,b) \in A \times A \mid aPb \text{ et la différence d'attractivité entre } a \text{ et } b \text{ est } \mathbf{très forte} - on pourrait aussi dire de forte à extrême}\}$

Compte tenu de *l'hypothèse H* que nous avons faite, on peut, sur le plan pratique, procéder de la manière suivante pour interroger Z.

Soit $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ où les éléments de A ont été indicés de telle sorte que

$$\forall i \neq j \in \{1, 2, \dots, N\}, a_i P a_j \text{ si et seulement si } i > j$$

c'est-à-dire que le rangement des éléments de A par ordre d'attractivité décroissante est a_n puis a_{n-1} puis ... puis a_2 puis a_1 . Il suffit alors de remplir, ligne par ligne, la partie surdiagonale de la matrice $n \times n$ ¹

1 Comme nous l'avons dit au § 1, *l'hypothèse H* n'est pas du tout indispensable pour l'approche MACBETH. Lorsque les éléments de A n'ont pas été préalablement rangés, il suffit, $\forall a, b \in A$, de demander à Z si aPb , bPa ou s'il n'y a pas de différence d'attractivité entre a et b, et dans le cas aPb (resp. bPa) de préciser la catégorie C_1 à C_6 qui correspond à la différence d'attractivité qu'il ressent entre a et b (resp. entre b et a). Il est facile de vérifier s'il existe un rangement sous-jacent à ce type d'information (cf. [Roberts, 1979, § 3.1.1] et, si ce n'est pas le cas, une discussion à caractère purement ordinal sera entreprise avec Z afin de réviser les jugements initiaux et d'arriver à un rangement. Si celui-ci comporte des ex-aequo, on pourra, après vérification de la compatibilité des informations cardinales données (si ce n'est pas le cas, une nouvelle discussion s'instaure), se ramener au cas considéré dans *l'hypothèse H* en faisant choix, dans chaque classe d'équivalence, d'éléments ex-aequo d'un et d'un seul représentant de la classe.

$$\begin{array}{c}
 a_n \quad a_{n-1} \quad a_{n-2} \quad \cdot \quad \cdot \quad a_3 \quad a_2 \quad a_1 \\
 \left[\begin{array}{cccccccc}
 a_n & \star & a_{n,n-1} & a_{n,n-2} & \cdot & \cdot & a_{n,3} & a_{n,2} & a_{n,1} \\
 a_{n-1} & \star & \star & a_{n-1,n-2} & \cdot & \cdot & a_{n-1,3} & a_{n-1,2} & a_{n-1,1} \\
 \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & & \cdot & \cdot & \cdot \\
 \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & & \cdot & \cdot & \cdot \\
 \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & & \cdot & \cdot & \cdot \\
 a_3 & \star & \star & \star & \cdot & \cdot & \star & a_{3,2} & a_{3,1} \\
 a_2 & \star & \star & \star & \cdot & \cdot & \star & \star & a_{2,1} \\
 a_1 & \star & \star & \star & \cdot & \cdot & \star & \star & \star
 \end{array} \right]
 \end{array}$$

où, $\forall i > j \in \{1, 2, \dots, n\}$, $a_{i,j}$ prend la valeur $k \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ si et seulement si Z a placé le couple (a_i, a_j) dans la catégorie C_k .

Si Z est consistant dans ses réponses avec le rangement des éléments de A qu'il a donné, il est clair que :

- 1) $\forall i \in \{3, 4, \dots, n\}$, les valeurs $a_{i,j}$ apparaissant dans la ligne i ne peuvent pas décroître lorsque j décroît, c'est-à-dire que $[r < s \Rightarrow a_{i,r} \geq a_{i,s}]$
- 2) $\forall j \in \{1, 2, \dots, n-2\}$, les valeurs $a_{i,j}$ apparaissant dans la colonne j ne peuvent pas croître lorsque i décroît, c'est-à-dire que $[r < s \Rightarrow a_{r,j} \leq a_{s,j}]$.

Ceci est évidemment très facile à vérifier au cours du questionnement de Z. En cas de problème, une discussion peut donc immédiatement s'instaurer en vue de remettre les choses au point. Ce type de test s'insère à nos yeux parfaitement dans les perspectives d'apprentissage et d'interactivité qui sous-tendent l'approche MACBETH.

Notons encore que le test de consistance ci-dessus est équivalent au suivant :

$\forall a, b, c \in A$ avec aPb et bPc :

$$[(a, b) \in C_k \text{ et } (b, c) \in C_{k'}] \Rightarrow (a, c) \in C_{k''} \text{ avec } k'' \geq \max\{k, k'\}.$$

4. Exploitation des réponses

Lorsque, $\forall a, b \in A$ avec aPb , Z a assigné le couple (a, b) à l'une des 6 catégories proposées, l'idée générale de MACBETH est :

A) de déterminer simultanément :

- ☐ 6 nombres réels $s_0, s_1, s_2, s_3, s_4, s_5$ tels que $0 = s_0 < s_1 < s_2 < s_3 < s_4 < s_5$ (dont l'objet est de servir de bornes aux intervalles qui vont représenter "quantitativement" les 6 catégories introduites sémantiquement)

et

- ☐ une application μ de A dans $\Re$ telle que, $\forall a, b \in A$ avec aPb :
 $s_{k-1} < \mu(a) - \mu(b) \leq s_k$ si et seulement si $(a, b) \in C_k$ lorsque $k \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$

et

$$s_5 < \mu(a) - \mu(b) \text{ si et seulement si } (a, b) \in C_6$$

B) de présenter à Z les valeurs $\mu(a)$ ainsi déterminées et, en discutant avec lui et en prenant quelques exemples, d'examiner si elles peuvent être considérées comme satisfaisant la *condition I* ou si elles doivent être modifiées à cet effet.

Ceci appelle quelques commentaires et précisions ; deux concernent la partie **A** et un la partie **B**

Premier commentaire concernant A

Même si Z est consistant dans ses réponses avec le rangement des éléments de A qu'il a donné (cf. § précédent), il se pourrait très bien qu'il n'existe pas 6 nombres réels $s_0, s_1, s_2, s_3, s_4, s_5$ et une application μ de A dans $\Re$ satisfaisant les conditions ci-dessus.

Ainsi par exemple, si A comporte 5 éléments et si les réponses de Z sont les suivantes :

	a_5	a_4	a_3	a_2	a_1
a_5	*	1	2	5	6
a_4	*	*	1	3	4
a_3	*	*	*	2	4
a_2	*	*	*	*	3
a_1	*	*	*	*	*

on déduit de

$$(a_5, a_3) \in C_2, (a_3, a_2) \in C_2 \text{ et } (a_5, a_2) \in C_5$$

que l'on devrait avoir

$$s_4 < 2.s_2$$

et de

$$(a_4, a_2) \in C_3, (a_2, a_1) \in C_3 \text{ et } (a_4, a_1) \in C_4$$

que l'on devrait avoir

$$2.s_2 < s_4,$$

ce qui est évidemment impossible.

Pour qu'il existe 6 nombres réels $s_0, s_1, s_2, s_3, s_4, s_5$ et une application μ de A dans $\mathfrak{R}$ satisfaisant les conditions ci-dessus, une certaine "*cohérence*" doit apparaître dans les réponses de Z .

