

CAHIER DU LAMSADE

Laboratoire d'Analyse et Modélisation de Systèmes pour l'Aide à la Décision
(Université Paris-Dauphine)

Unité de Recherche Associée au CNRS n° 825

SUR LE PROBLÈME DES CHEMINS BI-CRITÈRES : UNE APPROCHE INTERACTIVE A *POSTERIORI* ¹

CAHIER N° 149
novembre 1997

José FIGUEIRA ²
M. Eugénia CAPTIVO ³
Joao CLIMACO ⁴

reçu : juillet 1997.

¹ Le travail informatique a été effectué au LAMSADE, Université Paris-Dauphine, et au CIO-DEIO, Faculté de Sciences, Université de Lisbonne.

² LAMSADE, Université Paris-Dauphine, Place du Maréchal De Lattre de Tassigny, 75775 Paris Cedex 16, France (e-mail: figueira@lamsade.dauphine.fr) ; Faculté d'Economie, Université de Coimbra, Av. Dias da Silva 165, 3000 Coimbra, Portugal.

³ Faculté de Sciences, Université de Lisbonne, Département de Statistique et de Recherche Opérationnelle, Campo Grande, Bloco C2, 1700 Lisbonne, Portugal (e-mail: maria.captivo@fc.ul.pt).

⁴ Faculté d'Economie, Université de Coimbra, Av. Dias da Silva 165, 3000 Coimbra, Portugal ; INESC-Coimbra, Rua Antero de Quental 199, 3000 Coimbra, Portugal (e-mail: jclimaco@inescca.inescc.pt).

Table de Matières

Abstract	i
Résumé	ii
Introduction	1
1 Problème des Chemins Multicritères	4
2 Procédures Interactives et Etudes <i>a posteriori</i>	8
2.1 Recherche du "Meilleur Point" non Dominé	8
2.2 Etudes <i>a posteriori</i>	8
2.3 Un exemple illustratif	9
2.4 Un algorithme des <i>K-Plus Courts Chemins</i>	11
3 Expérimentations Numériques et Résultats	15
Conclusion	17
Remerciements	17
Références	18
Annexe A	21
Annexe B	22
Annexe C	23
Annexe D	26

ON THE BI-CRITERIA SHORTEST PATH PROBLEM: AN INTERACTIVE *a posteriori* APPROACH

Abstract

The purpose of this paper is to present new developments for the bi-criteria shortest path problem. The objective is to help the decision maker (DM) in the choice of the "most satisfactory" solution taking into account that the model may not express hidden aspects of the problem. In the first stage a non-dominated path regarding the above referred to model is selected. Any interactive bi-criteria shortest path procedure can be used. As this is not the target of this paper, a simple weighted sum procedure was implemented to select the path used as a seed point of the *a posteriori* analysis proposed here. This consists of searching all the feasible solutions in a considered (by the DM) indifferent neighborhood of the seed point (concerning the two criteria of the model) and a new dialogue with DM regarding decision variable space aspects for the solutions, trying to overcome the eventual non completeness of the model. A very performant algorithm was used to compute all the indifferent paths.

Key words: *bi-criteria shortest path problem, interactive approach, combinatorial analysis.*

SUR LE PROBLÈME DES CHEMINS BI-CRITÈRES : UNE APPROCHE INTERACTIVE *a posteriori*

Résumé

Dans cet article, nous proposons de nouveaux développements concernant les procédures interactives pour les problèmes des chemins bi-critères. Notre approche est fondée sur la non-existence d'un modèle défini de façon exacte et définitive. Elle permet donc de prendre en compte les aspects de l'incertitude, de l'indétermination, de l'imprécision des données et de non exhaustivité de toutes les contraintes et critères du problème réel. L'approche proposée comporte deux phases distinctes d'interaction avec l'utilisateur. Dans la première phase, on s'occupe de la recherche du point non dominé le "plus satisfaisant" (on peut utiliser une procédure interactive de chemins bi-critères déjà existante ; cela n'est pas l'objectif principal de ce papier et nous avons utilisé une somme pondérée pour obtenir un point de "référence"). Ensuite, dans la seconde phase, on recherche les solutions au voisinage du point satisfaisant et on propose à l'utilisateur un nouveau dialogue sur les sommets et/ou arcs-clés du réseau. Dans cette dernière phase, nous avons utilisé un algorithme très efficace qui permet la recherche exhaustive de toutes les solutions au voisinage du point "satisfaisant" ou de "référence".

Mots-Clés : problème des chemins bi-critères, approche interactive, analyse combinatoire.

Introduction

Bien souvent, l'étude des situations décisionnelles réelles repose sur l'adoption (de la part des *intervenants* impliqués dans le *processus de décision*) d'un modèle *monocritère*. Notons que ce choix ne signifie pas toujours une totale adhésion à la façon dont le problème est modélisé. En général, les problèmes réels comportent un aspect multidimensionnel (conséquences multiples et complexes) non nécessairement réductible à un critère unique.

Mais même dans des situations décisionnelles où l'on utilise de manière explicite plusieurs critères dans la modélisation d'un problème, il n'est pas évident que le modèle construit soit toujours bien adapté aux objectifs et au système de valeurs du décideur. C'est notamment le cas lorsque les critères ayant un pouvoir discriminant total¹ sont utilisés pour modéliser des situations en présence d'incertitude, d'imprécision et/ou d'indétermination des données. Mais les choses se compliquent lorsqu'il s'agit de trouver une solution (tracé autoroutier, localisation d'usines, programme de production agricole, ...) mettant en jeu des sommes d'argent importantes, la santé des usagers ou la vie d'une espèce rare. On comprend que, le plus souvent, la "modélisation est conditionnée" et que le modèle ne comporte pas toutes les dimensions fondamentales (critères) et/ou contraintes du problème réel car on a souvent des limitations techniques, organisationnelles, sociales, etc.

Une bonne perception et compréhension des valeurs et objectifs d'un décideur est une tâche souvent très difficile. Des études empiriques ont montré que certaines "solutions rationnelles" (obtenues à partir de modèles construits au préalable) ne pouvaient pas être appliquées. On peut se reporter par exemple au livre de Crozier et Tilliete [1995] à propos des stages effectués par des jeunes ingénieurs sur des problèmes réels en entreprise :

L'élève intelligent et bien formé n'avait pas trop de peine à élaborer une solution élégante qui impressionnait d'autant plus les managers qu'elle était "rationnelle" et rentable et démontrait la supériorité de la méthodologie nouvelle.

¹Dans un critère à *pouvoir discriminant total* (ou *vrai-critère*), la plus petite différence entre les valeurs attribuées à deux actions différentes, aussi petite soit elle, est prise comme significative d'une préférence stricte de l'une par rapport à l'autre (cf. Roy [1985], Roy et Bouyssou [1993]).

Mais ...

Le charme fut rompu quand les enseignants voulurent savoir à quoi avaient réellement servi les résultats de ces travaux que tout le monde, eux-mêmes au premier chef, avaient trouvé remarquables. Ils se doutaient bien que l'application de solutions rationnelles n'est pas toujours facile. Mais ils furent atterrés : aucune n'avait été appliquée.

Ceci étant, les jeunes ingénieurs,

Dans leurs stages, ils s'attachèrent à définir une solution sûrement moins "rationnelle" mais qui fût compatible avec le système de fonctionnement réel de l'entreprise.

En effet, les modèles sont en général non exhaustifs. Ils ne tiennent pas compte de tous les aspects de la réalité : certains critères sont difficiles à diagnostiquer, d'autres ne peuvent pas être pris en compte de façon explicite car ils peuvent déclencher des conflits d'intérêts, ... Ainsi, dans l'analyse des situations décisionnelles, on ne peut pas regarder seulement les aspects les plus évidents. Un effort doit donc être fait pour mieux comprendre les objectifs et valeurs du décideur qui n'apparaissent pas de façon explicite et qui sont déterminants pour la mise en place d'une solution. Très récemment, Winter [1995] a pu montrer qu'une grande partie des modèles représentaient mal la réalité et que leurs résultats étaient incohérents. Ces questions ont été au cœur de ses travaux de recherche sur les problèmes d'affectation du trafic multi-classes. Ses efforts ont été consacrés à l'analyse et à l'application des résultats des modèles du trafic.

En pratique, il est très courant de formaliser les problèmes réels à l'aide de la théorie des graphes et/ou de la programmation linéaire avec un ou plusieurs critères. Dans ce dernier cas, il s'agit donc de problèmes ayant une *structure combinatoire* et *multicritère*. Le problème du plus court chemin dans un graphe est très fréquent dans la pratique. On le retrouve le plus souvent lorsqu'on cherche à acheminer un objet d'une source vers un puits de façon à minimiser le coût total. Sa variante multicritère est moins habituelle mais elle est plus adaptée dans la plupart des situations réelles. Dans beaucoup de cas, l'analyse d'une situation réelle requiert la présence d'un modèle avec plusieurs critères. Cet article porte donc sur l'extension

multicritère du *problème du plus court chemin* dans un graphe. Nous nous intéressons plus précisément au problème de la recherche d'une solution (choix) parmi un ensemble de solutions possibles à l'aide d'un protocole du type *question-réponse* entre un *utilisateur* et un *système*. Notre travail se situe donc dans le cadre de l'approche interactive. Cette approche est relativement récente mais son champ d'investigation est vaste. Mentionnons par exemple les procédures sans restriction du domaine d'application de *Benayoun et al.* [1976], *Roy* [1976], *Wierzbicki* [1980], [1982], *Steuer et Choo* [1983], *Jacquet-Lagrèze et al.* [1987], *Vanderpooten* [1990]. Certains auteurs ont restreint leur champ d'application aux problèmes de flot multicritères (*Ringuest et Rings* [1987], *Clímaco et al.* [1993], *Figueira et al.* [1996a,b]). Enfin, d'autres ont développé des procédures particulières pour le problème des chemins multicritères ; mentionnons par exemple *Clímaco et Coutinho-Rodrigues* [1988], *Coutinho-Rodrigues et al.* [1992], [1994], *Current et al.* [1990], *Gabrel et Vanderpooten* [1996].

