

CAHIER DU LAMSADE

Laboratoire d'Analyse et Modélisation de Systèmes pour l'Aide à la Décision
(Université Paris-Dauphine)
Unité de Recherche Associée au CNRS ESA 7024

OPTIMISATION LEXICOGRAPHIQUE D'UNE SÉQUENCE DE DYSFONCTIONNEMENTS NON NÉCESSAIREMENT QUANTITATIFS

CAHIER N° 169
mai 2000

Bernard ROY ¹

reçu : novembre 1998.

¹ LAMSADE, Université Paris-Dauphine, Place du Maréchal De Lattre de Tassigny, 75775 Paris Cedex 16, France (roy@lamsade.dauphine.fr).

TABLE DES MATIÈRES

	<u>Pages</u>
Remerciements	i
Abstract	iii
Résumé	iii
1. Le problème	1
2. La solution	2
3. Démonstration directe	3
4. Démonstration indirecte	7
5. Applications	11
5.1 Minimisation d'erreurs d'arrondi	11
5.2 Optimisation de niveaux de satisfaction	13
Bibliographie	14

REMERCIEMENTS

L'auteur tient à remercier José Figueira et Vangelis Paschos qui ont bien voulu relire une première version de ce travail et vérifier les démonstrations. La présentation de ces dernières a pu être améliorée grâce à leurs suggestions.

L'auteur remercie également Alexis Tsoukiàs qui lui a suggéré d'examiner les liens qui existent entre le problème traité et le problème du sac à dos. Il a apprécié les échanges qu'il a eus avec Daniel Vanderpooten au sujet de ces liens et il lui sait gré du temps qu'il a bien voulu lui consacrer.

L'auteur est enfin très reconnaissant envers Dominique François qui a assuré la frappe et les corrections successives de ce texte avec énormément de soin et de vigilance.

*"Si l'ordre apparaît quelque part dans la qualité, pourquoi
chercherions-nous à passer par l'intermédiaire du nombre ?"*

Bachelard, 1987

LEXICOGRAPHICAL OPTIMIZATION OF A SEQUENCE OF DYSFUNCTIONS NOT NECESSARILY QUANTITATIVE

Abstract

The adjustment of an optimal procedure of rounding off to which we have been confronted (see Roy, Figueira, 1998) being recognized less simple than we have thought *a priori*, we have been led to study a more general combinatorial problem. It is stated in Section 1. A characterization of the solutions of this problem is given in Section 2. Section 3 is devoted to the proof of this result. In section 4, the problem is reformulated in a type knapsack problem form, which by means of an appropriate encoding, leads us to present another proof and some remarks. The paper ends by two concrete examples of the problem considered.

OPTIMISATION LEXICOGRAPHIQUE D'UNE SÉQUENCE DE DYSFONCTIONNEMENTS NON NÉCESSAIREMENT QUANTITATIFS

Résumé

La mise au point d'une procédure optimale d'arrondi à laquelle nous avons été confrontés (cf. Roy, Figueira, 1998) s'étant avérée moins simple qu'on ne l'avait pensé *a priori*, nous avons été conduits à étudier un problème combinatoire plus général. Celui-ci est énoncé en section 1. Une caractérisation des solutions de ce problème est donnée en section 2. La section suivante est consacrée à la justification de ce résultat. Dans une quatrième section, nous reformulons le problème sous forme d'un problème de type sac à dos ce qui, par le biais d'un codage approprié, nous amène à présenter une autre démonstration et quelques remarques. L'article se termine par deux illustrations concrètes du problème traité.

1. LE PROBLÈME

A l'occasion d'un travail effectué avec José Figueira (cf. Roy, Figueira, 1998) ayant trait à la pondération des critères dans les méthodes de type ELECTRE, nous avons été confrontés à un problème d'arrondis (cf. 5.1). Avec le critère d'optimisation lexicographique qu'il nous a paru pertinent d'adopter pour effectuer ces arrondis, la détermination d'une solution s'est avérée moins simple qu'on ne l'avait pensé a priori. Cela nous a conduits à étudier le problème combinatoire plus général exposé ci-après.