Sur le plan théorique, ce problème est tout à fait semblable à celui des *semi-ordres multiples à seuils constants*, problème étudié et résolu dans le cas général [nombre fini quelconque de relations (= de catégories dans notre cas)] dans [Doignon, 1987].

Les travaux de Roy et Vincke [1987] sur les pseudo-ordres à seuils constants, de même que l'article de Cozzens et Roberts [1982], peuvent également être rattachés au problème théorique sous-jacent à la "*cohérence*" des réponses de Z .

Deuxième commentaire concernant A

Compte tenu de la définition sémantique des 6 catégories introduites, il nous a paru peu acceptable de ne pas imposer d'autres conditions que

$$0=s_0 < s_1 < s_2 < s_3 < s_4 < s_5$$

aux bornes des intervalles destinés à représenter numériquement ces catégories.

Comme la catégorie C_1 correspond à des différences d'attractivité négligeables ou très faibles, nous avons considéré comme *incohérentes* des réponses du type :

$$(a,b) \in C_k \text{ (} k = 1, 2, 3 \text{ ou } 4), (b,c) \in C_1 \text{ et } (a,c) \in C_{k+2} \text{ ou } C_{k+3} \text{ ou } \dots$$

Ceci nous a conduit à imposer que, $\forall k \in \{2, 3, 4, 5\}$, la dimension $s_k - s_{k-1}$ de l'intervalle $]s_{k-1}, s_k]$ correspondant à la catégorie C_k soit strictement supérieure à la dimension $s_1 - s_0$ de l'intervalle $]s_0, s_1]$ correspondant à la catégorie C_1 .

Commentaire concernant B

Bien que cela apparaisse déjà dans l'énoncé du point **B**, insistons sur le fait que les valeurs déterminées par MACBETH ne sont que des suggestions servant de point de départ pour la construction d'une échelle satisfaisant la *condition I* mais ne sont en aucun cas imposées à Z comme la solution du problème posé.

MACBETH se veut essentiellement une *approche interactive d'aide à la construction* d'une échelle cardinale sur A.

5. Les programmes Mc1, Mc2, Mc3 et Mc4

La détermination pratique de nombres réels $s_0, s_1, s_2, s_3, s_4, s_5$ et $\mu(a)$ ($a \in A$) vérifiant les conditions :

$$\text{Condition 1} \quad 0=s_0 < s_1 < s_2 < s_3 < s_4 < s_5$$

$$\text{Condition 2} \quad \forall k \in \{2, 3, 4, 5\}, s_k - s_{k-1} \geq s_1 - s_0$$

$$\text{Condition 3} \quad \forall a, b \in A \text{ avec } aPb :$$

$$\begin{cases} s_{k-1} < \mu(a) - \mu(b) \leq s_k & \text{si et seulement si } (a, b) \in C_k \text{ lorsque } k \in \{1, 2, 3, 4, 5\} \\ s_5 < \mu(a) - \mu(b) & \text{si et seulement si } (a, b) \in C_6 \end{cases}$$

pose un double problème.

D'abord, de tels nombres n'existent pas nécessairement puisque certaines conditions de cohérence doivent être vérifiées pour que leur détermination soit possible.

Ensuite, la présence d'inégalités strictes dans les conditions à satisfaire n'est pas compatible avec l'utilisation, pourtant très commode, de logiciels de programmation linéaire.

En vue de pouvoir bénéficier de tels logiciels, nous avons

1° posé $s_1 = 1$, ce qui n'est nullement restrictif puisque l'on peut fixer arbitrairement la "dimension" de l'intervalle correspondant à l'une des catégories $C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6$ (poser $s_1 = 1$ revient à fixer la dimension de l'intervalle correspondant à C_1 puisque cet intervalle est $]s_0, s_1]$ et que $s_0 = 0$)

2° introduit une quantité positive arbitrairement petite θ et remplacé la *condition 3* par la

$$\text{Condition 3'} \quad \forall a, b \in A \text{ avec } aPb :$$

$$\begin{cases} s_{k-1} + \theta \leq \mu(a) - \mu(b) \leq s_k & \text{si et seulement si } (a, b) \in C_k \text{ lorsque } k \in \{1, 2, 3, 4, 5\} \\ s_5 + \theta \leq \mu(a) - \mu(b) & \text{si et seulement si } (a, b) \in C_6 \end{cases}$$

3° transformé, compte tenu des deux points précédents, la *condition 2* qui traduisait le fait que (voir § précédent, deuxième commentaire concernant **A**) :

$$\forall k \in \{1, 2, 3, 4, 5\}, [(a,b) \in C_k \text{ et } (b,c) \in C_1] \Rightarrow [(a,c) \in C_k \cup C_{k+1}]$$

en la *Condition 2'*

$$\forall k \in \{2, 3, 4, 5\}, s_k - s_{k-1} \geq 1 - \theta.$$

Quant au problème de la cohérence, il nous a conduits à introduire plusieurs programmes linéaires dont certains sont enchaînés.

Ne sachant pas s'il existe des nombres réels $s_0, s_1, s_2, s_3, s_4, s_5$ et $\mu(a)$ ($a \in A$) vérifiant $s_0 = 0, s_1 = 1$ et les *conditions 2'* et *3'* – ce que nous appellerons le problème initial ou problème I – nous recherchons, dans un premier temps (*programme Mc1*), la plus petite valeur non négative $c_{\min}$ de c (nouvelle variable positive introduite dans la formulation du *programme Mc1*) pour laquelle le problème suivant admet une solution :

“Problème II :

déterminer des nombres

$$s_0, s_1, s_2, s_3, s_4, s_5 \text{ et } \mu(a) \text{ (} a \in A \text{)}$$

tels que :

- $s_0 = 0$ et $s_1 = 1$
- $\forall k \in \{2, 3, 4, 5\}, s_k - s_{k-1} \geq 1 - \theta$
- $\forall k \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ et $\forall (a,b) \in C_k : s_{k-1} + \theta - c \leq \mu(a) - \mu(b) \leq s_k + c$
- $\forall (a,b) \in C_6 : s_{k-1} + \theta - c \leq \mu(a) - \mu(b)$
- $\forall a,b \in A$ avec $aPb, \mu(a) - \mu(b) \geq \theta$

où θ désigne un réel strictement positif arbitrairement petit.”

N.B. Une telle valeur $c_{\min}$ (que nous avons appelée *valeur d'incohérence*) existe toujours lorsque les réponses de Z sont consistantes, ce qui est assuré par le mode de questionnement et les discussions qu'il peut y avoir durant celui-ci (voir § 3).

Le *programme Mc2*, qui est enchaîné au *programme Mc1*, a quant à lui pour but de déterminer une solution du problème II – dans lequel on a remplacé **c** par la valeur $c_{\min}$ – telle que :

- $\forall (a,b) \in C_k, k \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$, la différence d'attractivité $\mu(a) - \mu(b)$ est la plus proche possible du centre de l'intervalle correspondant à C_k

et

- $\forall (a,b) \in C_6$, la différence d'attractivité $\mu(a) - \mu(b)$ est la moins possible à l'extérieur de l'intervalle correspondant à C_6 .

