

CAHIER DU LAMSADE

Laboratoire d'Analyse et Modélisation des Systèmes pour l'Aide à la Décision

(Université Paris IX Dauphine)

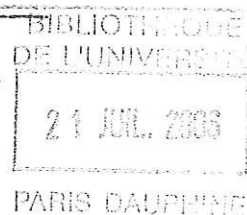
Equipe de Recherche Associée au C.N.R.S. N° 656



UNE METHODE DE CONSTRUCTION D'UNE FONCTION

D'UTILITE ADDITIVE, EXPLICATIVE D'UNE

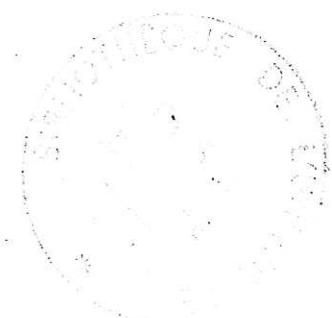
PREFERENCE GLOBALE (*)



N° 16-1978

nc
E. JACQUET-LAGREZE
J. SISKOS

Mai 1978



(*) Communication présentée aux journées de l'ASU, Nice, 22-23-24 mai 1978.

1703-16

SOMMAIRE

	<u>Pages</u>
ABSTRACT	I
RESUME	II
0. INTRODUCTION	1
1. FONCTIONS D'UTILITE ADDITIVES ET METHODES DE CONSTRUCTION	1
1.1 Fonctions d'utilité additives	1
1.2 Méthodes de construction de fonctions d'utilité additives	3
2. PRESENTATION DE LA METHODE UTA	5
2.1 Les données	5
2.2 Le modèle	6
3. APPLICATIONS ET UTILISATION DU PROGRAMME UTA	11
3.1 L'exemple du choix de la voiture	11
3.2 Les autres applications	17
3.2.1 Le concours PAN	17
3.2.2 Autres possibilités d'utilisation	19
4. LES EXTENSIONS POSSIBLES DU MODELE	20
4.1 Autres critères d'optimalité	20
4.2 Analyse de sensibilité	22
4.3 Une méthode d'analyse discriminante	24
4.4 Extension des modèles aux cas de variables (critères) continues	25
REFERENCES	27

AN ASSESSING METHOD OF AN ADDITIVE UTILITY FUNCTION,
EXPLICATIVE OF A WHOLLISTIC PREFERENCE

ABSTRACT

The purpose of the method presented in this paper is to assess an additive utility function which aggregates n criteria $g_1, g_2, \dots, g_n$ in a unique criterion $U(\underline{g}) = \sum_{i=1}^n u_i(g_i)$, using the information given by a whollistic preference on a set A of alternatives (a weak-order) and the evaluations $g_i(a), a \in A$ of these alternatives. Therefore it is an explicative method or a method of disaggregation of a whollistic preference.

The model uses linear programming structures ("goal programming") including constraints given in the respect of preference and indifference conditions obtained from the whollistic preference.

The routine UTA (Additive Utility) corresponding to the method has been used for the preference analysis of 7 members belonging to the decision committee in architecture (PAN : Programme Architecture Nouvelle). The utility functions assessed by the method were very consistent with the observed whollistic preferences (Kendall's tau $\approx .90$). The model can be improved if we take into account cases where explicative criteria are continuous variables, and it can be adapted in the context of discriminant analysis.

Stability and sensitivity analysis of the assessed utility function is proposed by the mean of post-optimality analysis in linear programming.

UNE METHODE DE CONSTRUCTION D'UNE FONCTION D'UTILITE ADDITIVE EXPLICATIVE D'UNE PREFERENCE GLOBALE

RESUME

La méthode présentée a pour objet de construire une fonction d'utilité additive agrégeant n critères $g_1, g_2, \dots, g_n$ en un critère unique de la forme $U(\underline{g}) = \sum_{i=1}^n u_i(g_i)$ à partir de la connaissance d'une préférence globale préordinaire définie sur un ensemble A d'actions et les évaluations $g_i(a)$ ($a \in A$) de ces actions sur les n critères. C'est donc une méthode explicative ou de désagrégation d'une préférence globale.

La méthode est formalisée par des structures de programmation linéaire ("goal programming") qui contiennent des équations de respect des relations de préférence et d'indifférence imposées par la préférence globale.

Le programme UTA (Utilité Additive) correspondant a été utilisé dans l'analyse des préférences de 7 membres du jury PAN (Programme Architecture Nouvelle) et a permis de construire des fonctions d'utilité très compatibles avec les préférences globales observées (tau de Kendall de l'ordre de 0,90). Ce modèle peut être étendu au cas de critères continus et peut être adapté dans un contexte d'analyse discriminante.

L'étude de la stabilité et de sensibilité de la fonction d'utilité estimée est proposée au moyen d'une analyse post-optimale en programmation linéaire.

0. INTRODUCTION

Cette étude a pour objet de présenter une méthode de construction d'une fonction d'utilité additive (méthode UTA) basée sur une "explication" d'une préférence globale R à l'aide de critères g_i supposés "explicatifs" de cette préférence globale. Nous rappelons dans la première section un certain nombre de résultats relatifs aux fonctions d'utilité additives. La section 2 présente en détail le modèle d'estimation des utilités partielles $u_i(g_i)$, modèle basé sur des techniques de Goal Programming. La méthode UTA a été programmée et testée sur plusieurs exemples présentés dans la section 3. Enfin, dans la section 4, on discute d'un certain nombre d'extensions possibles et d'améliorations à apporter à ce premier modèle.

1. FONCTIONS D'UTILITE ADDITIVES ET METHODES DE CONSTRUCTION

1.1 Fonctions d'utilité additives

Lorsqu'un ensemble d'actions A est évalué sur une famille de critères $\underline{g} = \{g_1, g_2, \dots, g_n\}$, une approche opérationnelle classique utilisée pour bâtir un modèle d'une préférence globale d'un individu (décideur, ...) consiste à agréger tous les critères en un critère unique appelé fonction d'utilité (voir Roy (1971))

$$(1) \quad U(\underline{g}) = U(g_1, g_2, \dots, g_n).$$

Si l'on note par P la préférence stricte et I l'indifférence, la fonction d'utilité U possède en général ⁽¹⁾ les propriétés suivantes :

- (1) Lorsqu'il existe des seuils d'indifférence, (2) et (3) doivent être transformées pour prendre en compte ces seuils. La fonction U est alors un quasi-critère et la relation $\succsim = \{U \sim$ un quasi-ordre.

$$(2) \quad U[\underline{g}(a)] > U[\underline{g}(b)] \iff a P b$$

$$(3) \quad U[\underline{g}(a)] = U[\underline{g}(b)] \iff a I b$$

La relation $R = (P, I)$ est alors un préordre total. La fonction d'utilité est additive si elle s'écrit sous la forme :

$$(4) \quad U(\underline{g}) = \sum_{i=1}^n u_i(g_i)$$

C'est de loin la forme la plus utilisée, surtout dans sa forme très particulière de somme pondérée des critères

$$(5) \quad U(\underline{g}) = \sum_{i=1}^n p_i g_i$$

où chaque utilité partielle $u_i(g_i)$ est entièrement déterminée à partir des critères initiaux et d'un jeu de poids $\underline{P} = (p_1, \dots, p_n)$.

L'hypothèse fondamentale dans l'utilisation d'une forme additive (4) (et donc a fortiori (5)) est l'indépendance au sens des préférences (cf. Fishburn (1965) et (1966)). Le taux de substitution entre toute paire de critères est alors indépendant des valeurs prises sur les $n - 2$ autres critères.