Soit $x_i, i \in F = \{1, \dots, n\}$ une famille de variables booléennes dont il faut décider de la valeur. Un nombre imposé $v \leq n$ doit prendre la valeur 1, les autres $n - v$ autres la valeur 0. Pour apprécier la qualité de cette décision, on fait intervenir un ensemble ordonné D appelé échelle de dysfonctionnement. Les éléments de D sont des échelons qui peuvent être caractérisés soit par un nombre (lequel n'a pas nécessairement une signification quantitative), soit par un énoncé verbal. Ces échelons sont destinés à repérer un niveau de gêne, d'insatisfaction ou bien encore un coût traduisant un dysfonctionnement plus ou moins grand découlant de la décision. On suppose que :

- décider $x_i = 1$ entraîne un dysfonctionnement $d_i \in D$;
- décider $x_i = 0$ entraîne un dysfonctionnement $\bar{d}_i \in D$.

On notera $<$ l'ordre associé à D . Seul le fait que d_i soit préféré à d_j lorsque $d_i < d_j$ importe dans ce qui suit. Faisons observer que parler de dysfonctionnement n'interdit nullement que les échelons les plus bas de l'échelle D (voire tous les échelons de cette échelle) traduisent des niveaux de satisfaction ou de gain (cf. 5.2, figure 1).

Il s'agit donc de décider au mieux, dans un sens que nous allons maintenant préciser, de la valeur qui doit être attribuée à chacune des variables x_i . Posons :

$$x_i = 1 \Leftrightarrow i \in F^+, x_i = 0 \Leftrightarrow i \in F^-.$$

Les décisions auxquelles on s'intéresse sont représentées par l'ensemble A des bipartitions (F^+, F^-) de F vérifiant $\text{card}(F^+) = v$. Les n dysfonctionnements $e^k \in D$ qu'entraîne une quelconque bipartition de A peuvent être rangés selon une séquence non croissante :

$$s(F^+, F^-) = e^1, \dots, e^k, e^{k+1}, \dots, e^n \text{ avec } e^k \geq e^{k+1}.$$

e^k est égal à d_i ou à $\bar{d}_i$ selon que la variable x_i qui lui a donné naissance vaut 1 ou 0. La séquence s comporte donc, pour chaque $i \in F$, soit l'échelon d_i , soit l'échelon $\bar{d}_i$.

On cherche à caractériser toutes celles des bipartitions de A qui optimisent, selon un principe lexicographique, la séquence $s(F^+, F^-)$. De façon plus précise, la bipartition (F^+, F^-) est **préférée** à une autre bipartition (F'^+, F'^-) engendrant la séquence $e'^1, \dots, e'^n$ si et seulement si :

$$e^k < e'^k, k \text{ étant le premier rang tel que } e^k \neq e'^k.$$

Si les séquences $s(F^+, F^-)$ et $s(F'^+, F'^-)$ sont identiques, il y a **indifférence** entre les deux partitions. Les deux relations ainsi définies de préférence (que nous noterons $\succ$) et d'indifférence (que nous noterons I) sont toutes deux transitives. Elles sont en outre mutuellement exclusives et complémentaires. Elles définissent par conséquent un préordre complet sur A . C'est donc la classe de tête de ce préordre qu'il s'agit de caractériser. Relativement au critère lexicographique qui a été pris en considération, cette classe renferme toutes les décisions optimales et elles seulement.

La solution complète de ce problème est présentée dans la section suivante. Une preuve directe des résultats ainsi énoncés est donnée en section 3. La section 4 apporte une autre preuve fondée sur une reformulation du problème et un codage numérique approprié de l'échelle D ; elle s'achève par quelques remarques. La dernière section, enfin, traite brièvement de deux applications.

2. LA SOLUTION

Théorème : Une bipartition de A est optimale si et seulement si elle peut être obtenue comme le préconise la procédure P définie ci-après.