Malgré les limitations d'un modèle (qui se veut la représentation aussi fidèle que possible d'une réalité alors qu'il est souvent une image schématique et très partielle de cette réalité), la plupart des procédures interactives sont fondées sur l'existence d'un modèle plus ou moins exhaustif et cohérent avec les situations réelles. Ce n'est que très récemment que l'aspect concernant les limitations de ces modèles a été mis au cœur de la recherche dans le domaine des procédures interactives. Mentionnons par exemple les travaux de *Figueira* [1996] et de *Figueira et al.* [1996a,b]. Dans ce document, notre objectif est de proposer un complément à ces travaux en ce qui concerne notamment l'analyse *a posteriori*. Nous avons utilisé un algorithme qui permet la recherche exhaustive de tous les chemins dans une zone d'indifférence (définie à l'aide de seuils) autour du point de "référence" et nous avons étudié chaque chemin au niveau de l'espace des variables de décision.

Cet article est structuré autour de trois sections de la façon suivante : dans la *Section 1*, nous présentons les définitions fondamentales ; dans la *Section 2*, nous présentons en détail notre amélioration par rapport aux procédures interactives concernant l'analyse *a posteriori* ; dans la *Section 3*, nous analysons les résultats obtenus.

1 Problème des Chemins Multicritères

Dans cette section, nous nous intéressons à la terminologie (définitions et concepts) du problème de chemins multicritères.

Considérons un graphe orienté, connexe et sans cycle $\mathcal{G} = (\mathcal{S}, \mathcal{A})$ où $\mathcal{S}$ est un ensemble de sommets de cardinalité $|\mathcal{S}| = n$ et $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{S} \times \mathcal{S}$ un ensemble d'arcs de cardinalité $|\mathcal{A}| = m$. On note (i, j) l'arc reliant les deux sommets i et j et $c(i, j)$ le coût associé à l'arc (i, j) . Le problème du plus court chemin dans un graphe consiste le plus souvent à acheminer un objet d'une source s vers un puits t de façon à minimiser le coût total. Ce problème peut être représenté sous forme d'un programme linéaire en variables bivalentes $\{0, 1\}$. Pour ce faire, il suffit de poser, pour le sommet s , une valeur $b(s) = 1$, et pour le sommet t , une valeur $b(t) = -1$. On pose également, pour tout autre sommet $i \in \mathcal{S} - \{s, t\}$, $b(i) = 0$. En outre, dans un tel problème, la variable $x(i, j)$ pour tout arc (i, j) de $\mathcal{G}$ ne pourra prendre que deux alternatives :

- $x(i, j) = 1$ si l'arc (i, j) fait partie d'une solution ou
- $x(i, j) = 0$ sinon.

Considérons maintenant la variante multicritère du problème ci-dessus. Associons à chaque arc (i, j) le vecteur des coûts à p composantes (p étant le nombre de critères) :

$$(c_1(i, j), \dots, c_p(i, j)).$$

On peut aussi représenter le problème sous forme d'un programme linéaire multicritère en variables bivalentes de la façon suivante :

$$\min f_1(x) = \sum_{\substack{(i,j) \in \mathcal{A} \\ i \neq j}} c_1(i,j)x(i,j)$$

$\vdots$

$$\min f_p(x) = \sum_{\substack{(i,j) \in \mathcal{A} \\ i \neq j}} c_p(i,j)x(i,j)$$

$$s.c. \quad \sum_{\substack{\{j \mid (i,j) \in \mathcal{A}\} \\ i \neq j}} x(i,j) - \sum_{\substack{\{j \mid (j,i) \in \mathcal{A}\} \\ i \neq j}} x(j,i) = \begin{cases} 1 & \text{pour } i = s \\ 0 & \text{pour } i \in \mathcal{S} - \{s, t\} \\ -1 & \text{pour } i = t \end{cases}$$

$$x(i,j) \in \{0,1\}, \quad \forall (i,j) \in \mathcal{A}$$

Si on relâche la condition d'intégrité des variables, on peut écrire le problème de façon plus compacte

$$\min_{x \in X} F(x)$$

où :

- $x \in \mathbb{R}^m$, $(x_1, \dots, x_m)^T$, est le vecteur des variables de décision ;
- $X \subseteq \mathbb{R}^m$ est l'ensemble des solutions réalisables ;
- $F(x) = (f_1(x), \dots, f_p(x))^T$ est le vecteur des critères à "minimiser" ;
- $Y = F(X)$ est le sous-ensemble des points réalisables dans l'ensemble $\mathbb{R}^p$, $F : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^p$;
- $y = (y_1, \dots, y_p)^T$ avec $y_q = f_q(x)$ pour $q = 1, \dots, p$.

Dans le cadre d'une analyse multicritère, on suppose le plus souvent que l'utilisateur (ou le décideur) raisonne plutôt en termes d'évaluation d'une solution sur chaque critère et se place naturellement dans l'espace des critères inclus dans $\mathbb{R}^p$. C'est cette hypothèse que nous retiendrons pour le moment.

Les termes *solution réalisable* pour x et *point réalisable* pour y seront utilisés respectivement pour toute solution $x \in X \subset \mathbb{R}^m$ et pour tout point $y \in Y \subset \mathbb{R}^p$.

Dans un problème multicritère, on peut distinguer, parmi ces points et ces solutions, ceux et celles qui ont certaines particularités. Si on se place naturellement dans $\mathbb{R}^p$, il est évident que (en général) tous les points réalisables de Y ne peuvent pas servir pour définir une recommandation potentielle du problème multicritère. On impose donc une relation d'ordre partiel sur cet ensemble de points, appelée *relation de dominance*.

Definition 1.1 [Dominance]

Soit $y' = (y'_1, \dots, y'_p)^T$ et $y = (y_1, \dots, y_p)^T$ deux vecteurs de performances dans Y . Le vecteur y' domine y ssi $y' \leq y$ et $y' \neq y$ (c'est-à-dire $y'_q \leq y_q$ pour tout q avec une inégalité stricte au moins).

Le concept-clé de dominance implique la notion de *point non dominé*. Seuls les points non dominés sont intéressants du point de vue de l'analyse multicritère (classique). Un point $y' \in Y$ est dit non dominé si et seulement si il n'existe aucun point $y \in Y$ tel que $y \leq y'$ et $y \neq y'$.

La définition de *solution efficace* découle directement de la notion de point non dominé. Elle signifie qu'il est impossible de trouver une nouvelle solution qui améliore les performances de la première sur un critère sans que cela entraîne une dégradation des performances sur au moins un autre critère. On la définit formellement de la manière suivante :

Definition 1.2 [Solution efficace] Une solution $x \in X$ est dite efficace ssi le vecteur de performances $y = F(x)$ qui lui correspond est non dominé.

L'analyse *a posteriori* est effectuée à partir d'un point non dominé déterminé à l'aide d'une procédure interactive.

Dans le cadre d'un problème de chemins multicritères, l'enveloppe convexe de Y , notée $\text{Conv}(Y)$, coïncide avec l'ensemble des points réalisables dans le cas de la programmation linéaire continue ; cela est dû à la propriété d'unimodularité totale de la *matrice d'incidence sommets-arcs* du graphe $\mathcal{G}$. Rappelons qu'une matrice A est dite totalement unimodulaire si toute matrice carrée extraite de A a son déterminant égal à 0, 1 ou -1.

Pour un problème discret, on peut distinguer (cf. FIG. 1) :

- Les *points non dominés supportés*, c'est-à-dire ceux qui sont solution du programme paramétrique suivant :

$$\min_{y \in Y} \sum_{q=1}^p \lambda_q y_q \quad \text{pour} \quad \sum_{q=1}^p \lambda_q = 1, \quad \lambda_q > 0 \quad \text{pour} \quad q = 1, \dots, p.$$

- Les *points non dominés non supportés*. Il s'agit donc d'un point de Y à l'intérieur de $\text{Conv}(Y)$.

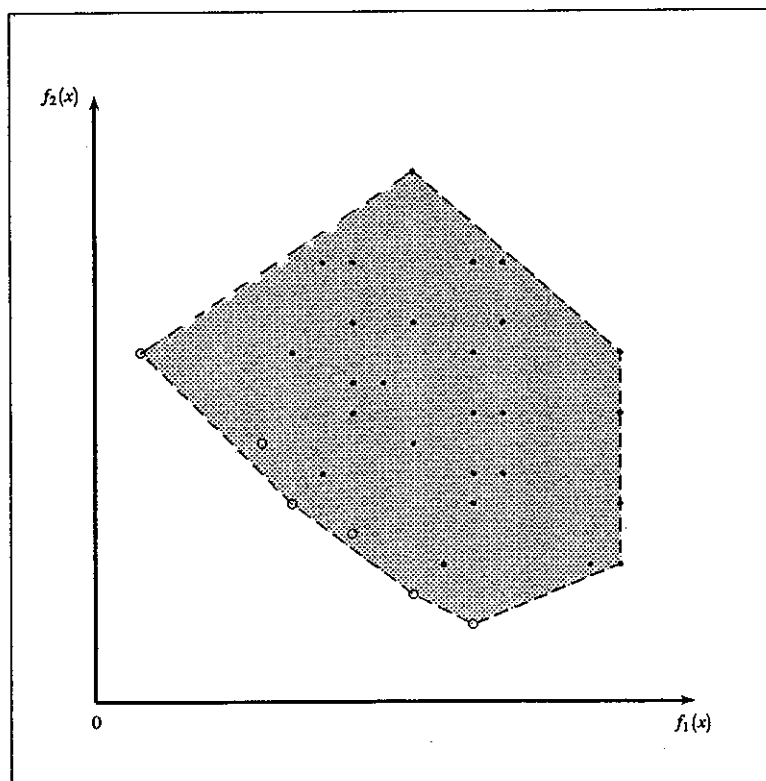


Figure 1: *Identification des points non dominés*

2 Procédures Interactives et Etudes *a posteriori*

Sur le plan conceptuel, la procédure interactive proposée est fondée sur la mise en œuvre de deux étapes distinctes :

- Dans une première étape, on suppose que le problème est bien modélisé (le modèle est une représentation fidèle de la réalité) et on "pousse" l'utilisateur à chercher le "meilleur point" non dominé.
- Dans une seconde étape, on essaye de remettre en cause le modèle avec une analyse *a posteriori*.