Lorsque $c_{\min} = 0$, c'est que le problème initial était soluble (les réponses de Z étaient cohérentes) et on peut entrer dans la phase **B** de l'exploitation des réponses (cf. § 4) avec la solution fournie par le *programme Mc2*.

Par contre, une valeur strictement positive de $c_{\min}$ révèle la présence d'*incohérence* (par rapport à l'objectif qu'on s'est fixé) dans les réponses de Z.

Dans ce cas, les valeurs $\mu(a)$, $a \in A$, fournies par le *programme Mc2* sont celles qui, d'une certaine manière, tentent de "concilier au mieux" ces jugements incohérents.

Ces valeurs peuvent éventuellement être présentées à Z en vue d'entrer, comme dans le cas $c_{\min} = 0$, dans la phase **B** de l'exploitation des réponses ; afin de faciliter la discussion qui s'instaurera alors avec Z, le *programme Mc2* indique d'ailleurs les modifications de catégorie qui ont dû être faites pour essayer de concilier les réponses incohérentes.

Cependant, plutôt que de centrer la discussion sur les valeurs $\mu(a)$, on peut aussi, lorsque $c_{\min}$ n'est pas nul, inviter Z à réexaminer les réponses qu'il a données dans l'espoir d'arriver, au cours d'un processus interactif de réflexion et d'approfondissement des jugements, à un nouvel ensemble de réponses qui soit cohérent.

Les *programmes Mc3* et *Mc4* ont été conçus dans le but de faciliter un tel *processus interactif d'apprentissage*. Leur objectif est en effet de mettre en évidence certaines sources possibles d'incohérence afin de pouvoir amorcer la phase de discussion avec Z en attirant son attention sur certains jugements susceptibles d'être à l'origine du problème détecté par le *programme Mc1*.

6. Formulation mathématique

Programme Mc1

▪ Variables : $Bl_1, Bl_2, Bl_3, Bl_4, Bl_5, Bl_6$

(bornes inférieures des intervalles correspondant aux catégories C_1 à C_6 ; par rapport aux notations précédentes, $Bl_k = s_{k-1} + \theta$ où θ désigne un nombre réel strictement positif arbitrairement petit)

$BS_1, BS_2, BS_3, BS_4, BS_5$

(bornes supérieures des intervalles correspondant aux catégories C_1 à C_5 ; par rapport aux notations précédentes, $BS_k = s_k$)

$\mu(a), \forall a \in A$

c

▪ Contraintes :

0) chaque variable ≥ 0

1) $\forall k \in \{1, 2, 3, 4, 5\}, Bl_{k+1} - BS_k = \theta$

2) $Bl_1 = \theta$

3) $BS_1 = 1$

4) $\forall k \in \{2, 3, 4, 5\}, BS_k - Bl_k \geq 1 - \theta$

5) $\mu(a^-) = 0$ où, $\forall a \in A, aPa^-$

(le nombre associé à l'élément de A jugé le moins attractif par Z est arbitrairement fixé égal à 0, ce qui n'est nullement restrictif)

6) $\forall a, b \in A$ avec $aPb, \mu(a) - \mu(b) \geq \theta$

7) $\forall k \in \{2, 3, 4, 5, 6\}, \forall (a, b) \in C_k, \mu(a) - \mu(b) \geq Bl_k - c$

8) $\forall k \in \{1, 2, 3, 4, 5\}, \forall (a, b) \in C_k, \mu(a) - \mu(b) \leq BS_k + c$

▪ Objectif : Min c

▪ Information demandée au logiciel de programmation linéaire résolvant le programme Mc1 : valeur $c_{\min}$ de la variable c dans la solution de base optimale déterminée par le logiciel.

Programme Mc2

▪ Variables : $Bl_1, Bl_2, Bl_3, Bl_4, Bl_5, Bl_6$

$BS_1, BS_2, BS_3, BS_4, BS_5$

$\mu(a), \forall a \in A$

$\varepsilon(a,b)$ et $\eta(a,b), \forall (a,b) \in C_k, \forall k \in \{1, 2, 3, 4, 5\},$

(variables auxiliaires)

$\beta(a,b)$ et $\gamma(a,b), \forall (a,b) \in C_k, \forall k \in \{1, 2, 3, 4, 5\},$

(variables auxiliaires)

$\alpha(a,b)$ et $\delta(a,b), \forall (a,b) \in C_k, \forall k \in \{2, 3, 4, 5, 6\},$

(variables auxiliaires)

▪ Contraintes :

0) 1) 2) 3) 4) 5) 6) (voir *programme Mc1*)

9) $\forall k \in \{2, 3, 4, 5, 6\}, \forall (a,b) \in C_k, \mu(a) - \mu(b) \geq Bl_k - c_{\min}$

10) $\forall k \in \{1, 2, 3, 4, 5\}, \forall (a,b) \in C_k, \mu(a) - \mu(b) \leq BS_k + c_{\min}$

11) $\forall k \in \{1, 2, 3, 4, 5\}, \forall (a,b) \in C_k, \mu(a) - \mu(b) = (Bl_k + BS_k) / 2 + \varepsilon(a,b) - \eta(a,b)$

12) $\forall k \in \{1, 2, 3, 4, 5\}, \forall (a,b) \in C_k, \mu(a) - \mu(b) = BS_k + \beta(a,b) - \gamma(a,b)$

13) $\forall k \in \{2, 3, 4, 5, 6\}, \forall (a,b) \in C_k, \mu(a) - \mu(b) = Bl_k - \alpha(a,b) + \delta(a,b)$

▪ Objectif :
$$\text{Min} \left\{ \sum_{\substack{(a,b) \in C_k, \\ k \in \{1,2,3,4,5\}}} [\varepsilon(a,b) + \eta(a,b)] + \sum_{(a,b) \in C_6} \alpha(a,b) \right\}$$

▪ Informations demandées au logiciel de programmation linéaire résolvant le programme Mc2 : valeurs, en la solution de base optimale déterminée par le logiciel, des variables

$\mu(a), \forall a \in A$

$BS_1, BS_2, BS_3, BS_4, BS_5$

$\alpha(a,b), \forall (a,b) \in C_k, \forall k \in \{2, 3, 4, 5, 6\}$

$\beta(a,b), \forall (a,b) \in C_k, \forall k \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$

Remarque En toute solution de base du *programme Mc2*, on a nécessairement

$$\varepsilon(a,b) \cdot \eta(a,b) = 0, \quad \alpha(a,b) \cdot \delta(a,b) = 0 \quad \text{et} \quad \beta(a,b) \cdot \gamma(a,b) = 0.$$

Programmes Mc3 et Mc4

▪ Variables $Bl_1, Bl_2, Bl_3, Bl_4, Bl_5, Bl_6$

$BS_1, BS_2, BS_3, BS_4, BS_5$

$\mu(a), \forall a \in A$

$\beta(a,b)$ et $\gamma(a,b), \forall (a,b) \in C_k, \forall k \in \{1, 2, 3, 4, 5\},$
(variables auxiliaires)