Procédure P

i) Définir les ensembles M et $\overline{M}$ comme suit :

$$M = \{i \in F \mid d_i \geq \overline{d}_i\}.$$

$$\overline{M} = F \setminus M.$$

$$m = \text{card } M.$$

ii) Ordonner les éléments de $\overline{M}$ par valeur non croissante des $\overline{d}_i$. Si $\overline{d}_i = \overline{d}_j$, alors placer i avant j lorsque $d_i < d_j$, l'ordre pouvant être librement choisi lorsque $d_i = d_j$.

iii) Ordonner les éléments de M en plaçant en tête, dans un ordre qui peut être librement choisi, ceux pour lesquels $d_i = \overline{d}_i$, puis les autres par valeur non décroissante des d_i . Si $d_i = d_j$, placer i avant j lorsque $\overline{d}_i > \overline{d}_j$, l'ordre pouvant être librement choisi lorsque $\overline{d}_i = \overline{d}_j$.

iv) Ordonner enfin les éléments de F en plaçant tout d'abord (conformément aux rangements définis ci-dessus) les $n - m$ éléments de $\overline{M}$ puis les m éléments de M .

v) Former F^+ avec les v premiers éléments de F ainsi ordonnés.

Les préconisations de P peuvent être reformulées en distinguant deux cas :

a) *Premier cas : $m \leq n - v$*

Former F^+ avec les v premiers éléments de $\overline{M}$. Il est donc inutile dans ce cas d'ordonner M .

b) *Deuxième cas : $m > n - v$*

Former F^- avec les $n - v$ derniers éléments de M . Il est donc inutile dans ce cas d'ordonner $\overline{M}$.

3. DÉMONSTRATION DIRECTE

Lemme 1 : *Si (F^+, F^-) et (F'^+, F'^-) sont deux partitions distinctes obtenues par application de la procédure P , alors $(F^+, F^-) \neq (F'^+, F'^-)$.*

Preuve : Dès l'instant où l'on a rangé les éléments de M et ceux de $\overline{M}$, la procédure P aboutit à une solution unique. L'obtention de deux solutions distinctes ne peut donc provenir que des cas d'indétermination dans la définition de ces deux rangements. Ces cas d'indétermination sont sans effet lorsque $m = n - v$. Sous cette condition, la procédure P conduit obligatoirement à l'unique bipartition $(\overline{M}, M)$. Seuls les deux cas suivants méritent donc d'être examinés.

1°) $m < n - v$: l'obtention de deux solutions distinctes ne peut provenir que de deux rangements distincts des éléments de $\overline{M}$. Soit H le sous-ensemble des éléments de F^+ qui se retrouvent dans F'^- et H' le sous-ensemble des éléments de F'^+ qui se retrouvent dans F^- . F^+ étant formé des v premiers éléments du premier rangement de $\overline{M}$, les éléments de H figurent parmi eux alors que ceux de H' ne s'y trouvent pas. A l'inverse, ce sont les éléments de H' qui figurent parmi les v premiers éléments de $\overline{M}$ dans le second rangement alors que ceux de H ne s'y trouvent pas. Seuls des éléments vérifiant à la fois $d_i = d_j$ et $\overline{d}_i = \overline{d}_j$ peuvent occuper des places différentes dans les deux rangements. Soit k le $v^{\text{ème}}$ élément de $\overline{M}$ dans le premier rangement.

On a nécessairement :

$$\forall i \in H \text{ et } \forall j \in H', d_i = d_j = d_k \text{ et } \overline{d}_i = \overline{d}_j = \overline{d}_k.$$

Posons $h = \text{card}(H)$. On a nécessairement $\text{card}(H') = h$. Il s'ensuit que, dans $s(F^+, F^-)$, H est responsable de la présence de h occurrences de l'échelon d_k alors que H' est responsable de h occurrences de l'échelon $\overline{d}_k$. Dans $s(F'^+, F'^-)$, c'est H' qui est responsable de la présence de h échelons d_k et H qui l'est de celle de h échelons $\overline{d}_k$.

Par conséquent, $s(F^+, F^-) \neq s(F'^+, F'^-)$.