Ces deux étapes seront décrites dans les deux sous-sections suivantes.

2.1 Recherche du "Meilleur Point" non Dominé

Dans cette première phase, nous proposons la recherche d'un point non dominé. En fait, l'objectif est de "pousser" l'utilisateur vers la recherche d'un point satisfaisant² dans l'espace des critères. Pour ce faire, on peut utiliser une procédure interactive de chemins bicritères déjà existante. Remarquons que ceci n'est pas l'objectif principal de ce document. Nous utilisons ici une somme pondérée qui nous permet d'obtenir un point non dominé supporté à partir duquel une analyse *a posteriori* sera effectuée.

2.2 Etudes *a posteriori*

Dans notre approche, une étude *a posteriori* consiste à obtenir plusieurs chemins autour de la "solution satisfaisante", ce qui permettra de tester la cohérence ("robustesse") de cette dernière. L'objectif de cette analyse est de proposer à l'utilisateur d'un système interactif un autre type de dialogue (dans l'espace des variables de décision) pour lui permettre notamment de bien connaître les *arcs et les sommets sensibles* du graphe (ceux dont la présence ou l'absence dans une recommandation finale l'intéresse ou est susceptible de l'intéresser).

Afin de calculer les chemins au voisinage du point satisfaisant, nous avons construit une zone d'indifférence à l'aide de seuils, ce qui permet de prendre

²Le "meilleur" point au sens de la recherche interactive effectuée.

en compte l'indétermination, l'incertitude et l'imprécision des données. Le calcul des "chemins indifférents" a été réalisé à l'aide d'un algorithme très performant que nous allons mentionner dans la sous-section 2.4. Un nombre important de chemins indifférents peut se révéler d'une utilité cruciale lors du test de fiabilité des arcs et sommets sensibles du graphe. Or, l'algorithme que nous utilisons ici calcule tous les chemins dans une zone d'indifférence, ce qui représente une nouveauté par rapport aux travaux précédents où nous avons utilisé une approche dont le comportement était difficile à prévoir.

2.3 Un exemple illustratif

L'exemple qui suit permet d'illustrer l'approche développée jusqu'à présent.

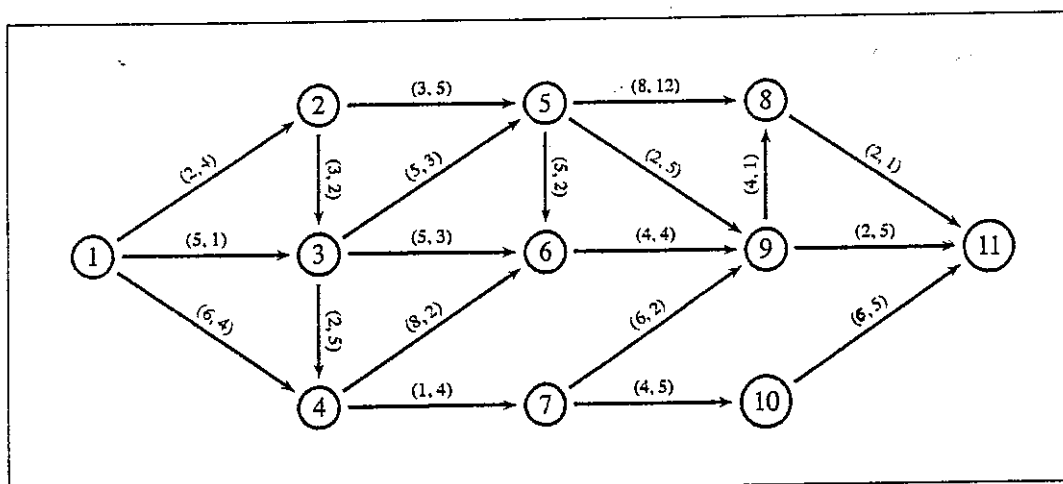


Figure 2: *Exemple illustratif*

Ce graphe contient 34 chemins dont l'image dans l'espace des critères est représentée sur la figure 3. Dans l'Annexe A, on peut consulter un tableau avec tous les chemins du réseau. Remarquons que la figure 3 contient seulement 32 points, ce qui montre bien une situation de dégénérescence où un seul point dans l'espace des critères correspond à plusieurs chemins qui peuvent être très différents. Voyons, par exemple, le point (20, 15) de la

figure 3 et les chemins associés qui sont présentés dans l'Annexe B ; il n'y a qu'un seul arc en commun.

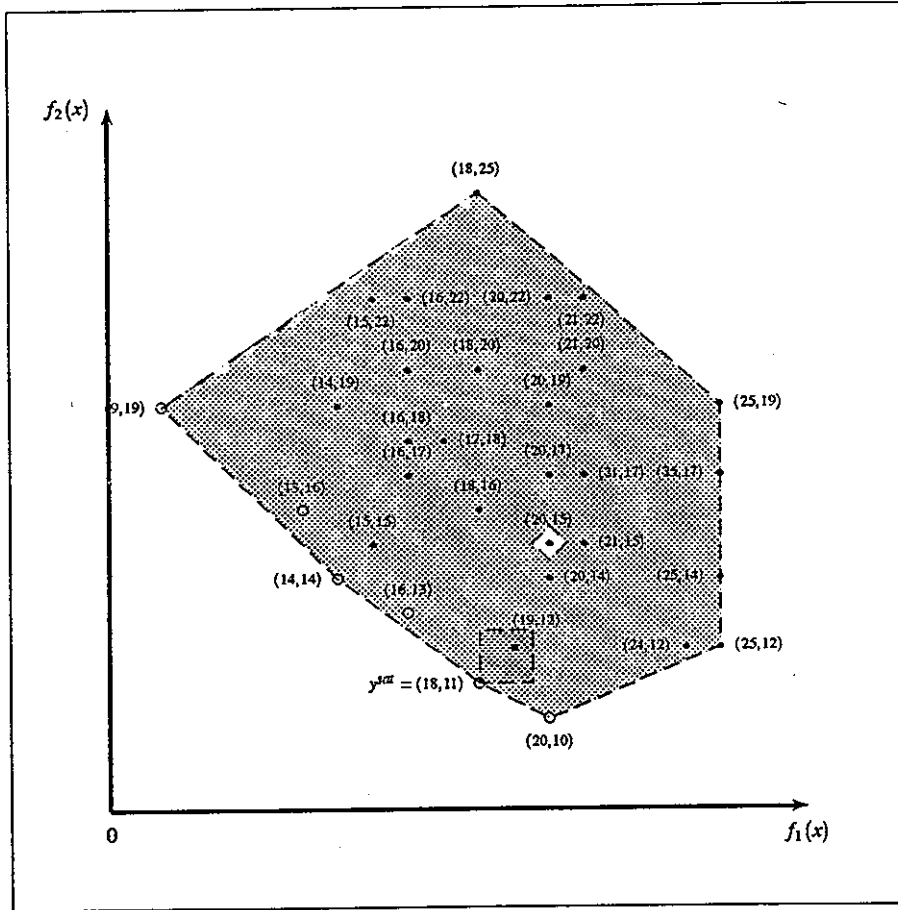


Figure 3: Zone d'indifférence

On considère dans la figure 3 une zone d'indifférence³. Dans cette zone, se trouvent seulement deux points, le point satisfaisant (y^{sat}) et son voisin. La figure 4 présente les chemins dans l'espace des variables et montre la différence existant entre les deux.

³Cette zone a été construite uniquement avec des seuils positifs. Dans les expérimentations numériques, nous avons construit des zones avec deux seuils constants : positifs et négatifs.