Il est classique, dans les applications courantes, de normer la fonction d'utilité additive sous la forme :

$$(6) \quad U(\underline{g}) = \sum_{i=1}^n p_i w_i(g_i) \quad \text{où} \quad w_i(g_i) = \frac{1}{p_i} u_i(g_i) \quad \text{pour tout } i.$$

Si g_i^* et g_{i*} désignent respectivement la valeur (l'échelon) le plus et le moins préféré du critère i , les contraintes les plus courantes de normalisation sont les suivantes (cf. Keeney, Raiffa (1976)) :

$$(7) \quad \begin{cases} \sum_{i=1}^n p_i = 1 \\ w_i(g_{i*}) = 0 \quad \text{pour tout } i \\ w_i(g_i^*) = 1 \quad \text{pour tout } i \end{cases}$$

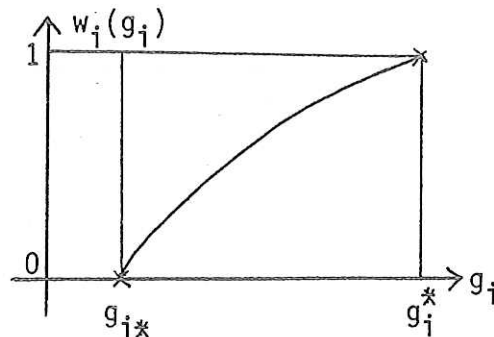


Figure 1

Si l'on fait l'hypothèse habituelle que la préférence est non décroissante avec chacun des critères, les fonctions d'utilité partielles w_i ou u_i sont alors monotones non décroissantes (Figure 1). De plus les poids traduisent l'importance relative des critères.

Lorsqu'on utilise la forme additive (4), les contraintes de normalisation (7) deviennent :

$$(8) \quad \begin{cases} \sum_{i=1}^n u_i(g_i^*) = 1 \\ u_i(g_{i*}) = 0 \text{ pour tout } i \end{cases}$$

La forme (4) avec les contraintes (8) est alors équivalente à la forme (6) avec les contraintes (7).

1.2 Méthodes de construction de fonctions d'utilité additives

On peut distinguer deux grandes classes de méthodes de construction. Fishburn (1967) donne une excellente présentation de la première classe de méthodes. Il distingue notamment des méthodes directes où l'on estime les $u_i(g_i)$ à partir de jugements (sous forme de notes ou de rangs ou exprimés à l'aide de loteries) ne portant que sur un critère à la fois

et des méthodes de compensation où l'on estime les $u_i(g_i)$ à partir de raisonnements en terme de compensation et donc de taux de substitution mettant en oeuvre deux critères au moins à partir de courbes d'indifférence par exemple (voir également Eckenrode (1965)).

La seconde classe de méthodes repose sur l'observation soit de choix effectués sur A par un ou plusieurs individus (choix de produits, choix d'un mode de transport, décisions d'acceptation et de rejet, etc.), soit sur le recueil d'une préférence globale sur les actions de A (préférences globales, préordinales, totales ou partielles sur des produits, des projets, des actions de référence bien connues, etc.). Il s'agit alors d'estimer une fonction d'utilité additive permettant de représenter "au mieux" les choix observés ou les préférences globales recueillies.

Le tableau 1 présente quelques méthodes pouvant être utilisées pour cette estimation.

Les méthodes 3, 4 et 5 estiment d'une façon optimale les poids de critères en utilisant la programmation linéaire ("goal programming" ; cf. Charnes-Cooper (1961)).

L'objet de la méthode UTA ⁽²⁾ présentée dans la section suivante est d'estimer une fonction d'utilité du type (4) en utilisant également des techniques du "goal programming".

(2) Utilité Additive.

BIBLIOTHEQUE

N°	Méthode	Variable à expliquer	Utilité additive du type (5) : estimation des p_i (4) ou (6) : estimation des $u_i(g_i)$
1	Analyse discriminante	Nominale	(5)
2	Régression Linéaire Multiple	Cardinale	(5)
3	H.M. Wagner (1959)	Cardinale	(5)
4	ORDREG (V.Srinivasan et A.D. Shocker (1973))	Ordinale	(5)
5	D. Pekelman, S. Sen (1974)	Ordinale	(5)
6	DISQUAL (Saporta (1977))	Nominale	(4)
7	MORALS (Young - De Leeuw - Takane (1975))	Ordinale	(6)
8	UTA (méthode exposée au § 2)	Ordinale	(4)

Tableau 1 : Quelques méthodes explicatives

2. PRESENTATION DE LA METHODE UTA

Dans un premier paragraphe, nous donnons les caractéristiques de la méthode (variables à expliquer, nature des critères) puis nous présentons (§ 2.2) la structure du modèle en termes du "goal programming".

2.1 Les données

UTA est une méthode "explicative" d'une préférence globale transitive définie sur A (ensemble d'objets, d'actions, ...) au moyen d'une famille cohérente de critères (cf. Roy (1975), (1978)) $\underline{g} = (g_1, g_2, \dots, g_n)$ agrégés en une fonction d'utilité additive de la forme (4). Nous supposons

ici que chaque critère g_i ne peut prendre qu'un nombre fini de valeurs g_i^j , $j = 1, 2, \dots, \alpha_i$ dans un ensemble discret S_i (échelle ordinaire à α_i échelons).

Nous appelons espace de conséquences l'ensemble :

$$S(A) = \{g(a) ; a \in A\} \text{ et espace produit l'ensemble } \prod_{i=1}^n S_i.$$

On suppose que $S(A) \subseteq \prod_{i=1}^n S_i$ et qu'il existe $a \in A$ tel que $g_i(a) = g_i^j$ pour tout i et tout j (sinon il faut supprimer l'échelon non utilisé).

La préférence globale (variable à expliquer) est une relation totale préordinaire $R = (P, I)$ définie sur A .

Les données sont donc constituées par le tableau d'évaluation $g(A)$ et le préordre total R .

2.2 Le modèle

Compte tenu des relations (2), (3) et (4), nous posons

$$(9) \quad U[g(a)] = \sum_{i=1}^n u_i [g_i(a)] + \sigma(a) \text{ pour tout } a \in A,$$

$\sigma(a)$ étant une erreur relative à l'utilité $U[g(a)] = \sum_{i=1}^n u_i [g_i(a)]$.

L'introduction de variables potentielles $\sigma(a) \geq 0$, $a \in A$ et non pas de variables du type z_{ab} pour toute paire $(a, b) \in R$ comme dans les méthodes 3-5 du tableau 1 est possible en raison de la transitivité de R . Il est en effet inutile d'écrire toutes les égalités et inégalités du type (2) et (3).