$\alpha(a,b)$ et $\delta(a,b), \forall (a,b) \in C_k, \forall k \in \{2, 3, 4, 5, 6\},$
(variables auxiliaires)

▪ Contraintes **Mc3** : 0) 1) 2) 3) 4) 5) 6) 9) 10) 12) 13)
(voir programmes Mc1 et Mc2)

Mc4 : 0) 1) 2) 3) 4) 5) 6) 12) 13)
(voir programmes Mc1 et Mc2)

▪ Objectif : $\text{Min} \left\{ \sum_{\substack{(a,b) \in C_k, \\ k \in \{1,2,3,4,5\}}} \beta(a,b) + \sum_{\substack{(a,b) \in C_k, \\ k \in \{2,3,4,5,6\}}} \alpha(a,b) \right\}$

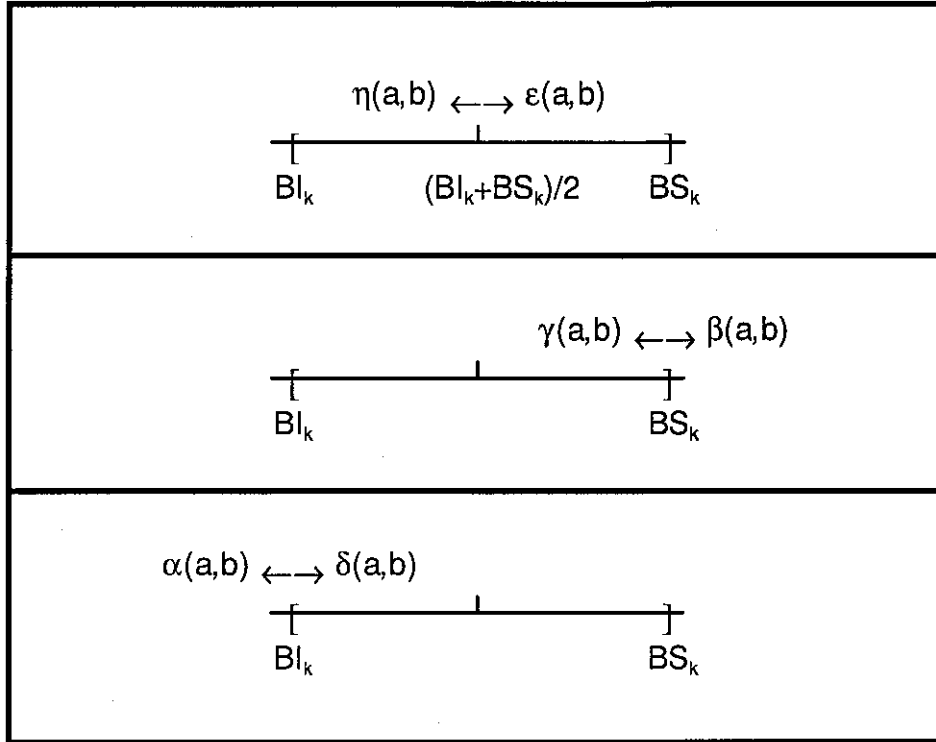
• Informations demandées au logiciel de programmation linéaire résolvant les programmes Mc3 et Mc4 : valeurs, en la solution de base optimale déterminée par le logiciel, des variables

$\alpha(a,b), \forall (a,b) \in C_k, \forall k \in \{2, 3, 4, 5, 6\}$
 $\beta(a,b), \forall (a,b) \in C_k, \forall k \in \{1, 2, 3, 4, 5\}.$

Voici quelques commentaires concernant ces différents programmes.

La formulation mathématique du *programme Mc1* n'appelle aucune remarque particulière car elle correspond très exactement à ce que nous avons annoncé dans le paragraphe précédent.

Dans les *programmes Mc2, Mc3 et Mc4*, nous avons introduit diverses variables auxiliaires qui apparaissent dans les équations 11), 12) et 13). Les schémas ci-dessous illustrent leur définition pour $(a,b) \in C_k, k \in \{2, 3, 4, 5\}$.



Les variables auxiliaires $\varepsilon(a,b)$ et $\eta(a,b)$ servent uniquement à pouvoir formuler aisément l'objectif du *programme Mc2* ; celui-ci correspond à l'idée que nous avons présentée dans le paragraphe précédent.

Les variables auxiliaires $\alpha(a,b)$ et $\beta(a,b)$ permettent, quant à elles, de repérer immédiatement les couples (a,b) qui n'ont pas pu être placés par le programme considéré dans la catégorie donnée par Z .

Lorsque Z a placé le couple (a,b) dans la catégorie C_k mais que le programme n'a pas pu déterminer $\mu(a)$ et $\mu(b)$ de telle sorte que $\mu(a) - \mu(b)$ appartienne à l'intervalle correspondant à C_k :

- $\alpha(a,b)$ est strictement positif si et seulement si $\mu(a) - \mu(b)$ est strictement inférieur à la borne inférieure Bl_k de l'intervalle correspondant à la catégorie C_k (en fait, $\alpha(a,b)$ est égal dans ce cas à la "distance" séparant le point représentant la différence d'attractivité $\mu(a) - \mu(b)$ et Bl_k)
- $\beta(a,b)$ est strictement positif si et seulement si $\mu(a) - \mu(b)$ est strictement supérieur à la borne supérieure BS_k de l'intervalle correspondant à la catégorie C_k (en fait, $\beta(a,b)$ est égal dans ce cas à la "distance" séparant le point représentant la différence d'attractivité $\mu(a) - \mu(b)$ et BS_k).

Quant aux variables $\delta(a,b)$ et $\gamma(a,b)$, elles ne présentent qu'un intérêt technique ; elles ont été introduites afin de pouvoir d'une part travailler avec toutes des variables positives et, d'autre part, formuler aisément l'objectif des *programmes Mc3* et *Mc4*.

Notons encore que les variables $\alpha(a,b)$ et $\beta(a,b)$ ne présentent d'intérêt que lorsque $c_{\min} > 0$, c'est-à-dire lorsque le *programme Mc1* a décelé de l'*incohérence* dans les jugements de Z.

Ce n'est aussi qu'à ce moment que les *programmes Mc3* et *Mc4* sont intéressants. En minimisant la somme des $\alpha(a,b)$ et $\beta(a,b)$, ils mettent l'accent sur des couples d'actions qui posent problème dans leur affectation à la catégorie spécifiée par Z.

Comme leur présentation le montre, les *programmes Mc3* et *Mc4* ne diffèrent que par le fait que deux contraintes présentes dans *programmes Mc3* et *Mc4* – les contraintes 9) et 10) – ne figurent pas dans *Mc4*.

Il est intéressant d'observer que ces deux contraintes, qui figurent dans *Mc3* mais pas dans *Mc4*, sont équivalentes aux deux contraintes suivantes :

$$9') \quad \forall k \in \{2, 3, 4, 5, 6\} \text{ et } \forall (a,b) \in C_k, \alpha(a,b) \leq c_{\min}$$

$$10') \quad \forall k \in \{1, 2, 3, 4, 5\} \text{ et } \forall (a,b) \in C_k, \beta(a,b) \leq c_{\min}.$$

Ceci laisse entrevoir que les changements de catégorie apparaissant dans la solution optimale du *programme Mc3* seront souvent plus nombreux que ceux liés à la solution du *programme Mc4* mais qu'ils correspondront en moyenne à des $\alpha(a,b)$ ou $\beta(a,b)$ plus petits (puisque limités, de par les contraintes, à la valeur maximale $c_{\min}$).