2°) $m > n - v$: deux sous-cas doivent être examinés.

i) Les $n - v$ derniers éléments de M vérifient $d_i \neq d_j$: l'obtention de deux solutions distinctes ne peut provenir, dans ce premier sous-cas, que de deux rangements

différents en cela qu'ils permutent (comme dans le premier cas ci-dessus) deux sous-familles H et H' de h éléments vérifiant :

$$\forall i \in H \text{ et } \forall j \in H', d_i = d_j = d_k \text{ et } \bar{d}_i = \bar{d}_j = \bar{d}_k,$$

k étant ici l'élément placé au rang $n - v$ avant la fin dans le premier rangement de M . La preuve de l'indifférence est, dans ces conditions, identique à celle du premier cas.

- ii) L'élément k placé au rang $n - v$ avant la fin dans l'un des deux rangements de M vérifie $d_k = \bar{d}_k$: l'obtention de deux solutions distinctes ne peut provenir, dans ce dernier sous-cas, que de rangements différents portant sur le sous-ensemble $M^\#$ de M formé des éléments vérifiant $d_i = \bar{d}_i$. Soit i un élément quelconque de $M^\#$ qui se trouve dans F^- mais se retrouve dans F'^+ . Il est nécessairement remplacé dans F'^- par un élément j de $M^\#$ qui se trouve dans F^+ . Le couple d'échelons $(\bar{d}_i, d_j)$ qui figure dans $s(F^+, F^-)$ peut donc être remplacé, dans $s(F'^+, F'^-)$, par le couple $(d_i, \bar{d}_j)$. Ces deux couples étant identiques, les deux séquences le sont aussi.

Définition : Etant donné une bipartition $(F^+, F^-) \in A$, l'échange de deux éléments $i \in F^+$ et $j \in F^-$ est dit **améliorant** si et seulement si la bipartition de A (F'^+, F'^-) déduite de la précédente en remplaçant i par j dans F^+ et j par i dans F^- vérifie $s(F'^+, F'^-) \succ s(F^+, F^-)$.

Dans $s(F^+, F^-)$, i et j sont présents respectivement par les échelons d_i et $\bar{d}_j$, alors que, dans $s(F'^+, F'^-)$, ils le sont par les échelons $\bar{d}_i$ et d_j (les $n - 2$ autres termes de ces deux séquences demeurent identiques). Il s'ensuit que l'échange est améliorant si et seulement si :

$$\left. \begin{array}{l} - \text{soit } \max(\bar{d}_i, d_j) < \max(d_i, \bar{d}_j) ; \\ - \text{soit } \max(\bar{d}_i, d_j) = \max(d_i, \bar{d}_j) \text{ et } \min(\bar{d}_i, d_j) < \min(d_i, \bar{d}_j). \end{array} \right\} \quad (3.1)$$

Lemme 2 : L'échange de i et j est améliorant dans les cas suivants :

1er cas : $j \in \bar{M}$ et $i \in M$.

2e cas : $j \in \bar{M}$, $i \in \bar{M}$:

- soit $\bar{d}_i < \bar{d}_j$;
- soit $(\bar{d}_i = \bar{d}_j \text{ et } d_i > d_j)$.

3e cas : $j \in M$, $i \in M$, $d_i \neq \bar{d}_i$:

- soit $d_i > d_j$;
- soit $d_j = \bar{d}_j$;
- soit $(d_i = d_j \text{ et } \bar{d}_j > \bar{d}_i)$.

Preuve : Rappelons que :

$$j \in \overline{M} \Leftrightarrow d_j < \overline{d}_j \text{ et } i \in M \Leftrightarrow \overline{d}_i \leq d_i.$$

Considérons maintenant chacun des trois cas successivement.

1°) Dans le premier cas, il vient : $\max(\overline{d}_i, d_j) < \overline{d}_j \leq \max(d_i, \overline{d}_j)$. La condition (3.1) est donc vérifiée.