En posant :

$$(10) \quad U[g(a)] - U[g(b)] \geq \delta \iff a P b \text{ avec } \delta > 0 \text{ une valeur dépendant de } |A|, \text{ du nombre des classes d'indifférence dans } R \text{ et des}$$

valeurs des seuils d'indifférence (s'il y en a) entre les valeurs $g_i^j(a)$ (3).
D'après (9), la relation (10) devient :

$$(11) \quad \sum_{i=1}^n \{u_i[g_i(a)] - u_i[g_i(b)]\} + \sigma(a) - \sigma(b) \geq \delta \iff a P b$$

de même, pour les paires d'actions indifférentes, nous avons :

$$(12) \quad \sum_{i=1}^n \{u_i[g_i(a)] - u_i[g_i(b)]\} + \sigma(a) - \sigma(b) = 0 \iff a I b$$

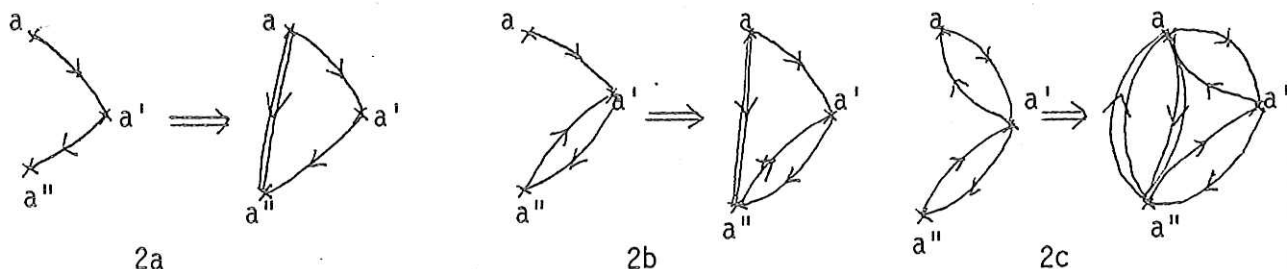


Figure 2 : Transitivité des préférences

(L'arc $\rightarrow$ unique signifie la préférence stricte P , l'arc double $\rightleftarrows$ l'indifférence I et les arcs épais $\Rightarrow$ les préférences résultantes)

Prenons trois actions a, a', a'' appartenant à trois classes différentes consécutives de R ($a P a'$ et $a' P a''$). D'après (11), nous avons :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n u_i[g_i(a)] - \sum_{i=1}^n u_i[g_i(a')] + \sigma(a) - \sigma(a') &\geq \delta \\ \sum_{i=1}^n u_i[g_i(a')] - \sum_{i=1}^n u_i[g_i(a'')] + \sigma(a') - \sigma(a'') &\geq \delta \end{aligned}$$

d'où, en sommant membre par membre les deux inégalités :

$$\sum_{i=1}^n u_i[g_i(a)] - \sum_{i=1}^n u_i[g_i(a'')] + \sigma(a) - \sigma(a'') \geq 2\delta \Rightarrow a P a''$$

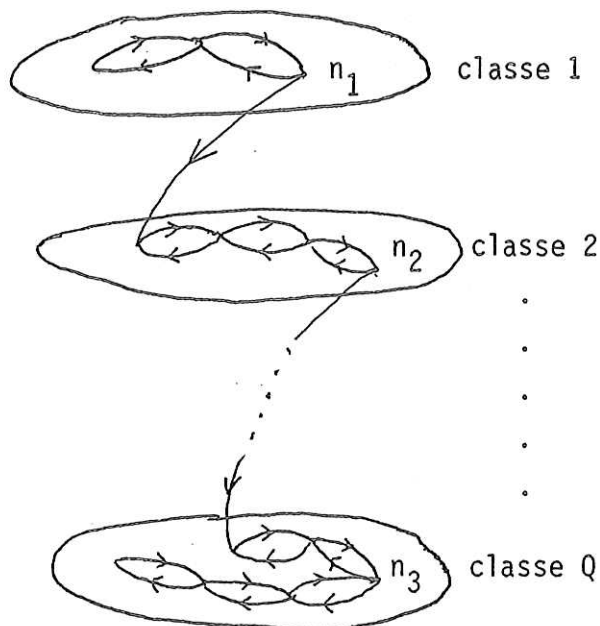
(fig. 2a)

(3) δ doit être significatif de façon à traduire une supériorité qu'on attache à une classe de R par rapport aux autres ; par contre, pour des raisons de conservation de la transitivité des préférences, nous posons : $|U[\frac{g(a)}{g(b)}] - U[\frac{g(b)}{g(a)}]| = 0 \iff a I b$. Poser des relations du type $|U[\frac{g(a)}{g(b)}] - U[\frac{g(b)}{g(a)}]| < \delta \iff a I b$ conduit à définir R comme un quasi-ordre, ce qui pose des difficultés techniques car on perd alors la transitivité de I .

La condition de type (11) associée à $a P a''$ est donc inutile.
De même, nous avons les conséquences suivantes :

$$a P a' \text{ et } a' I a'' \Rightarrow a P a'' \text{ (fig. 2b)}$$

$$a I a' \text{ et } a' I a'' \Rightarrow a I a'' \text{ (fig. 2c)}$$



Considérons un préordre R à Q classes d'indifférence (fig. 3) dont chacune contient n_q , $q = 1, 2, \dots, Q$ actions. Alors seules les relations indiquées par les arcs de la figure 3 sont nécessaires pour répondre au système (11) - (12), les autres étant redondantes (un arc correspond à une inégalité du type " $\geq$ " et chaque égalité est remplacée par deux inégalités de ce type).

Figure 3 : Préordre à Q classes d'indifférence. Chaque arc représente un couple de R

Cette propriété de transitivité utilisée dans notre modèle nous interdit d'"expliquer" des préférences globales non nécessairement transitives. Dans ce cas-là, on pourrait envisager un modèle dans lequel à chaque paire comparée est associée une (relations (11)) ou deux variables d'écart (relations (12)) :

$$(13) \quad \begin{cases} \sum_{i=1}^n \{u_i[g_i(a)] - u_i[g_i(b)]\} + z_{ab} \geq \delta \iff a P b \\ \sum_{i=1}^n \{u_i[g_i(a)] - u_i[g_i(b)]\} + z_{ab} - z_{ba} = 0 \iff a I b \\ \text{avec } z \geq 0 \end{cases}$$

Pour tenir compte des hypothèses du paragraphe 1.1 sur la monotonie des préférences, les utilités partielles $u_i(g_i)$ doivent satisfaire l'ensemble des contraintes (14) :

$$(14) \quad u_i(g_i^{j+1}) - u_i(g_i^j) \geq s_i \quad ; \quad j = 1, 2, \dots, \alpha_i - 1, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

$s_i \geq 0$ étant des seuils d'indifférence définis sur chaque critère g_i (4)

L'estimation des utilités $u_i(g_i^j)$ se fait alors au moyen d'un programme linéaire (programme du type "goal") constitué par les contraintes (8), (11), (12), (14) dont l'objectif est fonction des variables $\sigma(a)$, $a \in A$. Pour des raisons de simplicité, nous faisons usage d'un objectif à forme linéaire qui correspond à une estimation au sens des moindres écarts :

$$(15) \quad F = \sum_{a \in A} \sigma(a) \quad (5).$$

Le programme linéaire résultant est le suivant :

$$(PL1) \quad \left\{ \begin{array}{l} [\min] F = \sum_{a \in A} \sigma(a) \\ \text{sous les contraintes :} \\ \sum_{i=1}^n \{u_i[g_i(a)] - u_i[g_i(b)]\} + \sigma(a) - \sigma(b) \geq \delta \quad \text{si } a P b \\ \sum_{i=1}^n \{u_i[g_i(a)] - u_i[g_i(b)]\} + \sigma(a) - \sigma(b) = 0 \quad \text{si } a I b \\ u_i(g_i^{j+1}) - u_i(g_i^j) \geq s_i \quad \text{pour tout } i \text{ et } j \\ \sum_{i=1}^n u_i(g_i^*) = 1 \\ u_i(g_{i*}) = 0, u_i(g_i^j) \geq 0, \sigma(a) \geq 0 \quad \text{pour tout } i \text{ et } j \text{ et} \\ \text{pour tout } a \in A \end{array} \right.$$

(4) L'utilisation des seuils dans le modèle n'est pas obligatoire ($s_i = 0$). Cependant, dans le cas où les évaluations g_i sont données par la même personne que celle qui donne R , l'utilisateur peut introduire un seuil $s_i > 0$ pour éviter des phénomènes du type : $u_i(g_i^{j+1}) = u_i(g_i^j)$ tandis que $g_i^{j+1} > g_i^j$. Nous suggérons aux utilisateurs d'étudier d'abord le cas où $s_i = 0$ pour tout i et ensuite choisir des seuils pour quelques critères en fonction des poids g_i^* de ces critères.