Les *programmes Mc3* et *Mc4* apportent des éclairages différents mais intéressants sur les sources possibles d'incohérence ; ils fournissent chacun des éléments d'information utiles pour la discussion avec Z.

Nous illustrerons notamment, dans le paragraphe suivant, comment ces informations peuvent être utilisées.

7. Exemples

Exemple 1

Cet exemple a pour but de montrer dans quelle mesure le *programme Mc2* peut reconstituer une échelle cardinale pré-existante lorsque les données qu'on y introduit sont déterminées de façon cohérente à partir de cette échelle.

Nous avons pris pour cela une échelle introduite par von Winterfeldt et Edwards [1986] pour illustrer la technique du *direct rating* ; elle concerne l'attractivité de 6 endroits, aux yeux d'une personne donnée (voir *op. cit.*, pp. 226–229). Rangés par ordre d'attractivité décroissante, ces 6 endroits sont :

a_6 : San Francisco
 a_5 : Boston
 a_4 : San Diego
 a_3 : Los Angeles
 a_2 : Chicago
 a_1 : Ann Arbor.

L'échelle cardinale obtenue par la technique du *direct rating* est donnée par $v(a_6) = 100$, $v(a_5) = 60$, $v(a_4) = 50$, $v(a_3) = 40$, $v(a_2) = 15$ et $v(a_1) = 0$.

Partant de ces valeurs, nous avons rempli la partie surdiagonale de la matrice 6×6

	a_6	a_5	a_4	a_3	a_2	a_1
a_6	*	?	?	?	?	?
a_5	*	*	?	?	?	?
a_4	*	*	*	?	?	?
a_3	*	*	*	*	?	?
a_2	*	*	*	*	*	?
a_1	*	*	*	*	*	*

après avoir défini les catégories comme suit :

- $(a,b) \in C_1$ lorsque $0 < v(a) - v(b) \leq 15$ ("dim." de l'intervalle : 15)
 $(a,b) \in C_2$ lorsque $15 < v(a) - v(b) \leq 31$ ("dim." de l'intervalle : 16)
 $(a,b) \in C_3$ lorsque $31 < v(a) - v(b) \leq 48$ ("dim." de l'intervalle : 17)
 $(a,b) \in C_4$ lorsque $48 < v(a) - v(b) \leq 66$ ("dim." de l'intervalle : 18)
 $(a,b) \in C_5$ lorsque $66 < v(a) - v(b) \leq 85$ ("dim." de l'intervalle : 19)
 $(a,b) \in C_6$ lorsque $85 < v(a) - v(b)$.

Nous avons ainsi obtenu le tableau des jugements suivant :

	a_6	a_5	a_4	a_3	a_2	a_1
a_6	*	3	4	4	5	6
a_5	*	*	1	2	3	4
a_4	*	*	*	1	3	4
a_3	*	*	*	*	2	3
a_2	*	*	*	*	*	1
a_1	*	*	*	*	*	*

L'application du *programme Mc1* à ces données a bien-sûr donné $c_{\min} = 0$ et les résultats fournis par le *programme Mc2* (avec $\theta = 0.001$) furent les suivants :

$$\mu(a_1) = 0, \mu(a_2) = 1.0, \mu(a_3) = 2.5, \mu(a_4) = 3.0, \mu(a_5) = 3.5 \text{ et } \mu(a_6) = 6.0.$$

En multipliant chacun de ces résultats par $100/6$, on obtient des valeurs permettant de mieux apprécier le degré de reconstitution de l'échelle de départ par MACBETH.

Echelle pré-existante : 0 15 40 50 60 100

Echelle "MACBETH" : 0 16.7 41.7 50 58.3 100.

Il est clair que, si nous avions défini les catégories autrement, nous aurions pu obtenir d'autres résultats. C'est effectivement ce que nous avons constaté en modifiant les définitions des catégories mais, dans chacun des cas envisagés, les résultats fournis par MACBETH furent "bons".

Voici par exemple ce que l'on obtient au départ de catégories définies comme suit :

$(a,b) \in C_1$ lorsque	$0 < v(a) - v(b) \leq 5$	("dim." de l'intervalle : 5)
$(a,b) \in C_2$ lorsque	$5 < v(a) - v(b) \leq 25$	("dim." de l'intervalle : 20)
$(a,b) \in C_3$ lorsque	$25 < v(a) - v(b) \leq 45$	("dim." de l'intervalle : 20)
$(a,b) \in C_4$ lorsque	$45 < v(a) - v(b) \leq 65$	("dim." de l'intervalle : 20)
$(a,b) \in C_5$ lorsque	$65 < v(a) - v(b) \leq 85$	("dim." de l'intervalle : 20)
$(a,b) \in C_6$ lorsque	$85 < v(a) - v(b)$	

ce qui conduit au tableau des jugements suivant :

	a_6	a_5	a_4	a_3	a_2	a_1
a_6	*	3	4	4	5	6
a_5	*	*	2	2	3	4
a_4	*	*	*	2	3	4
a_3	*	*	*	*	2	3
a_2	*	*	*	*	*	2
a_1	*	*	*	*	*	*

Echelle "MACBETH" : 0 18.7 37.5 50 62.5 100

Echelle pré-existante : 0 15 40 50 60 100.

Exemples 2 et 3

Ces deux exemples ont pour but de montrer ce qui peut se passer lorsque le tableau des jugements est *incohérent*, c'est-à-dire lorsque le résultat du programme *Mc1* est strictement positif. Ils illustrent les deux grands cas qui peuvent être à l'origine d'une telle situation :

- l'*incohérence "théorique"* (celle étudiée par Doignon [1987] – voir § 4, premier commentaire concernant **A**), et
- l'*incohérence liée à la définition sémantique des catégories* (voir § 4, deuxième commentaire concernant **A**).