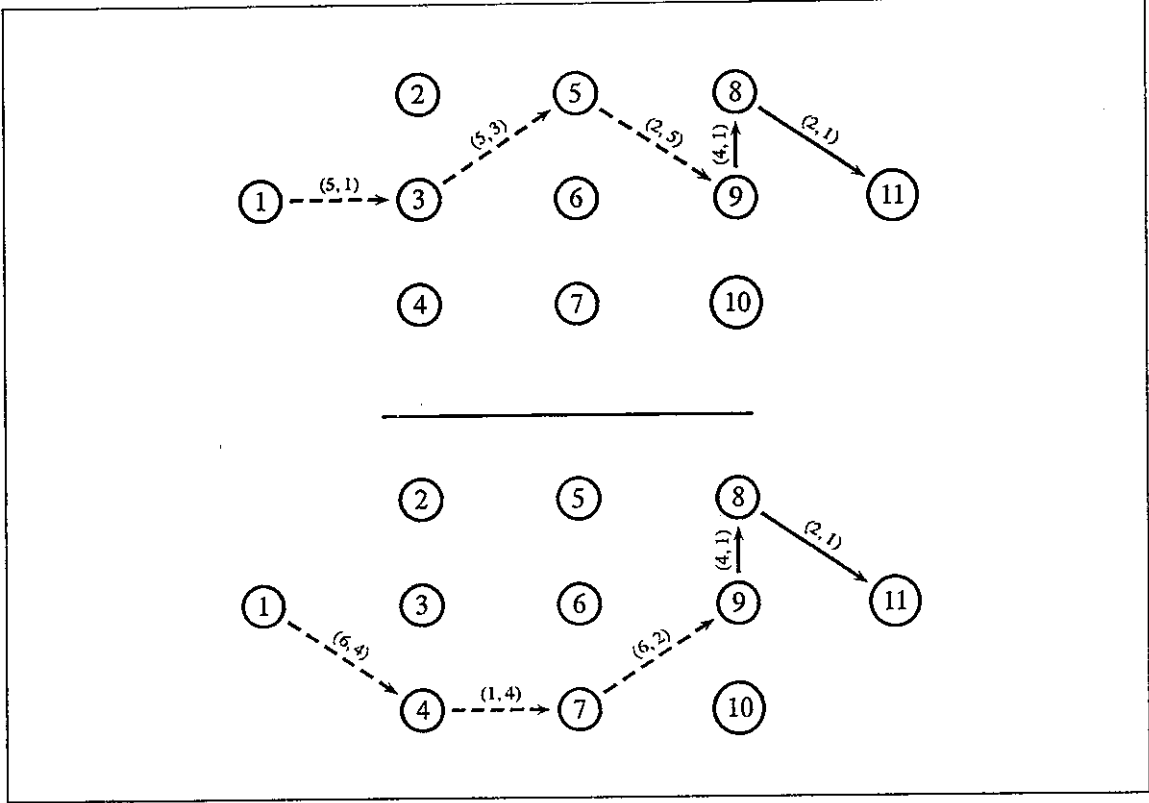


Figure 4: *Solutions dans la zone d'indifférence*

2.4 Un algorithme des *K-Plus Courts Chemins*

Dans cette sous-section, nous décrivons de manière succincte l'algorithme dont nous nous sommes servis pour calculer les chemins dans une zone d'indifférence. Il s'agit d'un algorithme de recherche des *K-plus courts chemins* dans un graphe. Pour plus de détails sur cette méthode, on pourra se reporter à Azevedo et al. [1990], [1993], [1994], Martins et Santos [1996].

L'idée fondamentale de l'approche consiste à :

1. Trouver le plus court chemin v^* de s à t dans $\mathcal{G}$. Pour ce faire, on peut utiliser un algorithme de marquage (cf. Dial et al. [1979]). Par conséquent, avec cet algorithme, le plus court chemin de s vers tout autre sommet i de $\mathcal{G}$ sera déterminé. Une marque du type $[\pi(i), p(i)]$ sera associée à chaque sommet i du réseau. La valeur $\pi(i)$ désigne le plus court chemin de s vers i et $p(i)$ est le précédent de i dans le chemin de s vers i . On initialise l'algorithme en posant $\pi(i) = \infty$ pour tout i . Le traitement itératif de l'algorithme consiste à mettre à jour les $\pi(i)$ de façon à pouvoir identifier les plus courts chemins de s vers tout autre sommet i de $\mathcal{G}$. Si, à la fin de chaque étape de traitement itératif, $\pi(t) < \infty$, alors l'algorithme a trouvé le plus court chemin v^* de s vers t . Si cette condition n'est pas vérifiée, alors il n'existe aucun chemin de s vers t .
2. Ôter v^* de $\mathcal{G}$ sans que cela entraîne l'exclusion de tout autre chemin v de $\mathcal{G}$. Pour ôter v^* de $\mathcal{G}$, il faut créer un nouveau réseau $\hat{\mathcal{G}}$ comportant des sommets et des arcs supplémentaires. Remarquons au passage que certains arcs du réseau précédent peuvent ne pas figurer dans le nouveau réseau mais, en général, le nombre d'arcs augmente beaucoup à chaque itération de l'algorithme. Ainsi, une séquence $\{\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2, \dots, \mathcal{G}_K\}$ de réseaux sera définie ; $\mathcal{G}_1$ est le réseau initial et le k -plus court chemin associé à ce réseau sera déterminé à partir du plus court chemin v^* dans $\mathcal{G}_k$ en utilisant les marques sur chaque sommet.

La figure ci-dessous présente l'algorithme des K – plus courts chemins dont on vient de décrire les caractéristiques fondamentales. Il s'agit d'une version simplifiée de l'algorithme présenté dans Azevedo et al. [1990], [1993], [1994], Martins et Santos [1996].

Algorithme des K-Plus Courts Chemins dans un graphe
{ Déterminer les K plus courts chemins }
1) **début**
2) déterminer le plus court chemin $v^* = v_1$ dans $\mathcal{G}_1$;
3) poser $k = 1$;
4) **tant que** $(k < K)$ **et** $(\pi(t) < \infty)$ **faire**
5) début
6) ôter v de $\mathcal{G}_k$ en créant un nouveau réseau $\mathcal{G}_{k+1}$;
7) poser $k = k + 1$;
8) déterminer le plus court chemin v^* dans $\mathcal{G}_k$;
9) **si** $(v^*$ existe dans $\mathcal{G}_k)$ **alors**
10) v_k est le chemin associé à v^* dans $\mathcal{G}_k$;
11) **fin**
12) **fin**

Figure 5: *Algorithme de Martins et al.*

Nous avons modifié légèrement cet algorithme⁴ de façon à pouvoir résoudre notre problème, c'est-à-dire la recherche de tous les chemins dans une zone d'indifférence. Ces modifications consistent à introduire dans l'algorithme (code) précédent les éléments suivants :

- Une structure de données supplémentaire qui permet le traitement des données relatives au second critère.
- Une procédure de nombres aléatoires qui génère les valeurs des coûts concernant le second critère, c'est-à-dire $c_2(i, j)$ pour tout $(i, j) \in \mathcal{A}$.
- Une nouvelle condition d'arrêt (cf. ligne 4 de la figure 5 avec ligne 4 de la figure 6) fondée sur une borne supérieure f^{sup} à la valeur d'une fonction objectif $f(x)$ qui agrège les deux fonctions $f_1(x)$ et $f_2(x)$.
- Une routine qui vérifie les bornes des zones d'indifférence (cf. lignes 11, 12 et 13 de la figure 6).

Nous allons montrer maintenant comment l'algorithme détermine la borne f^{sup} de la fonction $f(x)$.

⁴Il s'agit du code MS.c que l'on peut trouver dans le "home page" de Martins à l'URL suivante : <http://www.mat.uc.pt/>.

Soit $y = (y_1^{sat}, y_2^{sat})$ le point satisfaisant ou "point de référence" et v_i^- et v_i^+ , pour $i = 1, 2$ les seuils d'indifférence associés aux deux critères en question. Chaque zone d'indifférence est définie à partir des intervalles :

$$[y_1^{sat} - v_1^-, y_1^{sat} + v_1^+]$$

et

$$[y_2^{sat} - v_2^-, y_2^{sat} + v_2^+].$$

Une zone d'indifférence est donc l'enveloppe convexe formée par les quatre points : $(y_1^{sat} - v_1^-, y_2^{sat} + v_2^+)$, $(y_1^{sat} - v_1^-, y_2^{sat} - v_2^-)$, $(y_1^{sat} + v_1^+, y_2^{sat} - v_2^-)$ et $(y_1^{sat} + v_1^+, y_2^{sat} + v_2^+)$ où ce dernier point représente le coin nord-est de la zone.

La fonction objectif utilisée a été une somme pondérée⁵ qui nous a permis d'obtenir le "point de référence", y^{sat} . Cette fonction à la forme suivante :

$$f(x) = \theta f_1(x) + (1 - \theta) f_2(x), \quad \text{pour } \theta \in [0, 1].$$

Par conséquent, au point y^{sat} (qui est donc un point supporté) sera associée une valeur donnée de $f(x)$. Cela correspond à la valeur du plus court chemin de s à t par rapport à la fonction $f(x)$. Notre objectif consiste à calculer tous les chemins qui ont une valeur comprise entre la valeur de ce plus court chemin et la valeur associée au coin nord-est de la zone d'indifférence, c'est-à-dire :

$$f^{sup} = \theta(y_1^{sat} + v_1^+) + (1 - \theta)(y_2^{sat} + v_2^+).$$

Etant donné que la valeur de certains chemins peut ne pas être comprise dans les bornes des intervalles qui permettent de définir une zone d'indifférence, alors nous avons implémenté une routine qui sélectionne uniquement les chemins qui appartiennent à chaque zone (cf. lignes 11, 12 et 13 de la figure 6).

⁵Dans l'algorithme modifié on peu utiliser n'importe quelle fonction d'agrégation. Pour des raisons opérationnelles, nous nous sommes servis d'une somme pondérée en affectant un pourcentage de 50 à chaque critère.

Algorithme des K-Plus Courts Chemins modifié
{ Déterminer tous les chemins dans une zone d'indifférence }
1) **début**
2) déterminer le plus court chemin $v^* = v_1$ dans $\mathcal{G}_1$;
3) poser $k = 1$;
4) **tant que** $(f(x) \leq f^{sup})$ **et** $(\pi(t) < \infty)$ **faire**
5) début
6) ôter v de $\mathcal{G}_k$ en créant un nouveau réseau $\mathcal{G}_{k+1}$;
7) poser $k = k + 1$;
8) déterminer le plus court chemin v^* dans $\mathcal{G}_k$;
9) **si** (v^* existe dans $\mathcal{G}_k$) **alors**
10) v_k est le chemin associé à v^* dans $\mathcal{G}_k$;
11) **si** $(y_1^k \in [y_1^{sat} - v_1^-, y_1^{sat} + v_1^+])$ **et**
12) $(y_1^k \in [y_2^{sat} - v_2^-, y_2^{sat} + v_2^+])$ **alors**
13) v_k est un chemin dans la zone d'indifférence ;
14) **fin**
15) **fin**

Figure 6: *Algorithme de Martins et al. modifié*

3 Expérimentations Numériques et Résultats

Les essais numériques ont un objectif double. D'une part l'analyse de la performance de l'algorithme (cf. sous-section 2.4) dans la recherche de toutes les solutions dans une zone d'indifférence. D'autre part l'étude des chemins indifférents du point de vue de l'espace des sommets et des arcs. Dans ce dernier cas, notre objectif consiste à savoir s'il existe une différence significative entre les chemins trouvés dans la zone d'indifférence.