(5) Il est possible de pondérer les écarts : $F = \sum_{a \in A} p(a) \sigma(a)$.

Compte tenu du préordre de la figure 3 et de la propriété sur la saisie de la transitivité des préférences, nous précisons (tableau 2) les dimensions du (PL1).

Contraintes			Variables	
Formule	Signe	Nombre	Nature	Nombre
(11)	$\geq$	$Q - 1$	$u_i(g_i^j)$	$\sum_{i=1}^n (\alpha_i - 1)$
(12)	$\geq$	$Q \times \sum_{i=1}^Q (n_i - 1)$		
(14)	$\geq$	$\sum_{i=1}^n (\alpha_i - 1)$	$\sigma(a)$	$ A $
$\sum_{i=1}^n u_i [g_i^*] = 1$	$\geq$	2		

Tableau 2 : Dimensions du programme linéaire (PL1)

La combinatoire et la structure du (PL1) nous incite à utiliser la notion et les propriétés de la dualité en programmation linéaire. Cette démarche évite d'une part l'introduction des variables artificielles dans le programme et d'autre part économise de la place mémoire et du temps de calcul (6).

Désignons par $\mathcal{A}$ la matrice du (PL1) de dimensions indiquées au tableau 2, $\underline{x}$ le vecteur des utilités partielles u_i et des écarts σ et $\underline{b}$ le second membre du programme. Alors (PL1) et son dual s'écrivent :

$$(\text{PL1})' \left\{ \begin{array}{l} [\min] F = \sum_{a \in A} \sigma(a) \\ \text{sous les contraintes :} \\ \mathcal{A} \underline{x} \geq \underline{b} \\ \underline{x} \geq 0 \end{array} \right.$$

(6) Pour un développement de ces aspects de la programmation linéaire, voir les ouvrages de Hillier-Lieberman (1967) ou Charnes-Cooper (1961).

$$(PL2) \left\{ \begin{array}{l} [\max] G = \underline{b}^+ \underline{y} \\ \text{sous les contraintes} \\ \underline{A}^+ \underline{y} \leq \underline{c} \\ \underline{y} \geq 0 \end{array} \right.$$

$\underline{y}$ le vecteur de variables duales est de dimension $\sum_{i=1}^n (\sigma_i - 1) + |A|$ et $\underline{c}$ vecteur (de la même dimension que $\underline{x}$) dont ses dernières composantes sont égales à 1 et les autres sont nulles.

3. APPLICATIONS ET UTILISATION DU PROGRAMME UTA

3.1 L'exemple du choix de la voiture

Nous reprenons l'exemple du choix d'une voiture par le père d'une famille (cf. B. Roy (1978)). Quatre modèles ont été proposés par les membres de la famille ($A = \{a_1, a_2, a_f, a_n\}$) et six critères ont été retenus pour la prise de la décision.

Modèle de voiture	Confort	Sécurité	Indice de coût kilométrique	Esthétique	Vitesse de pointe	Prix d'achat
a_1	Dans l'ensemble satisfaisant mais place légèrement insuffisante	Normale	0,39	Convenable	140 km/h	0,87 x
a_2	Particulièrement satisfaisant et spacieux	Normale	0,41	Elégant	145 km/h	0,95 x
a_f	Acceptable mais étroit	Normale	0,66	Très élégant	185 km/h	0,99 x
a_n	Particulièrement satisfaisant et spacieux	Supérieure à la normale	0,40	Elégant	145 km/h	1,12 x

Tableau 3 : Evaluation multicritère des 4 modèles de voitures (7)

Les échelles utilisées, accompagnées d'un codage ordinal, figurent au tableau 4.

(7) L'évaluation de a_n sur le critère "prix d'achat" et la valeur de B sont précisées pour l'utilisation que l'on fait ici de cet exemple.

Echelon N°	Confort	Sécurité	Indice km	Esthé- tique	Vitesse	Prix
1	Acceptable Etroit (c ₁)	Normale (s ₁)	0,66 (i ₁)	Convenable (e ₁)	140 km/h (v ₁)	1,12 x B (p ₁)
2	Satis- faisant Place insuff. (c ₂)	Supérieure (s ₂)	0,41 (i ₂)	Elégant (e ₂)	145 km/h (v ₂)	0,99 x B (p ₂)
3	Très satisf. Spacieux (c ₃)		0,40 (i ₃)	Très élégant (e ₃)	185 km/h (v ₃)	0,95 x B (p ₃)
4			0,39 (i ₄)			0,87 x B (p ₄)

Tableau 4 : Codage ordinal associé aux critères

Supposons que le père, compte tenu de son système de valeurs et des données, explicite sa préférence globale sous la forme de l'ordre total :

$$(16) \quad a_2 \text{ P } a_1 \text{ P } a_f \text{ P } a_n.$$

Nous allons chercher, en appliquant la méthode UTA, à construire une fonction d'utilité du père "expliquant" son classement (16). Nous fixons (à titre d'exemple) tous les seuils s_i à 0.01 et nous prenons :

$$(17) \quad \delta = \sum_{i=1}^6 s_i = 0.06$$

Pour les actions a_1 et a_2 nous aurons :

$$\begin{aligned} U[g(a_1)] &= u_1(c_2) + u_2(s_1) + u_3(i_4) + u_4(e_1) + u_5(v_1) + u_6(p_4) + \sigma(a_1) \\ U[g(a_2)] &= u_1(c_3) + u_2(s_1) + u_3(i_2) + u_4(e_2) + u_5(v_2) + u_6(p_3) + \sigma(a_2) \end{aligned}$$

d'où, suivant (PL1) et le préordre (16) :

$$a_2 P a_1 \iff U[g(a_2)] - U[g(a_1)] \geq \delta \text{ ou bien :}$$

$$\begin{aligned} & -u_1(c_2) + u_1(c_3) + u_3(i_2) - u_3(i_4) + u_4(e_2) + u_5(v_2) + u_6(p_3) \\ & \quad - u_6(p_4) + \sigma(a_2) - \sigma(a_1) \geq \delta \end{aligned}$$

De la même manière et suivant le tableau 2, nous aurons encore deux contraintes dues au classement (16), 13 contraintes de monotonie des utilités partielles et deux inégalités dues à l'équation de normalisation des poids. La figure 4 présente les matrices des programmes linéaires (PL1)' et (PL2) associés à ce problème.

$$\begin{array}{c} \underline{x}^t \\ \mathcal{K} = \end{array} \begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|c} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & u_5 & u_6 & \sigma & \\ \hline c_2 & c_3 & s_2 & i_2 & i_3 & i_4 & e_2 & e_3 & v_2 & v_3 & p_2 & p_3 & p_4 & a_2 & a_1 & a_f & a_n \end{array}$$

-1	1	0	1	0	-1	1	0	1	0	0	1	-1	1	-1	0	0
1	0	0	0	0	1	0	-1	0	-1	-1	0	1	0	1	-1	0
0	-1	-1	0	-1	0	-1	1	-1	1	1	0	0	0	0	1	-1
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	-1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	-1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	-1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	-1	1	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	1	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	1	0	0	0	0
0	1	1	0	0	1	0	1	0	1	0	0	1	0	0	0	0
0	-1	-1	0	0	-1	0	-1	0	-1	0	0	-1	0	0	0	0

$$\underline{b} = \begin{bmatrix} \delta \\ \delta \\ \delta \\ 0.01 \\ 0.01 \\ 0.01 \\ 0.01 \\ 0.01 \\ 0.01 \\ 0.01 \\ 0.01 \\ 0.01 \\ 0.01 \\ 0.01 \\ 0.01 \\ 0.01 \\ 0.01 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{c} = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1]$$