Exemple 2

Reprenons le premier tableau des jugements de l'exemple 1 et modifions-le de manière à y introduire de l'incohérence liée à la définition sémantique des catégories. Disons par exemple que $(a_3, a_2) \in C_1$, $(a_2, a_1) \in C_1$ et $(a_3, a_1) \in C_5$. Compte tenu des changements impliqués par ces jugements, le tableau devient

	a_6	a_5	a_4	a_3	a_2	a_1
a_6	*	3	4	4	5	6
a_5	*	*	1	2	3	4
a_4	*	*	*	1	3	4
a_3	*	*	*	*	1	5
a_2	*	*	*	*	*	1
a_1	*	*	*	*	*	*

Les jugements correspondant à ce tableau sont inconsistants (voir dernière colonne). En accord avec le contenu du § 3, nous supposons que l'on a fait disparaître cette inconsistance en plaçant les couples (a_5, a_1) et (a_4, a_1) dans la catégorie C_5 . Nous avons donc introduit les jugements donnés par le tableau suivant dans les *programmes* *Mc1*, *Mc2*, *Mc3* et *Mc4*.

	a_6	a_5	a_4	a_3	a_2	a_1
a_6	*	3	4	4	5	6
a_5	*	*	1	2	3	5
a_4	*	*	*	1	3	5
a_3	*	*	*	*	1	5
a_2	*	*	*	*	*	1
a_1	*	*	*	*	*	*

Les résultats furent les suivants (avec $\theta = 0.001$) :

Mc1 : $c_{\min} = 0.667$

Mc2 : $\mu(a_1)=0$ $\mu(a_2)=1.667$ $\mu(a_3)=3.334$ $\mu(a_4)=4.000$ $\mu(a_5)=4.500$ $\mu(a_6)=7.001$

Variables $\alpha(a,b)$

	a_1
a_3	0.667
a_4	0.001

Variables $\beta(a,b)$

	a_1	a_2
a_2	0.667	
a_3		0.667
a_6		0.334

Mc3

Variables $\alpha(a,b)$

	a_1
a_3	0.667

Variables $\beta(a,b)$

	a_1	a_2
a_2	0.667	
a_3		0.667

Mc4

Variables $\alpha(a,b)$

	a_1
a_3	0.002

Variables $\beta(a,b)$

	a_1	a_2
a_2	1.000	
a_3		0.999

On constate que les programmes *Mc3* et *Mc4*, conçus pour détecter des sources possibles d'incohérence, remplissent parfaitement leur rôle dans ce cas : les trois couples détectés par les deux programmes sont ceux par lesquels nous avons introduit de l'incohérence dans le tableau des jugements.

Les deux programmes nous donnent cependant un éclairage différent sur ce que l'on peut envisager de faire pour lever cette incohérence ; ainsi par exemple, *Mc4* met clairement l'accent sur une modification de catégorie vers le haut pour les couples (a_2, a_1) et (a_3, a_2) , alors qu'aucune différenciation n'apparaît

d'un *Mc3* entre ces deux modifications et une modification de catégorie vers le bas pour le couple (a_3, a_1) .

Lorsque l'on place les couples (a_2, a_1) et (a_3, a_2) dans la catégorie C_2 plutôt que C_1 , signalons que *Mc1* donne $c_{\min} = 0$ et que les résultats fournis par *Mc2* sont alors :

$$\mu(a_1)=0 \quad \mu(a_2)=2.002 \quad \mu(a_3)=4.003 \quad \mu(a_4)=4.503 \quad \mu(a_5)=5.004 \quad \mu(a_1)=7.506.$$

Le tableau suivant permet de comparer ces seconds résultats aux premiers fournis par *Mc2* :

<i>Premiers résultats</i>	0	23.8	47.6	57.1	64.3	100
<i>Seconds résultats</i>	0	26.7	53.3	60.0	66.7	100.

Exemple 3

Cet exemple consiste à voir ce que donnent les *programmes Mc* lorsqu'on y introduit les jugements repris dans la matrice 5×5 du § 4, à savoir :

	a_5	a_4	a_3	a_2	a_1
a_5	*	1	2	5	6
a_4	*	*	1	3	4
a_3	*	*	*	2	4
a_2	*	*	*	*	3
a_1	*	*	*	*	*

Ce cas est beaucoup plus délicat que le précédent car il inclut à la fois de l'incohérence "théorique" (voir § 4) et de l'incohérence liée à la définition sémantique des catégories (il y a en fait deux cas de ce type : $(a_5, a_4) \in C_1$, $(a_4, a_1) \in C_4$ et $(a_5, a_1) \in C_6$ d'une part et $(a_5, a_4) \in C_1$, $(a_4, a_2) \in C_3$ et $(a_5, a_2) \in C_5$ d'autre part).

Les résultats furent les suivants (avec $\theta = 0.001$) :

Mc1 : $c_{\min} = 0.250$

Mc2 : $\mu(a_1)=0$ $\mu(a_2)=1.750$ $\mu(a_3)=3.500$ $\mu(a_4)=4.250$ $\mu(a_5)=4.500$ $\mu(a_6)=5.501$

Variables $\alpha(a,b)$			Variables $\beta(a,b)$		
	a_1	a_2		a_1	a_3 a_4
a_2	0.250		a_4	0.250	
a_5		0.250	a_5		5.000E-4 0.250

<i>Mc3</i> Variables $\alpha(a,b)$			Variables $\beta(a,b)$		
	a_1	a_2		a_1	a_4
a_2	0.250		a_4	0.250	
a_5		0.250	a_5		0.250

<i>Mc4</i> Variables $\alpha(a,b)$			Variables $\beta(a,b)$		
	a_1	a_2		a_1	
a_2	0.001		a_4	0.001	
a_5		1.000			

Comme on le voit, *Mc3* met évidence 4 couples : (a_2, a_1) , (a_5, a_2) , (a_4, a_1) et (a_5, a_4) . Ceux-ci sont tous liés aux problèmes d'incohérence ; en effet, les couples (a_2, a_1) , (a_5, a_2) et (a_4, a_1) sont impliqués dans l'incohérence "théorique" (voir § 4) ; quant aux couples (a_5, a_2) , (a_4, a_1) et (a_5, a_4) , ils sont mêlés à l'incohérence liée à la définition sémantique des catégories.

Mc4, quant à lui, met essentiellement un couple en lumière : le couple (a_5, a_2) qui est impliqué dans les deux types d'incohérence.

En refaisant tourner les *programmes Mc* après avoir placé le couple (a_5, a_2) dans la catégorie C_4 plutôt que C_5 (suivant en cela la "suggestion" de *Mc4* et en éliminant par là même deux des trois incohérences du tableau initial), on obtient les résultats suivants :

La valeur $c_{\min}$ fournie par *Mc1* est égale à $3.333E-4$.

Mc2 donne :

$$\mu(a_1)=0 \quad \mu(a_2)=2.001 \quad \mu(a_3)=3.501 \quad \mu(a_4)=4.002 \quad \mu(a_5)=5.002.$$

Mc3 fait apparaître les couples (a_5, a_4) , (a_4, a_1) et (a_5, a_1) comme source d'incohérence ; observons que ces couples sont précisément ceux impliqués dans la seule incohérence restant dans le tableau modifié (incohérence liée à la définition sémantique des catégories).

Il n'apparaît qu'un seul couple comme source d'incohérence dans *Mc4* : le couple (a_4, a_1) qui est l'un de ceux impliqués dans l'incohérence liée à la définition sémantique des catégories qui reste.

Au vu de la valeur de $c_{\min}$, on pourrait cependant dans un tel cas, s'il se présentait en réalité, envisager de passer à la phase **B** d'exploitation des résultats au départ des derniers résultats fournis par *Mc2* sans pousser plus en avant la recherche de la cohérence.

8. Plan général de l'approche MACBETH

Soit A un ensemble fini d'éléments qu'une personne Z a classé par ordre d'attractivité décroissante.