Les résultats présentés dans cette section portent sur des instances bi-critères du problème du plus court chemin dans un graphe. Nous avons utilisé trois types de problèmes : Type 1 - petite taille, Type 2 - taille moyenne et Type 3 - grande taille. Ces problèmes sont présentés dans les tableaux 1, 3 et 6 de l'Annexe C. Ces tableaux contiennent en outre les valeurs optimales pour chaque critère et la valeur du point satisfaisant obtenue avec une pondération de 50 % par critère.

Toutes les instances ont été générées à l'aide du générateur de réseaux

sans cycles de Martins⁶. Nous avons utilisé aussi la procédure `random.h` (version C) du générateur NETGEN (cf. *Klingman et al.* [1974]) pour obtenir les valeurs relatives au second critère. Les nombres 4301055 et 120 ont été utilisés pour générer respectivement les valeurs du premier et du second critère. Les coûts concernant le premier critère varient entre 0 et 500 et les coûts du second critère sont comprises entre 300 et 800. Les tests expérimentaux ont été réalisés au CIO/DEIO-Faculté de Sciences de Lisbonne sur une machine SunSPARC LX.

En ce qui concerne les instances du problème de chemins, l'étude porte sur la construction de zones d'indifférence avec des seuils identiques variant (pour la quasi-totalité des essais) de 0.1 % à 1 %. Comme nous le verrons plus loin, le nombre de solutions trouvées dans certaines zones d'indifférence est de l'ordre de plusieurs milliers. Les résultats sont présentés dans les annexes C et D. Dans l'Annexe C, les tableaux 2, 4, 5, 7 et 8 présentent le nombre de solutions trouvées dans chaque zone et le temps de calcul nécessaire pour effectuer cette recherche. Un astérisque (*), indique que la capacité de mémoire de la machine est insuffisante pour calculer la totalité des chemins. Enfin, dans l'Annexe D, on trouve une liste des chemins indifférents relativement au problème 2 du Type 1 et concernant les zones d'indifférence de 0.3 %, 0.4 % et 0.5 %.

En ce qui concerne les résultats, nous avons pu constater que :

- Malgré les limitations de la machine, l'algorithme est très efficace dans la recherche de chemins "indifférents".
- Le nombre de solutions trouvées dans les zones d'indifférence est très important même quand le calcul a été interrompu, par un éventuel manque de capacité de mémoire de la machine utilisée. Rappelons que ce problème de mémoire apparaît du fait que la taille des réseaux augmente beaucoup à chaque itération. Sur notre machine, on a pu travailler avec des problèmes ayant une taille maximale de 5 000 sommets et 40 000 arcs. L'algorithme utilisé effectue une dilatation du réseau initial jusqu'à un maximum de 1 600 000 sommets, ce qui représente la limite mémoire de la machine. Remarquons que, en conformité avec la littérature dans ce domaine, la taille des problèmes traités dans cette étude est très importante. La littérature montre également qu'il est

⁶Le code `gera - acic.f` est disponible dans le "home page" de Martins. Remarquons au passage que les tests pourraient porter aussi sur des réseaux avec des cycles.

possible de travailler avec des réseaux de plus grande taille en utilisant une machine plus puissante.

- Le temps de calcul varie directement avec la taille de chaque zone.
- Les chemins voisins, dans les zones d'indifférence de petite taille, ne sont pas très différents entre eux⁷ mais, dans certains cas, ils peuvent être suffisamment distincts vis-à-vis des préférences de l'utilisateur.

Conclusion

Dans ce document, nous avons présenté une approche interactive *a posteriori* dans le cadre du problème de chemins bi-critères. Cette approche est un complément aux travaux déjà existants mais elle représente un progrès par rapport à ceux-ci dans la mesure où elle permet de calculer tous les chemins dans une zone d'indifférence. Nous pouvons donc conclure que, pour les problèmes de chemins bi-critères, il est possible d'implanter des procédures très efficaces d'analyse *a posteriori*. Par conséquent, si on prétend développer un système interactif d'aide à la décision pour "résoudre" des problèmes réels, une démarche pertinente consiste à combiner un logiciel interactif avec des analyses *a posteriori*. Les analyses présentent à l'utilisateur, entre autres, le chemin de "référence" obtenu et les sous-chemins (ou tronçons) de celui-ci. Lorsque nous avons effectué une analyse aux chemins voisins (*cf.* Annexe D) dans les zones d'indifférence de petite taille, nous avons constaté un faible nombre de tronçons différents (6 au plus). Ainsi, le choix d'un certain type de chemin à implanter sera effectué en fonction des préférences de l'utilisateur par rapport à un ou plusieurs tronçons.

Remerciements. Nous remercions Dominique FRANÇOIS pour l'aide qu'elle a apportée à la rédaction de ce document et à un arbitre anonyme dont les remarques ont contribué à l'amélioration de la qualité de ce travail.

⁷Voir dans l'annexe D où les différences par rapport au chemin de référence sont en gras et soulignées.

Références

- [1] AZEVEDO J.A., MADEIRA J., MARTINS E., PIRES F. (1990) : "A shortest paths ranking algorithm", *Proceedings of the Annual Conference AIRO'90*, Models and Methods for Decision Support, Operational Research Society of Italy, p. 1001-1011.
- [2] AZEVEDO J.A., Costa M.E., MADEIRA J., MARTINS E. (1993) : "An algorithm for the ranking shortest path", *European Journal of Operational Research*, 69, 97-106.
- [3] AZEVEDO J.A., MADEIRA J., MARTINS E., PIRES F. (1994) : "A computational improvement for a shortest paths ranking algorithm", *European Journal of Operational Research*, 73, 188-191.
- [4] BENAYOUN R., de MONTGOLFIER J., TERGNY J., LARICHEV O. (1971) : "Linear programming with multiple objective functions: STEP method (STEM)", *Mathematical Programming*, 1, 366-375.
- [5] CLÍMACO J.C., MARTINS E.Q. (1982) : "A bicriterion shortest path algorithm", *European Journal of Operational Research*, 11, 399-404.
- [6] CLÍMACO J.C., ANTUNES C.H., ALVES M.J. (1993) : "Interactive decision support for multiobjective transportation problems", *European Journal of Operational Research*, 65, 58-67.
- [7] CLÍMACO J.C., COUTINHO-RODRIGUES J. (1988) : "Note on an interactive bicriteria shortest path algorithm", *Communication presented at Project Management and Scheduling Workshop*, Lisbon, 15 p.
- [8] COUTINHO-RODRIGUES J., CLÍMACO J.C., CURRENT J. (1992) : "A decision support system for bicriterion shortest path problem", *Working Paper 92-41*, Business Research, College Business, Columbus, Ohio, 20 p.
- [9] COUTINHO-RODRIGUES J., CLÍMACO J.C., CURRENT J. (1994) : "A PC-based interactive decision support system for two objective and direct delivery problems", *Journal of Business Logistics*, 15(1), 305-322.
- [10] CROZIER M., TILLIETTE B. (1995) : *La crise de l'intelligence : Essai sur l'impuissance des élites à se réformer*, InterEditions, Paris.