Figure 4 : Les matrices des programmes linéaires (PL1)' - (PL2)

Le programme UTA dont des sorties partielles relatives à ce problème sont constituées par les tableaux 5 et 6 contient environ 800 instructions

CRITERES	* POIDS	* CODE 1	CODE 2	CODE 3	CODE 4
1. CONF	* 0.24	* 0.0	0.010	0.243	
2. SECU	* 0.01	* 0.0	0.010		
3. INDI	* 0.03	* 0.0	0.010	0.020	0.030
4. ESTH	* 0.02	* 0.0	0.010	0.020	
5. VITE	* 0.32	* 0.0	0.010	0.323	
6. PRIX	* 0.37	* 0.0	0.010	0.200	0.373

Tableau 5 : Pondération - Utilités partielles (7)

PRED A	EXPL	PRED	ORDRE	DEFINI	PAR	L	UTILITE	
ACTION	RANG	ACTION	RANG	UTILITE	U	SIGMA		
A	2	1	A	2	1	0.473	0.0	
A	1	2	A	1	2	0.413	0.0	
A	F	3	A	F	3	0.353	0.0	
A	N	4	A	N	4	0.293	0.0	

Tableau 6 : Préordre à expliquer - Préordre défini par $U(g)$

FORTRAN IV ⁽⁸⁾ ; il exécute PL2 en utilisant des techniques de haute performance numérique en programmation linéaire, connues sous le nom de "méthodes LU" (cf. Bartels (1971), Tolla (1974)).

- (7) Solution donnée par UTA en 13 itérations ($s_i = 0.01$). Dans le cas où $s_i = 0$, $i = 1, 2, \dots, 6$, $\delta = 0.10$, cette solution n'a nécessité que 4 itérations.
- (8) UTA lit une préférence globale préordinaire et les évaluations multicritères au moyen du codage ordinal du tableau 4 ; à la sortie, il imprime les tableaux 5 et 6 et des éléments liés au pouvoir explicatif du modèle (Tau de Kendall, ...). Une copie du programme et la documentation sont disponibles au LAMSADE, Université Paris IX Dauphine, Place du Maréchal de Lattre de Tassigny, 75775 PARIS CEDEX 16

La fonction d'utilité $U(\underline{g})$ estimée sur cet exemple par le programme n'est pas unique du fait que $F^* = G^* = \sum_{a \in A} \sigma(a) = 0$ (tableau 6), ce qui signifie que l'"explication" de R est parfaite mais que tout autre point du polyèdre défini par les contraintes du programme linéaire donnerait lieu à d'autres utilités également acceptables (cas examiné en § 4.1). Cependant, dans des problèmes de grande taille, cet événement ne se produit pas souvent.

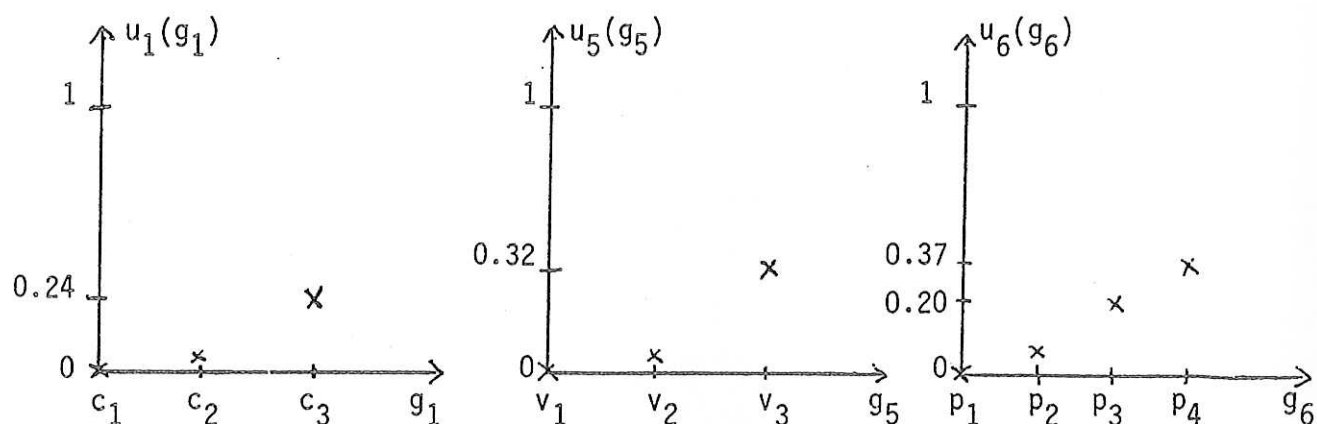


Figure 5 : Présentation graphique des utilités des critères :
confort, vitesse, prix

Examinons brièvement les résultats obtenus pour le problème de la voiture. Du fait que le classement dans R va en sens inverse par rapport aux préférences sur les critères sécurité, indice km, esthétique, toutes les utilités sur ces critères sont négligeables. Par contre, tout se passe comme si le père attachait de l'importance à la vitesse de 185 km/h (due à $a_f \succ a_n$) et à l'espace intérieur de la voiture (a_2 en tête de R). Enfin, il trouve que les voitures a_f et a_n sont très chères par rapport aux deux premières et que l'écart entre les prix des voitures a_2 et a_1 est important, ne pouvant être compensé par des

écarts inverses sur d'autres critères ⁽⁹⁾ (figure 5). La multiplicité des fonctions d'utilité explicatives de R est due principalement au fait que l'information n'est pas très riche ; nous pourrions par exemple demander l'opinion du décideur sur des "actions hypothétiques" (§ 2.1), (vecteurs g).

3.2 Les autres applications

3.2.1 Le concours PAN

Le modèle UTA a été appliqué dans l'analyse des préférences de sept membres du jury lors du session du concours PAN (Programme Architecture Nouvelle) organisé par le Plan Construction du Ministère de l'Equipement de France dans le cadre de sa politique d'amélioration de l'habitat social. Ce concours a pour objectif de favoriser l'innovation architecturale et de promouvoir la qualité dans l'habitat ainsi que de permettre à des jeunes équipes d'architectes de réaliser leurs premiers projets tout en s'assurant du réalisme des projets, des marchés potentiels notamment. Un jury réunissant des architectes, architectes enseignants, des maîtres d'ouvrages, des promoteurs, des représentants d'usagers, des membres de l'Administration est chargé de sélectionner quelques projets parmi les meilleurs.

Le processus suivi repose sur deux phases : pré-sélection au moyen des notes globales sur les projets (préférences globales préordinales) et sélection finale sur la base d'une évaluation multicritère des projets (cf. Michel (1974) ou de Montgolfier-Bertier (1978)). En juin 1973, sept critères ont été utilisés par le jury lors de la seconde phase de la sélection :

- 1) Innovation (bases théoriques, recherches bibliographiques, etc.).
- 2) Qualité (cellule, groupement, tissus, constructibilité, etc.).

(9) Cette expérience dans le choix de la voiture a été faite aussi sur des préférences d'autres personnes avec des résultats comparables.