2°) Dans le second cas :

- lorsque $\overline{d}_i < \overline{d}_j$, étant donné que $j \in \overline{M}$, la condition (3.1) est encore vérifiée ;
- lorsque $\overline{d}_i = \overline{d}_j$ et $d_i > d_j$, puisque $i \in \overline{M}$ et $j \in \overline{M}$, il vient :

$$\max(\overline{d}_i, d_j) = \overline{d}_i \text{ et } \max(d_i, \overline{d}_j) = \overline{d}_j$$
et $\min(\overline{d}_i, d_j) = d_j < d_i = \min(d_i, \overline{d}_j)$, ce qui établit à nouveau la condition (3.1).

3°) Dans le troisième cas :

- Lorsque $d_i > d_j$, étant donné que $d_j \geq \overline{d}_j$, il vient :

$$\max(d_i, \overline{d}_j) = d_i > \max(\overline{d}_i, d_j).$$

La condition (3.1) est donc vérifiée. On a encore la même inégalité stricte lorsque $d_j = \overline{d}_j$ et $d_i > d_j$.

- Lorsque $d_i \leq d_j = \overline{d}_j$, on a :

$$\max(d_i, \overline{d}_j) = \overline{d}_j = d_j = \max(\overline{d}_i, d_j)$$

mais $\min(d_i, \overline{d}_j) = d_i$ et $\min(\overline{d}_i, d_j) = \overline{d}_i < d_i$ (la condition (3.1) est donc vérifiée).

- Lorsque (et ceci est la dernière possibilité couverte par ce troisième cas) $d_i = d_j > \overline{d}_j > \overline{d}_i$:

$$\max(\overline{d}_i, d_j) = d_j = d_i = \max(d_i, \overline{d}_j)$$

et $\min(\overline{d}_i, d_j) = \overline{d}_i < \overline{d}_j = \min(d_i, \overline{d}_j)$ (la condition (3.1) est donc encore satisfaite).

Lemme 3 : Toute bipartition qui ne peut être obtenue par la procédure P admet un échange améliorant.

Preuve

- a) $m \leq n - v$. Soit (F^+, F^-) une bipartition non conforme à la préconisation $a \in P$. Il en est tout d'abord ainsi dès l'instant où, parmi les v éléments de F^+ , certains appartiennent à M . Soit i un tel élément. S'il existe, dans F^- , un élément $j \in \overline{M}$, son échange avec i est améliorant (premier cas du lemme 2). Un tel élément j existe nécessairement car F^- ne peut contenir que des éléments de M puisque $n - v - (m - 1) > 0$.

Considérons maintenant le cas $F^+ \subseteq \bar{M}$. Si $m = n - v$, (F^+, F^-) est conforme à P (ce qui est contraire à l'hypothèse. Il s'ensuit que seul le cas $F^+ \subset \bar{M}$ reste à examiner. Dans ce cas, $F^- \cap \bar{M} \neq \emptyset$. Posons :

$$\min\{\bar{d}_i / i \in F^+\} = \bar{d}_* \text{ et } \max\{\bar{d}_j / j \in F^- \cap \bar{M}\} = \bar{d}^*.$$

Si $\bar{d}_* > \bar{d}^*$, il existe un rangement de $\bar{M}$ dans lequel les v premiers éléments sont précisément ceux de F^+ . Or ceci est contraire à l'hypothèse. Par conséquent, $\bar{d}_* \leq \bar{d}^*$. Soit i l'un des éléments (ou l'unique élément) de F^+ vérifiant $\bar{d}_i = \bar{d}_*$ et j l'un des éléments (ou l'unique élément) de $F^- \cap \bar{M}$ vérifiant $\bar{d}_j = \bar{d}^*$. Les éléments i et j ainsi définis forment un échange améliorant si $\bar{d}_* \leq \bar{d}^*$ (second cas du lemme 2). Il reste donc à examiner le cas $\bar{d}_* = \bar{d}^*$.

Dans ce dernier cas, on a : $\bar{d}_i = \bar{d}_j$, $d_i < \bar{d}_i$ et $d_j < \bar{d}_j$. Si $d_i < d_j$, les v éléments de F^+ ne sont autres que les v premiers éléments de $\bar{M}$; cette éventualité est donc contraire à l'hypothèse. Si $d_i = d_j$, il existe un rangement de $\bar{M}$ dans lequel les v premiers éléments sont précisément ceux de F^+ , ce qui est encore contraire à l'hypothèse. Enfin, si $d_i > d_j$, l'échange de i et j est améliorant (second cas du lemme 2).