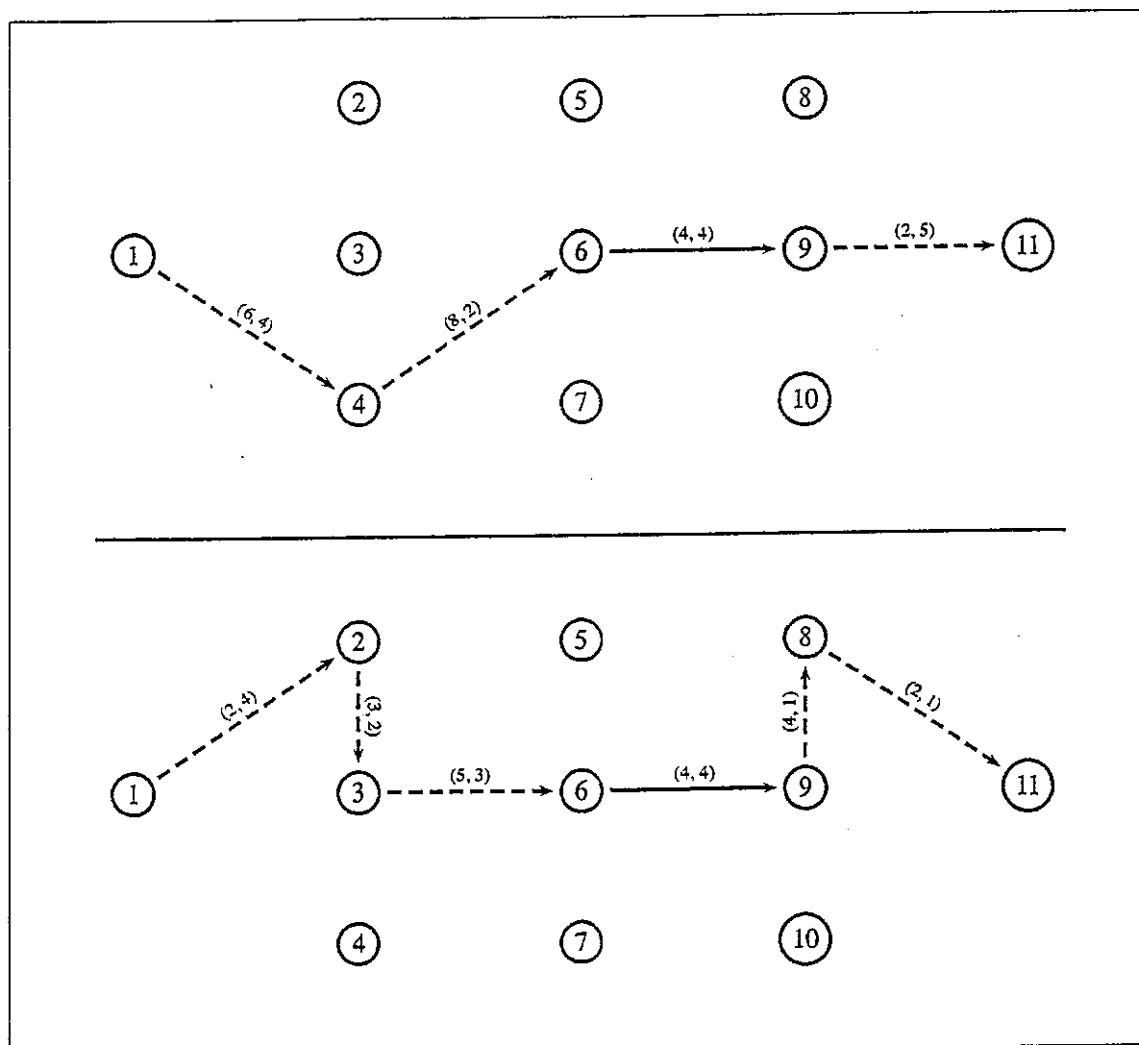
- [11] CURRENT J.R., MARSH M. (1993) : "Multiobjective transportation network design and routing problems: Taxonomy and annotations", *European Journal of Operational Research*, 65, 4-19.
- [12] CURRENT J.R., REVELLE C.S., COHON J.L. (1984) : "The shortest covering path problem: An application of locational constraints to network design", *Journal of Regional Science*, 24(2), 161-185.
- [13] CURRENT J.R., REVELLE C.S., COHON J.L. (1990) : "An interactive approach to identify the best compromise solution for two objective shortest path problems", *Computers & Operations Research*, 17, 187-198.
- [14] DIAL R., GLOVER F., KARNEY D., KLINGMAN D. (1979) : "A computational analysis of alternative algorithms and labeling techniques for finding shortest path trees", *Networks*, 9, 215-248.
- [15] FIGUEIRA J. (1996) : L'approche interactive dans le cadre des problèmes de flot multicritères, Thèse de Doctorat, Université Paris-Dauphine, France.
- [16] FIGUEIRA J., M'SILTI H., TOLLA P. (1996a) : "Application d'un algorithme de sous-gradient pour explorer le voisinage d'un point satisfaisant dans le cadre des problèmes de flots multicritères", *Document du LAMSADE N. 94*, Université Paris-Dauphine, Paris, 61 p.
- [17] FIGUEIRA J., M'SILTI H., TOLLA P. (1996b) : "Using mathematical programming heuristics in a multicriteria network flow context", submitted to *Journal of the Operational Research Society*.
- [18] GABREL V., VANDERPOOTEN D. (1996) : "Generation and selection of efficient paths in a multiple criteria graph: The case of daily planning the shots taken by a satellite with an interactive procedure", *Cahier du LAMSADE N. 136*, Université Paris-Dauphine, Paris, 22 p.
- [19] JACQUET-LAGRÈZE E., MEZIANI R., SLOWINSKI R. (1987) : "MOLP with an interactive assessment of a piecewise utility function", *European Journal of Operational Research*, 31, 350-357.
- [20] KLINGMAN D., NAPIER A., STUTZ J. (1974) : "NETGEN: a program for generating large scale capacitated assignment, transportation, and minimum cost flow network problems", *Management Science*, 20(5), 814-821.

- [21] MARTINS E.Q., SANTOS J.L. (1996) : "A new shortest path ranking algorithm", *Technical Report*, Departamento de Matemática, Universidade de Coimbra, Portugal, 17 p.
- [22] RINGUEST J.L., RINKS D.B. (1987) : "Interactive solutions for the linear multiobjective transportation problem", *European Journal of Operational Reserach*, 32, 96-106.
- [23] ROY B. (1976) : "From optimization to multicriteria decision aid: Three main operational attitudes", in H. Thiriez and S. Zionts (*eds.*), *MCDM, Proceedings Jouy-en-Josas, France, 1975*, Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems 130, Springer-Verlag, Berlin, 1-32.
- [24] ROY B. (1985) : *Méthodologie multicritère d'aide à la décision*, Economica, Paris.
- [25] ROY B., BOUYSSOU D. (1993) : *Aide multicritère à la décision : Méthodes et cas*, Economica, Paris.
- [26] STEUER R., CHOO E.U. (1983) : "An interactive weighted Tchebycheff procedure for multiple objective programming", *Mathematical Programming*, 26, 326-344.
- [27] VANDERPOOTEN D. (1990) : L'approche interactive dans l'aide multicritère à la décision : Aspects conceptuels, méthodologiques et informatiques, Thèse de Doctorat, Université Paris-Dauphine, France.
- [28] WIERZBICKI A.P. (1980) : "The use of reference objectives in multiobjective optimization", in G. Fandel and T. Gal (*eds.*), *MCDM Theory and Applications*, Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems 177, Springer-Verlag, Heidelberg, 468-486.
- [29] WIERZBICKI A.P. (1982) : "A mathematical basis for satisficing decision making", *Mathematical Modelling*, 3, 391-405.
- [30] WINTER L. (1995) : Contribution à la théorie et à l'application de l'affectation multi-classe du trafic. Thèse de Doctorat, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, France.

Annexe A

	$x(1,2)$	$x(1,3)$	$x(1,4)$	$x(2,3)$	$x(2,5)$	$x(3,4)$	$x(3,5)$	$x(3,6)$	$x(4,6)$	$x(4,7)$	$x(5,6)$	$x(5,8)$	$x(5,9)$	$x(6,9)$	$x(7,9)$	$x(7,10)$	$x(8,11)$	$x(9,8)$	$x(9,11)$	$x(10,11)$	$f_1(i)$	$f_2(i)$
(1)	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	17	18
(2)	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	15	15
(3)	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	1	1	0	0	19	12
(4)	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	20	15
(5)	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	1	1	0	0	24	12
(6)	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	16	13
(7)	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	1	1	0	0	20	10
(8)	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	14	14
(9)	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	1	0	0	18	11
(10)	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	20	17
(11)	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	21	15
(12)	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0	1	1	0	0	25	12
(13)	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	18	20
(14)	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	16	17
(15)	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	1	1	0	0	20	14
(16)	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	21	17
(17)	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	1	1	0	0	25	14
(18)	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	9	19
(19)	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	1	0	0	13	16
(20)	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	15	22
(21)	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	1	0	0	16	20
(22)	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	1	1	0	0	20	17
(23)	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	16	18
(24)	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	1	1	0	0	20	15
(25)	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	14	19
(26)	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	1	0	0	18	16
(27)	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	1	0	0	20	22
(28)	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	21	20
(29)	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	25	17
(30)	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	1	0	0	18	25
(31)	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	16	22
(32)	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	1	1	1	0	0	20	19
(33)	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	21	22
(34)	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	1	0	0	25	19
$c_1(i,j)$	2	5	6	3	3	2	5	5	8	1	5	8	2	4	6	4	2	4	2	6		
$c_2(i,j)$	4	1	4	2	5	5	3	3	2	4	2	12	5	4	2	5	1	1	5	5		

Annexe B



Annexe C

Nb.	n	m	y_1^*	y_2^*	(y_1^{sat}, y_2^{sat})
1	500	2000	9083	34609	(14960, 36141)
2	500	2500	7070	27022	(12335, 29599)
3	500	3000	4214	21242	(7184, 23376)
4	500	3500	3466	18852	(6735, 21177)
5	500	4000	2769	15203	(5950, 16759)

Tableau 1: *Problèmes de type 1*

Nb.	0.1%		0.2%		0.3%		0.4%		0.5%		1%	
	N.	Sec.	N.	Sec.	N.	Sec.	N.	Sec.	N.	Sec.	N.	Sec.
1	1	0.08	1	0.10	4	0.13	7	0.27	17	0.65	1201	22.98
2	1	0.08	2	0.09	3	0.17	11	0.23	25	0.44	736	12.58
3	1	0.08	2	0.08	3	0.08	3	0.06	4	0.10	18	0.30
4	1	0.06	1	0.03	2	0.05	2	0.06	4	0.07	30	0.19
5	1	0.08	1	0.06	1	0.08	2	0.08	2	0.09	13	0.19

Tableau 2: *Résultats pour les problèmes type 1*

Nb.	n	m	y_1^*	y_2^*	(y_1^{sat}, y_2^{sat})
1	1000	6000	8086	40374	(16360, 43084)
2	1000	7000	5992	36942	(10539, 41456)
3	1000	8000	5136	31961	(11402, 35785)
4	1000	9000	3992	25313	(8179, 28526)
5	1000	10000	3354	24325	(9711, 27212)

Tableau 3: *Problèmes de type 2*

Nb.	0.1%		0.2%		0.3%		0.4%		0.5%	
	N.	Sec.	N.	Sec.	N.	Sec.	N.	Sec.	N.	Sec.
1	1	0.13	2	0.26	19	0.82	57	2.55	163	7.71
2	3	0.14	6	0.26	15	0.84	38	2.35	136	5.31
3	1	0.13	1	0.32	12	0.67	34	1.76	107	4.81
4	1	0.10	1	0.09	2	0.10	3	0.10	5	0.16
5	1	0.19	3	0.37	7	0.83	29	2.36	88	5.97

Tableau 4: Résultats pour les problèmes type 2

Nb.	0.6%		0.7%		0.8%		0.9%		1%	
	N.	Sec.	N.	Sec.	N.	Sec.	N.	Sec.	N.	Sec.
1	532	22.85	1593*	50.95	4205*	50.19	7142*	51.51	9980*	50.93
2	438	13.12	1169	28.98	2776*	63.69	6448*	63.73	10928*	63.73
3	288	11.49	775	29.45	2017*	54.41	4672*	53.67	7682*	54.38
4	7	0.10	10	0.19	16	0.30	24	0.54	36	0.78
5	226	14.33	568	30.82	1378*	61.56	3087*	61.24	5262	61.58