- 3) Aptitude à passer en logement social (pénaliser les projets du secteur non aide).
- 4) Densité (pénaliser les projets à densité faible).
- 5) Importance du marché potentiel (favoriser un marché potentiel large).
- 6) Réalisme du projet (économique, technique, sociologique).
- 7) Adéquation de l'équipe au principe du concours (favoriser des travaux intellectuels antérieurs).

Nous présentons (tableau 7) certains des résultats donnés par la méthode.

Juge N°	Profes- sion	Nombre de con- traintes (PL2)	Nombre de va- riables (PL2)	Nombre d'ité- rations	F* ou G*	Nombre de σ non nuls	τ de Kendall	Critères à poids fort (> 0.10)
1	-	41	54	34	0.30	3 (*)	0.83	inno- vation densité adéqua- tion
3	archi- tecte ensei- gnant	40	53	22	0.10	1	0.95	adéqua- tion qualité
4	archi- tecte	43	58	49	0.10	1	0.93	inno- vation qualité densité
5	psychi- atre	44	58	42	0.20	2	0.91	inno- vation qualité
6	Maître d'ou- vrage	37	52	29	0.10	1	0.91	adéqua- tion inno- vation
8	promo- teur	47	60	35	0.00	0	1.00	marché réalisme
9	archi- tecte	42	57	52	0.30	4 (*)	0.85	qualité

Tableau 7 : Analyse des préférences du jury PAN
($|A| = 18$, $n = 7$, $s_i = 0$ pour tout i , $\delta = 0.10$)

(*) Un projet a été très mal noté par rapport au classement global ($\sigma = 0.15$).

La concordance entre la préférence globale R à "expliquer" et celle R' que l'on déduit de la fonction d'utilité est mesurée dans UTA à l'aide de la distance d_K de Kendall (cf. Bertier, Bouroche (1975)) et du tau de Kendall :

$$(18) \quad \tau = 1 - 2 \frac{d_K(R, R')}{d_K \max} = 1 - 4 \frac{d_K(R, R')}{|A| (|A| - 1)}$$

coefficient entre deux relations binaires totales R et R' compris entre -1 et $+1$.

On trouvera une analyse de ces données par d'autres méthodes dans Berges, Jacquet-Lagrèze (1977).

3.2.2 Autres possibilités d'utilisation

UTA peut être utilisé comme un modèle de saisie et de prédiction des préférences des administrateurs (Hopkins, Larréché, Massy (1975)), des directeurs de sociétés (Srinivasan, Shocker, Weinstein (1973)), des consommateurs (Pekelman, Sen (1974)), des usagers et de différents décideurs. Les fonctions d'utilité "explicatives" des préférences globales peuvent également servir de support à l'aide à la décision dans les divers domaines du "management" (cf. de Montgolfier, Bertier (1978), Roy (1978)). Plusieurs applications sont actuellement en cours, notamment dans le domaine de la gestion du personnel et des études d'impact sur l'environnement.

4. LES EXTENSIONS POSSIBLES DU MODELE

Dans ce paragraphe nous étudions des extensions possibles de ce type de méthode de construction de fonctions d'utilité additives. Nous proposons d'autres critères d'optimalité, une analyse de sensibilité pour mieux appréhender les diverses fonctions d'utilités admissibles ainsi que des extensions au cas où la variable à expliquer est nominale (analyse discriminante) et au cas où les variables explicatives (critères) sont continues.

4.1 Autres critères d'optimalité

Lorsque la préférence globale R est obtenue à l'aide de comparaisons par paires, le plus souvent, elles n'est pas transitive. Une extension du modèle est alors donnée par PL3.

$$(PL3) \left\{ \begin{array}{l} [\min] F = \lambda \sum_{(a,b) \in P} z_{ab} + \mu \sum_{(a,b) \in I} z_{ab} \\ \text{sous les contraintes :} \\ \sum_{i=1}^n \{u_i[g_i(a)] - u_i[g_i(b)]\} + z_{ab} \geq \delta \quad \text{si } a P b \\ \sum_{i=1}^n \{u_i[g_i(a)] - u_i[g_i(b)]\} + z_{ab} - z_{ba} = 0 \quad \text{si } a I b (\Rightarrow b I a) \\ u_i(g_i^{j+1}) - u_i(g_i^j) \geq s_i \quad \text{pour tout } i \text{ et } j \\ \sum_{i=1}^n u_i(g_i^*) = 1 \\ u_i(g_{i*}) = 0, u_i(g_i^j) \geq 0, z_{ab} \geq 0 \\ \text{pour tout } i, j \text{ et } (a, b) \in R \end{array} \right.$$

λ et μ étant des coefficients d'importance (ou de confiance) qu'on accorde aux jugements de préférence ou d'indifférence, par exemple :
 $\lambda = 1, \mu = \frac{1}{2}$ si tous les jugements ont la même importance.

Lorsque la préférence globale R est antisymétrique (sans jugements d'indifférence), un critère d'optimalité plus pertinent que ceux des programmes linéaires (PL1), (PL3) peut être envisagé : minimiser le nombre de paires de R qui sont violées dans le préordre défini par l'utilité $U(\underline{g})$, ce qui revient à maximiser le tau de Kendall $\tau(R, R')$ précédemment défini. La solution est donnée par la résolution d'un programme linéaire à variables mixtes dont les variables discrètes sont bivalentes 0 ou 1 :

$$(PL4) \left\{ \begin{array}{l} [\min] F = \sum_{(a,b) \in R} \gamma_{ab} \iff [\max] \tau(R, R') \\ \text{sous les contraintes :} \\ \sum_{i=1}^n \{u_i[g_i(a)] - u_i[g_i(b)]\} + M \cdot \gamma_{ab} \geq \delta \quad \forall (a, b) \in R \\ u_i(g_i^{j+1}) - u_i(g_i^j) \geq s_i \quad \text{pour tout } i \text{ et } j \\ \sum_{i=1}^n u_i(g_i^*) = 1 \\ u_i(g_{i*}) = 0, u_i(g_i^j) \geq 0 ; \text{ pour tout } i \text{ et } j \\ \gamma_{ab} = 0 \text{ ou } 1 \text{ pour tout } (a, b) \in R ; M : \text{ nombre positif suffisamment grand} \end{array} \right.$$

En effet, si la différence $U[\underline{g}(a)] - U[\underline{g}(b)]$ pour une paire $(a, b) \in R$ dépasse δ , $\gamma_{ab} = 0$ et le jugement est respecté ; autrement $\gamma_{ab} = 1$ et il y a violation du jugement initial. Donc F représente le nombre de paires de R violées dans les classements agrégés par $U(\underline{g})$.

En raison des difficultés techniques, (PL4) ne serait utilisable que pour des problèmes de faible dimension où $|R|$ n'est pas trop élevé.

4.2 Analyse de sensibilité

Jusqu'ici nous avons estimé une fonction d'utilité expliquant "au mieux" une relation de préférence R . Cependant, si l'optimum F^* de (PL1) ou G^* de (PL2) est nul, cela signifie que le polyèdre des solutions admissibles pour les $u_i(g_i)$ n'est pas vide et que plusieurs fonctions d'utilités permettent également une représentation parfaite de la relation R (cas du choix de la voiture).

Même lorsque l'optimum F^* de (PL1) n'est pas nul (cas du polyèdre vide), la discussion sur le critère d'optimalité abordée au § 4.1 montre que d'autres solutions moins bonnes pour F pourraient néanmoins améliorer le critère plus satisfaisant utilisé dans (PL4). L'expérience confirme que des fonctions d'utilités non optimales ($G < G^*$) permettent d'établir des préordres R' plus "proches" de R (au sens distances de Kendall ou de Spearman, indicateurs de concordance, etc.) que l'utilité nommée optimale.