- $\forall a, b \in A$ avec aPb (a jugé plus attractif que b par Z), demander à Z d'émettre un jugement de valeur absolu sur la différence d'attractivité entre a et b , en choisissant parmi les 6 nuances suivantes (les 6 catégories suivantes) :

différence d'attractivité	– négligeable ou très faible (catégorie C_1)
	– faible (catégorie C_2)
	– modérée (catégorie C_3)
	– forte (catégorie C_4)
	– très forte (catégorie C_5)
	– extrême (catégorie C_6).

Au cours de ce questionnement, vérifier que Z est consistant dans ses réponses avec le rangement des éléments de A qu'il a donné (cf. § 3) ; sinon, discuter avec lui afin d'arriver à ce que la condition de consistance suivante soit satisfaite :

$\forall a, b, c \in A$ avec aPb et bPc :

$$[(a, b) \in C_k \text{ et } (b, c) \in C_{k'}] \Rightarrow (a, c) \in C_{k''} \text{ avec } k'' \geq \max\{k, k'\}.$$

- Entrer les informations recueillies dans les *programmes Mc*.

Deux cas sont alors à envisager.

Premier cas : $c_{\min} = 0$

Lorsque le résultat du *programme Mc1* est $c_{\min} = 0$, cela signifie qu'il est possible d'associer un nombre réel $\mu(a)$ à chaque élément a de A et de faire correspondre, aux 6 catégories de différence d'attractivité introduites, une partition de l'ensemble $\mathfrak{R}_0^+$ des nombres réels strictement positifs en 6 intervalles

$$\underbrace{]0, s_1]}_{C_1}, \underbrace{]s_1, s_2]}_{C_2}, \underbrace{]s_2, s_3]}_{C_3}, \underbrace{]s_3, s_4]}_{C_4}, \underbrace{]s_4, s_5]}_{C_5}, \underbrace{]s_5, +\infty[}_{C_6}$$

de telle sorte que le couple (a, b) appartient à la catégorie C_k si et seulement si $\mu(a) - \mu(b)$ appartient à l'intervalle correspondant à C_k .

Le *programme Mc2* donne alors notamment comme résultat des nombres que l'on peut associer aux éléments de A dans la perspective ci-dessus.

Une discussion s'instaure alors avec Z quant à savoir si on peut considérer que ces nombres satisfont la condition suivante :

Condition 1 : $\forall a, b, c, d \in A$ avec aPb et cPd , le rapport $[\mu(a) - \mu(b)] / [\mu(c) - \mu(d)]$ reflète le rapport (que Z ressent de façon plus ou moins précise) des différences d'attractivité entre a et b d'une part et c et d d'autre part.

Si ce n'est pas le cas, on demande à Z de modifier ces nombres pour que cette condition soit satisfaite.

A noter qu'une façon commode de présenter à Z les informations fournies par le *programme Mc2* est de placer, sur un axe vertical, chaque élément a de A de telle sorte que :

1°) $\forall a, b \in A$, a est placé au-dessus de b si et seulement si aPb

2°) $\forall a, b, c, d \in A$ avec aPb et cPd , le rapport

[distance entre les points a et b] / [distance entre les points c et d]

est égal au rapport

$[\mu(a) - \mu(b)] / [\mu(c) - \mu(d)]$.

Deuxième cas : $c_{\min} > 0$

Lorsque le résultat du *programme Mc1* est $c_{\min} > 0$, c'est qu'il n'est pas possible de représenter numériquement (selon les conventions présentées ci-dessus) les informations données par Z . Il y a de l'"incohérence" dans les réponses de Z (par rapport à l'objectif qu'on s'est fixé).

Dans ce cas, le *programme Mc2* fournit des valeurs $\mu(a)$ ($a \in A$) qui essaient de "concilier au mieux" ces jugements "incohérents" ; ces valeurs peuvent éventuellement être présentées à Z en vue d'entrer, comme dans le cas $c_{\min} = 0$, dans une phase de discussion visant à associer, à chaque élément a de A , un nombre de telle sorte que la *condition 1* soit satisfaite. *Mc2* fournit d'ailleurs des informations destinées à faciliter cette discussion (voir § 5).

Une autre possibilité, lorsque $c_{\min}$ n'est pas très petit, est de ne pas utiliser les résultats de *Mc2* et d'entamer une discussion avec Z sur les réponses qu'il a données afin d'arriver, suite à une réflexion approfondie sur ses jugements, à un nouvel ensemble de réponses (qu'on espère cohérentes et qui seront réintroduites dans les *programmes Mc1* et *Mc2*).

Cette phase de discussion peut être grandement facilitée par les *programmes Mc3* et *Mc4* dont le but est de mettre en évidence certaines sources possibles d'incohérence. Les résultats de ces programmes permettent donc de faire des suggestions à Z en vue d'arriver à un ensemble de réponses "cohérentes" (par rapport au but fixé). Ces suggestions ne constituent cependant qu'une base de discussion avec Z, celui-ci pouvant apporter n'importe quelle modification à l'ensemble de jugements qu'il a donnés précédemment.

A noter qu'aucune préoccupation de convergence du processus interactif décrit ci-dessus n'est présente dans MACBETH. C'est, nous semble-t-il, "le prix à payer" pour que le *processus d'apprentissage* qui sous-tend MACBETH puisse jouer pleinement son rôle et qu'à tout moment Z se sente libre de ses réponses et puisse, s'il le désire, envisager des retours en arrière dans l'expression de ses jugements.

9. MACBETH et l'aide à la décision

1) MACBETH présente à nos yeux un grand intérêt pour l'aide multicritère à la décision où plusieurs modèles d'agrégation nécessitent la construction, pour chacun des points de vue fondamentaux retenus suite à la structuration du problème, d'une échelle cardinale sur l'ensemble des actions ou sur l'ensemble des niveaux de référence associés au point de vue considéré. Nous pensons notamment en disant cela aux modèles axiomatisés par Dyer et Sarin [1979] mais aussi au modèle des différences additives :

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \succ y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \Leftrightarrow \sum_{k=1}^n \phi_k [\mu_k(x_k) - \mu_k(y_k)] > 0,$$

où $\succ$ est la relation de préférence globale et ϕ_k est une fonction monotone non décroissante. Ce modèle est dû à Tversky [1969] dans sa forme initiale qui incluait l'hypothèse que ϕ_k était une fonction monotone strictement croissante et impaire.² Il a été étendu à la forme présentée ci-dessus par Bouyssou [1986] qui l'axiomatisa dans le cas $n = 2$ et montra qu'il contenait à la fois les modèles classiques de l'école américaine et de l'école française d'aide à la décision. Dans le cas n quelconque, l'axiomatisation du modèle de Tversky-Morrison est due à Fishburn [1992].

2) Que peut-on dire de MACBETH par rapport à la méthode, proposée par Saaty [1977], de détermination d'une échelle de rapport "quantifiant" le concept de priorité ?

En fait, le seul point commun entre ces deux approches est que, comme Saaty, nous utilisons dans MACBETH une échelle sémantique dans le mode de questionnement de la personne interrogée. Pour le reste, des différences fondamentales existent entre les deux méthodes.