Tableau 5: (cont.) Résultats pour les problèmes type 2

Nb.	n	m	y_1^*	y_2^*	(y_1^{sat}, y_2^{sat})
1	5000	20000	96702	367649	(145640, 394365)
2	5000	25000	59843	275829	(108775, 292566)
3	5000	30000	43097	219484	(82904, 237926)
4	5000	35000	32180	181602	(68568, 199100)
5	5000	40000	23870	157191	(57867, 172850)

Tableau 6: Problèmes de type 3

Nb.	0.1%		0.2%		0.3%		0.4%		0.5%	
	...		...		...		...		...	
	N.	Sec.	N.	Sec.	N.	Sec.	N.	Sec.	N.	Sec.
1	2777*	34.75	5278*	35.04	7154*	34.98	8368*	34.40	9010*	34.60
2	1985*	40.22	3903*	38.19	5620*	38.28	7129*	38.52	8399*	37.83
3	4608*	46.39	9123*	45.75	13426*	46.62	17297*	45.09	20721*	44.96
4	1803*	42.93	3626*	42.83	5350*	42.61	7071*	41.60	8553*	42.31
5	1981*	45.37	3962*	46.61	5780*	45.77	7646*	46.26	9440*	44.72

Tableau 7: Résultats pour les problèmes type 3

Nb.	0.6%		0.7%		0.8%		0.9%		1%	
	...		...		...		...		...	
	N.	Sec.	N.	Sec.	N.	Sec.	N.	Sec.	N.	Sec.
1	9314*	35.70	9433*	34.23	9476*	34.40	9476*	34.87	9476*	35.29
2	9398*	38.93	10165*	37.48	10736*	38.36	11170*	38.62	11441*	39.70
3	23678*	45.45	26127*	45.61	28154*	46.93	29678*	45.89	30881*	45.15
4	9973*	42.24	11253*	41.95	12443*	41.60	13496*	44.25	14385*	41.87
5	11116*	45.95	12693*	46.46	14099*	45.31	15374*	45.81	16506*	45.73

Tableau 8: (cont.) Résultats pour les problèmes type 3

Annexe D

Problème : Type 1 Nb. 2

Zone d'indifférence : 0.3%

$$f_1 \in [12297, 12372]$$

$$f_2 \in [29510, 29687]$$

Nombre de chemins déterminés : 112

Nombre de chemins dans la zone : 3

1 : (12335, 29599)
500 - 497 - 491 - 481 - 475 - 464 - 448 - 444 - 433 - 421 - 416 - 408 - 400 - 390 - 382 - 376 - 368 - 356 - 349 -
344 - 334 - 330 - 323 - 318 - 313 - 303 - 295 - 288 - 282 - 276 - 269 - 263 - 256 - 249 - 238 - 231 - 224 - 218 -
211 - 199 - 190 - 183 - 177 - 167 - 160 - 153 - 142 - 136 - 130 - 125 - 114 - 107 - 97 - 90 - 78 - 66 - 59 - 53 - 42 -
36 - 29 - 21 - 13 - 4 - 1.
6 : (12354, 29627)
500 - 497 - 491 - 481 - 475 - 464 - 448 - 444 - 433 - 421 - 416 - 408 - 400 - 390 - 382 - 376 - 368 - 356 - 349 -
344 - 334 - 330 - 323 - 318 - 313 - 303 - 295 - 288 - 282 - 276 - 269 - 263 - 256 - 249 - 238 - 231 - 224 - 218 -
211 - 199 - 190 - 183 - 177 - 167 - 160 - 153 - 142 - 136 - 130 - 125 - 114 - 107 - 97 - 90 - 78 - 66 - 57 - 53 - 42 -
36 - 29 - 21 - 13 - 9 - 1.
29 : (12369, 29667)
500 - 497 - 491 - 481 - 475 - 464 - 448 - 444 - 433 - 421 - 416 - 408 - 400 - 390 - 382 - 376 - 368 - ~~354~~ - 349 -
344 - 334 - 330 - 323 - 318 - 313 - 303 - 295 - 288 - 282 - 276 - 269 - 263 - 256 - 249 - 238 - 231 - ~~224~~ - 218 -
211 - 199 - 190 - 183 - 177 - 167 - 160 - 153 - 142 - 136 - 130 - 125 - 114 - 107 - 97 - 90 - 78 - 66 - 59 - 53 - 42 -
36 - 29 - 21 - 13 - 4 - 1.

Problème : Type 1 Nb. 2

Zone d'indifférence : 0.4%

$$f_1 \in [12285, 12384]$$

$$f_2 \in [29480, 29717]$$

Nombre de chemins déterminés : 301

Nombre de chemins dans la zone : 11

1 : (12335, 29599)
500 - 497 - 491 - 481 - 475 - 464 - 448 - 444 - 433 - 421 - 416 - 408 - 400 - 390 - 382 - 376 - 368 - 356 - 349 -
344 - 334 - 330 - 323 - 318 - 313 - 303 - 295 - 288 - 282 - 276 - 269 - 263 - 256 - 249 - 238 - 231 - 224 - 218 -
211 - 199 - 190 - 183 - 177 - 167 - 160 - 153 - 142 - 136 - 130 - 125 - 114 - 107 - 97 - 90 - 78 - 66 - 59 - 53 - 42 -
36 - 29 - 21 - 13 - 4 - 1.
5 : (12380, 29597)
500 - 497 - 491 - 481 - 475 - 464 - 448 - 444 - 433 - 421 - 416 - 408 - 400 - 390 - 382 - 376 - 368 - 356 - 349 -
344 - 334 - 330 - 323 - 318 - 313 - 303 - 295 - 288 - 282 - 276 - 269 - 263 - 256 - 249 - 238 - 231 - 224 - 218 -
211 - 199 - 190 - 183 - 177 - 167 - 160 - 153 - 142 - 136 - 126-115-108 - 97 - 90 - 78 - 66 - 57 - 53 - 42 -
36 - 29 - 21 - 13 - 4 - 1.
6 : (12354, 29627)
500 - 497 - 491 - 481 - 475 - 464 - 448 - 444 - 433 - 421 - 416 - 408 - 400 - 390 - 382 - 376 - 368 - 356 - 349 -
344 - 334 - 330 - 323 - 318 - 313 - 303 - 295 - 288 - 282 - 276 - 269 - 263 - 256 - 249 - 238 - 231 - 224 - 218 -
211 - 199 - 190 - 183 - 177 - 167 - 160 - 153 - 142 - 136 - 130 - 125 - 114 - 107 - 97 - 90 - 78 - 66 - 57 - 53 - 42 -
36 - 29 - 21 - 13 - 9 - 1.

11 : (12308, 29697)
500 - 497 - 491 - 481 - 475 - 464 - 448 - 444 - 433 - 421 - 416 - 408 - 400 - 390 - 382 - ~~372~~ - 368 - 356 - 349 -
344 - 334 - 330 - 323 - 318 - 313 - 303 - 295 - 288 - 282 - 276 - 269 - 263 - 256 - 249 - ~~238~~ - 231 - 224 - 218 -
211 - 199 - 190 - 183 - 177 - 167 - 160 - 153 - 142 - 136 - 130 - 125 - 114 - 107 - 97 - 90 - 78 - 66 - 59 - 53 - 42 -
36 - 29 - 21 - 13 - 4 - 1.

29 : (12369, 29667)
500 - 497 - 491 - 481 - 475 - 464 - 448 - 444 - 433 - 421 - 416 - 408 - 400 - 390 - 382 - 376 - 368 - ~~354~~ - 349 -
344 - 334 - 330 - 323 - 318 - 313 - 303 - 295 - 288 - 282 - 276 - 269 - 263 - 256 - 249 - 238 - 231 - 224 - 218 -
211 - 199 - 190 - 183 - 177 - 167 - 160 - 153 - 142 - 136 - 130 - 125 - 114 - 107 - 97 - 90 - 78 - 66 - 59 - 53 - 42 -
36 - 29 - 21 - 13 - 4 - 1.

40 : (12353, 29695)
500 - 497 - 491 - 481 - 475 - 464 - 448 - 444 - 433 - 421 - 416 - 408 - 400 - 390 - 382 - ~~372~~ - 368 - 356 - 349 -
344 - 334 - 330 - 323 - 318 - 313 - 303 - 295 - 288 - 282 - 276 - 269 - 263 - 256 - 249 - ~~238~~ - 231 - 224 - 218 -
211 - 199 - 190 - 183 - 177 - 167 - 160 - 153 - 142 - 136 - ~~126-115-108~~ - 97 - 90 - 78 - 66 - ~~57~~ - 53 - 42 -
36 - 29 - 21 - 13 - 4 - 1.

44 : (12356, 29691)
500 - 497 - 491 - 481 - 475 - 464 - 448 - 444 - 433 - 421 - 416 - 408 - 400 - 390 - 382 - 376 - 368 - 356 - 349 -
344 - 334 - 330 - 323 - 318 - 313 - 303 - 295 - 288 - 282 - 276 - 269 - 263 - 256 - 249 - 238 - 231 - 224 - 218 -
211 - 199 - 190 - 183 - 177 - 167 - 160 - 153 - 142 - 136 - ~~126-115-108~~ - 97 - 90 - 78 - 66 - ~~57~~ - 53 - 42 -
36 - 29 - 21 - 13 - 4 - 1.

55 : (12346, 29711)
500 - 497 - 491 - 481 - 475 - 464 - 448 - 444 - 433 - 421 - 416 - 408 - 400 - 390 - 382 - 376 - 368 - 356 - 349 -
344 - 334 - 330 - 323 - 318 - 313 - 303 - 295 - 288 - 282 - 276 - 269 - 263 - 256 - 249 - 238 - 231 - 224 - 218 -
211 - 199 - 190 - 183 - 177 - 167 - 160 - 153 - 142 - 136 - ~~126-115~~ - 107 - 97 - 90 - 78 - ~~65~~ - 59 - 53 - 42 -
36 - 29 - 21 - 13 - 4 - 1.