Des phénomènes classiques en programmation mathématique tels que la dégénérescence primale ou duale et plus généralement l'abondance de solutions relatives à des vecteurs situés dans un polyèdre ($F^* = G^* = 0$), de même que des phénomènes de corrélation des variables en statistique ne sont pas pris en compte dans la recherche de l'optimum. Il est alors indispensable d'explorer des solutions autour de cet optimum (cf. Van de Panne (1975)). L'analyse post-optimale est formalisée de la façon suivante : soit $F^* = G^*$ la valeur optimale de la fonction-objectif du (PL2) et considérons un seuil $K(F^*) \geq 0$ réel positif assez petit dépendant de F^* . La K -optimalité consiste à explorer le polyèdre obtenu en rajoutant la contrainte (19) :

$$(19) \quad G \geq F^* - K \quad \text{ou encore}$$

$$(20) \quad \tilde{Y} = G - (F^* - K) \geq 0 \quad \text{où}$$

$\tilde{Y}$ est une nouvelle variable décroissante variant de K ($G = F^*$) à 0 ($G = F^* - K$).

On recherche alors les sommets caractéristiques du polyèdre :

$$(21) \begin{cases} A^t \underline{y} \leq \underline{c} \\ \underline{y} \geq 0, \underline{\tilde{y}} \geq 0 \end{cases}$$

qui est la région hachurée de la figure 6.

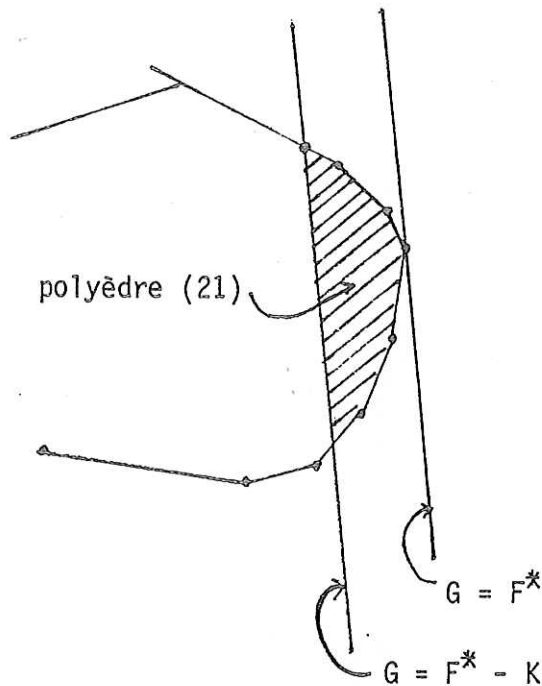


Figure 6 : Analyse post-optimale : exploration du polyèdre hachuré

Les algorithmes qui peuvent servir de moyen à cette analyse sont des méthodes arborescentes (méthodes du simplex inverse, cf. Van de Panne (1975)) ou des techniques liées à la notion du labyrinthe en théorie des graphes (méthode de Tarry, cf. Charnes-Cooper (1961), méthode de Manas-Nedoma (1968), etc.). Cette démarche consiste à étudier la sensibilité des valeurs (utilités) construites par une méthode du type UTA. Suite à cette analyse de sensibilité, nous pouvons associer aux $u_i(g_i)$ des intervalles ou des valeurs moyennes ou même, lorsque cela est possible, reconduire une analyse semblable avec d'avantage d'informations (accroître le nombre d'actions comparées et évaluées, que ces actions soient réelles ou hypothétiques, c'est-à-dire des vecteurs $\underline{g}$ par exemple).

4.3 Une méthode d'analyse discriminante

Si l'on cherche à estimer une fonction d'utilité à partir de l'observation de choix effectués (acceptation/rejet de dossiers par exemple) et non plus de préférences globales, la variable à expliquer n'est plus un préordre mais une variable nominale. A titre d'exemple, nous développons un modèle lorsque la variable nominale reçoit deux modalités (acceptation/rejet par exemple). Soient $U(\underline{g})$ la fonction d'utilité à estimer, U_0 un seuil d'acceptation/rejet à déterminer, A_1 l'ensemble des actions acceptées, A_2 l'ensemble des actions refusées ; le modèle serait sans erreur si l'on avait les conditions (22) :

$$(22) \begin{cases} a \in A_1 \Rightarrow U(\underline{g}(a)) \geq U_0 \\ a \in A_2 \Rightarrow U(\underline{g}(a)) < U_0 \end{cases}$$

En introduisant des variables d'erreur $\sigma(a)$, l'estimation de U_0 et de la fonction d'utilité $U(\underline{g})$ peut se faire en résolvant le programme linéaire (PL5) :

$$(PL5) \left\{ \begin{array}{l} [\min] F = \sum_{a \in A} \sigma(a) \\ \text{sous les contraintes} \\ \sum_{i=1}^n u_i [g_i(a)] - U_0 + \sigma(a) \geq 0 \text{ pour tout } a \in A_1 \\ \sum_{i=1}^n u_i [g_i(a)] - U_0 - \sigma(a) \leq 0 \text{ pour tout } a \in A_2 \\ u_i(g_i^{j+1}) - u_i(g_i^j) \geq s_i \text{ pour tout } i \text{ et } j \\ \sum_{i=1}^n u_i(g_i^*) = 1 \\ u_i(g_{i*}) = 0, u_i(g_i^j) \geq 0 \text{ pour tout } i \text{ et } j \\ U_0 \geq 0, \sigma(a) \geq 0 \text{ pour tout } a \in A \end{array} \right.$$

Le critère consiste à minimiser la somme des écarts au seuil U_0 pour les actions mal classées (cf. figure 7).

Il serait évidemment très facile dans un tel modèle de pénaliser différemment des actions mal classées de A_2 et de A_1 en utilisant un critère du type $F = \lambda \sum_{a \in A_1} \sigma(a) + \mu \sum_{a \in A_2} \sigma(a)$

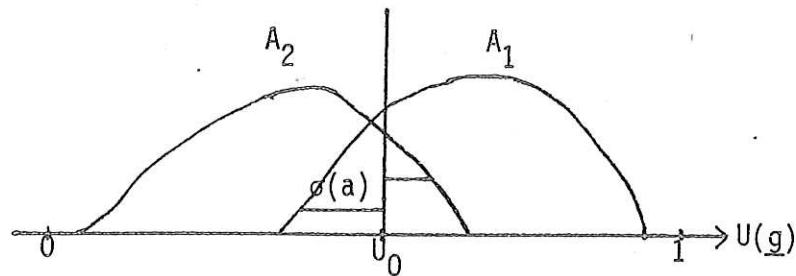


Figure 7 : Analyse discriminante : seuil U_0 et écarts $\sigma(a)$

4.4 Extension des modèles aux cas de variables (critères) continues

Lorsque l'échelle associée à un ou plusieurs critères est continue, ou comprend un nombre trop important d'échelons g_i^j pour pouvoir estimer avec les modèles précédents leurs utilités $u_i(g_i^j)$, il est possible d'estimer une fonction d'utilité composée de segments de droite.