D'abord, l'échelle sémantique de Saaty porte sur des rapports alors que nous travaillons avec des différences ; ceci restreint le domaine d'application de la méthode de Saaty à la quantification de concepts monopolaires (cf. [Rescher, 1969]), c'est-à-dire de concepts admettant un "zéro" comme limite naturelle

2 Mentionnons que Fishburn [1992] cite la thèse de doctorat de H.W. Morrison (*Intransitivity of paired comparison choices*, Université de Michigan, 1962) comme la première référence à ce modèle.

(comme les concepts de "priorité" ou d'"importance" – qui admettent une telle limite puisqu'on ne peut pas descendre plus bas qu'un degré nul de priorité ou d'importance).

Avec l'approche MACBETH par contre, nous pouvons aussi bien travailler avec des concepts bipolaires (cf. [Rescher, 1969]) c'est-à-dire des concepts qui admettent un opposé et ne possèdent dès lors pas un "zéro" comme limite naturelle (comme par exemple le concept d'"attractivité", qui admet comme opposé celui de "répulsivité", ou celui de "désirabilité" qui admet comme opposé celui d'"indésirabilité") qu'avec des concepts monopolaires. Nous montrerons ci-dessous comment appliquer MACBETH pour aider à quantifier un concept de ce type, ce qui, notons-le, conduit immédiatement de par la particularité d'admettre un "zéro" comme limite naturelle à la notion d'échelle de rapport plutôt qu'à celle d'échelle d'intervalle.

Ensuite, le passage du "sémantique" au "quantitatif" est tout à fait différent chez Saaty et dans MACBETH. A chacune des catégories qu'il introduit, Saaty fait correspondre *un (et un seul) nombre* et celui-ci est *arbitrairement fixé*. Dans MACBETH, d'une part, c'est *un intervalle de $\mathbb{R}_0^+$* qui est associé à chacune des catégories et, d'autre part, *cet intervalle n'est pas fixé à priori*.

Ceci a évidemment pour conséquence que l'exploitation des informations n'est nullement comparable chez Saaty et dans MACBETH et que les mathématiques sous-jacentes aux deux approches sont donc aussi très différentes.

Enfin, la signification de l'indice de consistance de Saaty est difficile à cerner, si bien que les suggestions faites lorsque la valeur de cet indice est trop élevée ne sont guère propices au dialogue et à l'apprentissage, alors que la valeur d'incohérence introduite dans MACBETH et les suggestions qui en découlent, lorsqu'elle n'est pas nulle, ont une interprétation claire.

3) Montrons pour terminer comment MACBETH peut facilement s'appliquer à la quantification d'un concept monopolaire tel que, par exemple, celui de "priorité".

Soit A un ensemble fini d'éléments et Z une personne ayant rangé les éléments de A par ordre de priorité décroissante et supposons que l'on désire aider Z à associer, à chaque élément de A , un nombre réel strictement positif $\mu(a)$ de telle sorte que la condition suivante soit satisfaite :

Condition II $\forall a, b \in A$, le rapport $\mu(a)/\mu(b)$ reflète le rapport (que Z ressent de façon plus ou moins précise) des priorités de a et de b, c'est-à-dire la *priorité relative* de a par rapport à celle de b.

Si nous introduisons un élément fictif a_0 défini par le fait qu'il représente un élément de priorité nulle, c'est-à-dire un élément en-dessous de la priorité duquel on ne peut pas descendre, il suffit d'appliquer la méthode MACBETH à l'ensemble $A^* = A \cup \{a_0\}$ (en remplaçant partout le terme attractivité par le terme priorité) pour arriver au but poursuivi.

En effet,

- 1° l'application des *programmes Mc* conduira nécessairement, puisque a_0 est le moins prioritaire de tous les éléments, à $\mu(a_0) = 0$ (et dès lors aussi à $\mu(a) > 0$ pour tout $a \in A$) ;
- 2° ce que l'on appelle la priorité d'un élément n'est en fait rien d'autre que la différence de priorité entre cet élément et un élément de priorité nulle que l'on suppose (parfois un peu hâtivement lorsque cet élément n'est pas explicité) bien connu de la personne interrogée ;
- 3° la *condition I* que MACBETH va essayer de satisfaire, à savoir :

$\forall a, b, c, d \in A^* = A \cup \{a_0\}$ avec a plus prioritaire que b et c plus prioritaire que d, le rapport $[\mu(a) - \mu(b)] / [\mu(c) - \mu(d)]$ reflète le rapport (que Z ressent de façon plus ou moins précise) des différences de priorité entre a et b d'une part et c et d d'autre part,

contient comme cas particulier la condition suivante :

$\forall a, b \in A$, le rapport $[\mu(a) - \mu(a_0)] / [\mu(b) - \mu(a_0)]$ reflète le rapport (que Z ressent de façon plus ou moins précise) des différences de priorité entre a et a_0 d'une part et b et a_0 d'autre part,

ce qui n'est rien d'autre, compte tenu des points 1° et 2° ci-dessus, qu'une reformulation de la *condition II*.

La méthode MACBETH est donc applicable aussi bien dans le cas d'un concept bipolaire que dans celui d'un concept monopolaire avec l'avantage, dans ce dernier cas, d'attirer l'attention sur ce qui fait la particularité de ce concept à savoir l'existence d'un "zéro" comme limite naturelle.

Bibliographie

- Blumenthal, A.L.** (1977), *The Process of Cognition*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.
- Bouyssou, D.** (1986), "Some Remarks on the Notion of Compensation in MCDM", *European Journal of Operational Research*, 26, 1, 150–160.
- Cozzens, M.B., Roberts, F.S.** (1982), "Double Semiorders and Double Indifference Graphs", *SIAM Journal of Algebraic Discrete Methods*, 3, 4, 566–583.
- Doignon, J.-P.** (1987), "Threshold Representations of Multiple Semiorders", *SIAM Journal of Algebraic Discrete Methods*, 8, 1, 77–84.
- Dyer, J.S., Sarin, R.K.** (1979), "Measurable Multiattribute Value Functions", *Operations Research*, 27, 4, 810–822.
- Fishburn, P.C.** (1992), "Additive Differences and Simple Preference Comparisons", *Journal of Mathematical Psychology*, 36, 21–31.
- Miller, G.A.** (1956), "The Magic Number Seven Plus or Minus Two: Some Limits on the Capacity for Processing Information", *Psychological Review*, 63, 2, 81–97.
- Rescher, N.** (1969), *Introduction to Value Theory*, Prentice-Hall, Englewood Cliff, New Jersey.
- Roberts, F.S.** (1979), *Measurement Theory with Applications to Decision-making, Utility and the Social Sciences*, Addison-Wesley, London.
- Roy, B., Vincke, P.** (1987), "Pseudo-orders: Definition, Properties and Numerical Representation", *Mathematical Social Sciences*, 14, 2, 263–274.
- Russo, J.E., Schoemaker, P.J.H.** (1989), *Decision Traps*, Doubleday, New York.
- Saaty, T.L.** (1977), "A Scaling Method for Priorities in Hierarchical Structures", *Journal of Mathematical Psychology*, 15, 234–281.
- Tversky, A.** (1969), "Intransitivity of Preferences", *Psychological Review*, 76, 31–48.
- von Winterfeldt, D., Edwards, W.** (1986), *Decision Analysis and Behavioral Research*, Cambridge University Press, Cambridge.