67 : (12347, 29716)
500 - 497 - 491 - 481 - 475 - 464 - 448 - 444 - 433 - 421 - 416 - 408 - 400 - 390 - 382 - 376 - 368 - 356 - 349 -
344 - 334 - 330 - 323 - 318 - 313 - 303 - 295 - 288 - 282 - 276 - 269 - 263 - 256 - 249 - 238 - ~~235-226-225~~ - 218 -
211 - 199 - 190 - 183 - 177 - 167 - 160 - 153 - 142 - 136 - 130 - 125 - 114 - 107 - 97 - 90 - 78 - 66 - 59 - 53 - 42 -
36 - 29 - 21 - 13 - 4 - 1.

89 : (12382, 29695)
500 - 497 - 491 - 481 - 475 - 464 - 448 - 444 - 433 - 421 - 416 - 408 - 400 - 390 - 382 - 376 - 368 - 356 - 349 -
344 - 334 - 330 - 323 - 318 - 313 - 303 - 295 - 288 - ~~281-275-266~~ - 256 - 249 - 238 - 231 - 224 - 218 -
211 - 199 - 190 - 183 - 177 - 167 - 160 - 153 - 142 - 136 - 130 - 125 - 114 - 107 - 97 - 90 - 78 - 66 - ~~57~~ - 53 - 42 -
36 - 29 - 21 - 13 - 4 - 1.

109 : (12384, 29702)
500 - 497 - 491 - 481 - 475 - 464 - 448 - 444 - 433 - 421 - 416 - 408 - 400 - 390 - 382 - 376 - 368 - 356 - 349 -
~~339~~ - 330 - 323 - 318 - 313 - 303 - 295 - ~~290-281-275-266~~ - 256 - 249 - 238 - 231 - 224 - 218 -
211 - 199 - 190 - 183 - 177 - 167 - 160 - 153 - 142 - 136 - 130 - 125 - 114 - 107 - 97 - 90 - 78 - 66 - ~~57~~ - 53 - 42 -
36 - 29 - 21 - 13 - 4 - 1.

Problème : Type 1 Nb. 2

Zone d'indifférence : 0.5%

$f_1 \in [12273, 12396]$

$f_2 \in [29451, 29746]$

Nombre de chemins déterminés : 752

Nombre de chemins dans la zone : 25

1 : (12335, 29599)
500 - 497 - 491 - 481 - 475 - 464 - 448 - 444 - 433 - 421 - 416 - 408 - 400 - 390 - 382 - 376 - 368 - 356 - 349 -
344 - 334 - 330 - 323 - 318 - 313 - 303 - 295 - 288 - 282 - 276 - 269 - 263 - 256 - 249 - 238 - 231 - 224 - 218 -
211 - 199 - 190 - 183 - 177 - 167 - 160 - 153 - 142 - 136 - 130 - 125 - 114 - 107 - 97 - 90 - 78 - 66 - 59 - 53 - 42 -
36 - 29 - 21 - 13 - 4 - 1.

5 : (12380, 29597)
500 - 497 - 491 - 481 - 475 - 464 - 448 - 444 - 433 - 421 - 416 - 408 - 400 - 390 - 382 - 376 - 368 - 356 - 349 -
344 - 334 - 330 - 323 - 318 - 313 - 303 - 295 - 288 - 282 - 276 - 269 - 263 - 256 - 249 - 238 - 231 - 224 - 218 -
211 - 199 - 190 - 183 - 177 - 167 - 160 - 153 - 142 - 136 - ~~126-115-108~~ - 97 - 90 - 78 - 66 - ~~57~~ - 53 - 42 -
36 - 29 - 21 - 13 - 4 - 1.

[illegible]

109 : (12384, 29702)
500 - 497 - 491 - 481 - 475 - 464 - 448 - 444 - 433 - 421 - 416 - 408 - 400 - 390 - 382 - 376 - 368 - 356 - 349 -
~~339~~ - 330 - 323 - 318 - 313 - 303 - 295 - ~~290-281-275-266~~ - 256 - 249 - 238 - 231 - 224 - 218 -
211 - 199 - 190 - 183 - 177 - 167 - 160 - 153 - 142 - 136 - 130 - 125 - 114 - 107 - 97 - 90 - 78 - 66 - 57 - 53 - 42 -
36 - 29 - 21 - 13 - 4 - 1.

114 : (12365, 29722)
500 - 497 - 491 - 481 - 475 - 464 - 448 - 444 - 433 - 421 - 416 - 408 - 400 - 390 - 382 - 376 - 368 - 356 - 349 -
344 - 334 - 330 - 323 - ~~315-309-301-297-290-281-275-266~~ - 256 - 249 - 238 - 231 - 224 - 218 -
211 - 199 - 190 - 183 - 177 - 167 - 160 - 153 - 142 - 136 - 130 - 125 - 114 - 107 - 97 - 90 - 78 - 66 - 59 - 53 - 42 -
36 - 29 - 21 - 13 - 4 - 1.

136 : (12348, 29746)
500 - 497 - 491 - 481 - 475 - 464 - ~~445-443~~ - 433 - 421 - 416 - 408 - 400 - 390 - 382 - 376 - 368 - 356 - 349 -
~~339~~ - 330 - 323 - 318 - 313 - 303 - 295 - 288 - 282 - 276 - 269 - 263 - 256 - 249 - 238 - 231 - 224 - 218 -
211 - 199 - 190 - 183 - 177 - 167 - 160 - 153 - 142 - 136 - 130 - 125 - 114 - 107 - 97 - 90 - 78 - 66 - 59 - 53 - 42 -
36 - 29 - 21 - 13 - 4 - 1.

173 : (12375, 29729)
500 - 497 - 491 - 481 - 475 - 464 - 448 - 444 - 433 - ~~427-420-410-401-396-391~~ - 382 - 376 - 368 - 356 - 349 -
344 - 334 - 330 - 323 - 318 - 313 - 303 - 295 - ~~290-281-275-266~~ - 256 - 249 - 238 - 231 - 224 - 218 -
211 - 199 - 190 - 183 - 177 - 167 - 160 - 153 - 142 - 136 - 130 - 125 - 114 - 107 - 97 - 90 - 78 - 66 - 59 - 53 - 42 -
36 - 29 - 21 - 13 - 4 - 1.

189 : (12367, 29738)
500 - 497 - 491 - 481 - 475 - 464 - 448 - 444 - 433 - 421 - 416 - 408 - 400 - 390 - 382 - 376 - 368 - ~~352-344~~ -
344 - 334 - 330 - 323 - 318 - 313 - 303 - 295 - 288 - 282 - 276 - 269 - 263 - 256 - 249 - 238 - 231 - 224 - 218 -
211 - 199 - 190 - 183 - 177 - 167 - 160 - 153 - 142 - 136 - ~~126-115-108~~ - 97 - 90 - 78 - 66 - 59 - 53 - 42 -
36 - 29 - 21 - 13 - 4 - 1.

197 : (12392, 29714)
500 - 497 - 491 - 481 - 475 - 464 - 448 - 444 - 433 - 421 - 416 - 408 - 400 - 390 - 382 - 376 - 368 - 356 - 349 -
344 - 334 - 330 - 323 - 318 - 313 - 303 - 295 - 288 - 282 - 276 - 269 - 263 - 256 - 249 - 238 - ~~235-226-225~~ - 218 -
211 - 199 - 190 - 183 - 177 - 167 - 160 - 153 - 142 - 136 - ~~126-115-108~~ - 97 - 90 - 78 - 66 - 57 - 53 - 42 -
36 - 29 - 21 - 13 - 4 - 1.

214 : (12366, 29744)
500 - 497 - 491 - 481 - 475 - 464 - 448 - 444 - 433 - 421 - 416 - 408 - 400 - 390 - 382 - 376 - 368 - 356 - 349 -
344 - 334 - 330 - 323 - 318 - 313 - 303 - 295 - 288 - 282 - 276 - 269 - 263 - 256 - 249 - 238 - ~~235-226-225~~ - 218 -
211 - 199 - 190 - 183 - 177 - 167 - 160 - 153 - 142 - 136 - 130 - 125 - 114 - 107 - 97 - 90 - 78 - 66 - 57 - 53 - 42 -
36 - 29 - 21 - 13 - 9 - 1.

258 : (12381, 29741)
500 - 497 - 491 - 481 - 475 - 464 - 448 - 444 - 433 - 421 - 416 - 408 - 400 - 390 - 382 - 372 - 368 - 356 - 349 -
344 - 334 - 330 - 323 - 318 - 313 - 303 - 295 - 288 - 282 - 276 - 269 - 263 - 256 - 249 - 238 - 231 - 224 - 218 -
211 - 199 - 190 - 183 - 177 - 167 - 160 - 153 - 142 - 136 - ~~126-119~~ - 114 - 107 - 97 - 90 - 78 - 66 - 57 - 53 - 42 -
36 - 29 - 21 - 13 - 4 - 1.

368 : (12393, 29744)
500 - 497 - 491 - 481 - 475 - 464 - ~~445-443~~ - 433 - 421 - 416 - 408 - 400 - 390 - 382 - 376 - 368 - 356 - 349 -
~~339~~ - 330 - 323 - 318 - 313 - 303 - 295 - 288 - 282 - 276 - 269 - 263 - 256 - 249 - 238 - 231 - 224 - 218 -
211 - 199 - 190 - 183 - 177 - 167 - 160 - 153 - 142 - 136 - ~~126-115-108~~ - 97 - 90 - 78 - 66 - 57 - 53 - 42 -
36 - 29 - 21 - 13 - 4 - 1.