On suppose que les valeurs extrêmes g_{i*}, g_i^* rencontrées sur chaque critère sont finies et on découpe l'intervalle $[g_{i*}, g_i^*]$ en $(\alpha_i - 1)$ intervalles égaux $[g_i^j, g_i^{j+1}]$. α_i est choisi par l'utilisateur qui précise ainsi le nombre de points estimés pour chaque utilité u_i . g_i^j est alors donné par la formule (23) :

$$(23) \quad g_i^j = g_{i*} + \frac{j-1}{\alpha_i-1} (g_i^* - g_{i*})$$

Les variables à estimer sont alors les $u_i(g_i^j)$ et l'utilité partielle d'une action a est estimée par interpolation linéaire :
 $g_i(a) \in [g_i^j, g_i^{j+1}]$, $u_i[g_i(a)]$ est donnée par (24) :

$$(24) \quad u_i[g_i(a)] = u_i(g_i^j) + \frac{g_i(a) - g_i^j}{g_i^{j+1} - g_i^j} [u_i(g_i^{j+1}) - u_i(g_i^j)]$$

Les calculs effectués selon (23) et (24) sont représentés sur la figure 8 :

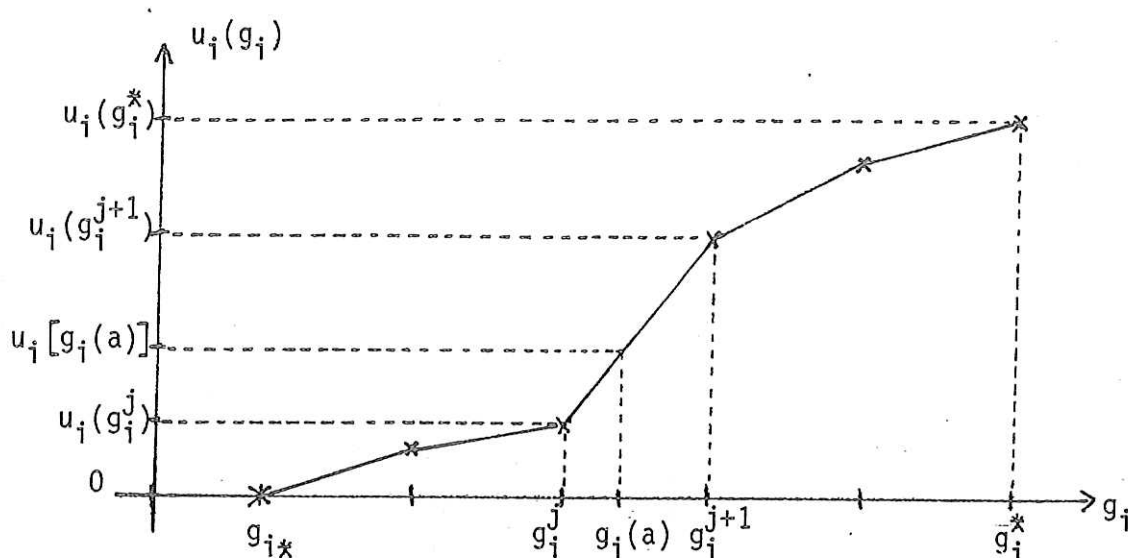


Figure 8 : Utilité partielle estimée par morceaux linéaires

Il suffit alors de remplacer $u_i[g_i(a)]$ donnée par (24) dans les programmes linéaires précédents (PL1) pour UTA, (PL5) pour l'analyse discriminante par exemple) pour estimer les α_i points introduits pour chaque critère. Simplement, la matrice $\mathcal{A}$ contiendra maintenant des valeurs réelles et non plus que des valeurs 0 ou 1, ses dimensions ne changeant pas (cf. tableau 2 pour UTA).

Cette méthode est particulièrement souple puisqu'on peut choisir le nombre de points à estimer. Si on fixe par exemple $\alpha_i = 2$, la fonction $u_i(g_i)$ est linéaire et la fonction d'utilité estimée serait une somme pondérée : $u_i(g_i) = p_i g_i$ avec $p_i = u_i(g_i^*) / (g_i^* - g_{i*})$ (cf. (24)).

REFERENCES

BARTELS R.H. (1971) : A Stabilization of the Simplex Method, Numerische Mathematik 16, 414-434.

BERGES J.C., JACQUET-LAGREZE E. (1977) : Analyse des préférences du jury "Programme Architecture Nouvelle", Colloques IRIA, Analyse des données et Informatique, Vol. 1, 51-61.

BERTIER P., BOUROCHE J.M. (1975) : Analyse des données multidimensionnelles, P.U.F., Paris.

CHARNES A., COOPER W. (1961) : Management models and industrial applications of linear programming, John Wiley and Sons, Vol. 1.

DE MONTGOLFIER J., BERTIER P. (1978) : Approche multicritère des problèmes de décision, Editions Hommes et Techniques, Collection AFCET.

ECKENRODE R. (1965) : Weighting multiple criteria, Management Science, Vol. 12, 180-192.

FISHBURN P. (1965) : Independence in Utility Theory with whole Product Sets, Operations Research, Vol. 13, 28-45.

FISHBURN P. (1966) : A note on recent developments in additive utility theories for multiple-factor situations, Operations Research, Vol. 14, 1143-1148

FISHBURN P. (1967) : Methods of estimating additive utilities, Management Science, Vol. 13, n° 7, 435-453.

HILLIER F.S., LIEBERMAN G.J. (1967) : Introduction to Operations Research, Holden-Day, Inc., Part III et Part V.

HOPKINS D.S.P., LARRECHE J.C., MASSY W.F. (1975) : Multiattribute preference functions of university administrators ; dans Zeleny M. : Multiple criteria decision making, Kyoto, Springer-Verlag, 287-289.

KEENEY R.L., RAIFFA H. (1976) : Decisions with multiple objectives : preferences and value tradeoffs, John Wiley and Sons, Inc.

MANAS M., NEDOMA J. (1968) : Finding all vertices of a convex polyedron, Numerische Mathematik 12, 226-229.

MICHEL J. (1974) : La sélection des projets du Programme Architecture Nouvelle, Séminaire AFCET : Aide à la décision, 111-121.

PEKELMAN D., SEN S. (1974) : Mathematical programming models for the determination of attribute weights, Management Science, Vol. 20, n° 8, 1217-1229.

ROY B. (1971) : Problems and methods with multiple objective functions, Mathematical Programming, Vol. 1, n° 2 ; version française : Décisions avec critères multiples : problèmes et méthodes, Revue METRA, Vol. XI, n° 1, 121-151, 1972.

ROY B. (1975) : Vers une méthodologie générale d'aide à la décision, Revue METRA, Vol. XIV, n° 3, 459-497.

ROY B. (1978) : L'aide à la décision - Critères multiples et optimisation pour choisir, trier, ranger, livre en préparation.

SAPORTA G. (1977) : Une méthode et un programme d'analyse discriminante pas à pas sur variables qualitatives, Colloques IRIA : Analyse des données et Informatique, Vol. 1, 201-210.

SRINIVASAN V., SHOCKER A.D. (1973) : Estimating the weights for multiple attributes in a composite criterion using pairwise judgments, Psychometrika, Vol. 38, n° 4, 473-493.

SRINIVASAN V., SHOCKER A.D., WEINSTEIN A.G. (1973) : Measurement of a composite criterion of managerial success, Organizational Behavior and Human Performance, 9, 147-167.

TOLLA P. (1974) : Méthodes de triangularisation et programmes d'ordinateur assurant l'amélioration de la précision des résultats en programmation linéaire, Thèse de 3e cycle, Institut de Programmation 74.11, PARIS VI.

VAN DE PANNE (1975) : Methods for linear and quadratic programming, North-Holland Publishing Company, Amsterdam, pp. 202-231.

WAGNER H.M. (1959) : Linear programming techniques for regression analysis, Journal of the American Statistical Association, 54, 206-212.

YOUNG F.W., DE LEEUW J., TAKANE Y. (1975) : Multiple and canonical regression with a mix of qualitative and quantitative variables : an alternating least square method with optimal scaling features, Psychometric Laboratory, Report n° 146, University of North Carolina.