- b) $m > n - v$. Soit (F^+, F^-) une bipartition non conforme à la préconisation $b \in P$. Il en est tout d'abord ainsi dès l'instant où, parmi les $n - v \in F^-$, certains appartiennent à $\bar{M}$. Soit j un tel élément. S'il existe dans F^+ un élément $i \in M$, son échange avec j est améliorant (premier cas du lemme 2). Un tel élément i existe nécessairement car $F^+ \cap M \neq \emptyset$ puisque $\text{card}(F^+) = v > n - m = \text{card}(\bar{M})$. On a par conséquent $F^- \subset M$. Posons :

$$M' = \{i / d_i > \bar{d}_j\}, \text{ card}(M') = m'.$$

Deux sous-cas sont à considérer :

- 1°) $m' \geq n - v$. S'il existe $j \in F^-$ tel que $d_j = \bar{d}_j$, alors $F^+ \cap M' \neq \emptyset$. Soit i un élément de $F^+ \cap M'$. Son échange avec j est améliorant (troisième cas du lemme 2). On a nécessairement $m' \neq n - v$ car, dans le cas contraire, la bipartition considérée serait conforme à P . Il reste donc à examiner le cas $F^- \subset M'$. Posons :

$$\min\{d_j / j \in F^-\} = d_* \text{ et } \max\{d_i / i \in F^+\} = d^*.$$

Si $d_* > d^*$, les $n - v$ éléments de F^- ne sont autres que les $n - v$ derniers éléments de M , ce qui est contraire à l'hypothèse. Par conséquent, $d_* \leq d^*$. Soit i l'un des éléments (ou l'unique élément) de F^+ vérifiant $d_i = d^*$ et j l'un des derniers éléments (ou l'unique élément) de F^- vérifiant $d_j = d_*$: i et j forment un échange améliorant si $d_* < d^*$ (troisième cas du lemme 2). Il reste à examiner le cas $d_* = d^*$.

Dans ce dernier cas, on a $d_i = d_j$, $d_i > \bar{d}_i$ et $d_j > \bar{d}_j$. Si $\bar{d}_i > \bar{d}_j$, les $n - v$ éléments de F^- ne sont autres que les $n - v$ derniers éléments de M , ce qui est contraire à l'hypothèse. Si $\bar{d}_i = \bar{d}_j$, il existe un rangement de M dans lequel les $n - v$ derniers éléments sont précisément ceux de F^- , ce qui est encore contraire à

l'hypothèse. Enfin, si $\bar{d}_j > \bar{d}_p$, l'échange de i et j est améliorant (troisième cas du lemme 2).

2°) $m' > n - v$. Comme précédemment, notons $M^- = \{j / d_j = \bar{d}\}$. On a nécessairement $F^- \cap M \neq \emptyset$. S'il existe $i \in F^+ \cap M'$, son échange avec l'un quelconque des $j \in F^- \cap M^-$ est améliorant. Il reste le cas $M' \subset F^-$. En plus des éléments de M' , F^- ne contient que des éléments de M^- . Il peut donc être obtenu par la procédure P , ce qui est contraire à l'hypothèse.

Il découle du lemme 3 que seules les bipartitions obtenues par application de la procédure P peuvent être optimales. Or, d'après le lemme 1, toutes les bipartitions ainsi obtenues sont indifférentes. La procédure P permet donc de construire toutes les solutions optimales et elles seules.

4. DÉMONSTRATION INDIRECTE

Le problème posé section 1 peut être reformulé comme suit. Soit B un ensemble de n objets : $B = \{b_i / i \in F\}$. Parmi ces objets, il faut en sélectionner v exactement afin de les placer dans un "sac à dos". Le fait de placer l'objet b_i dans le sac occasionne une pénalité $d_i \in D$ alors que le fait de ne pas l'y mettre occasionne une pénalité $\bar{d}_i \in D$, l'échelle D pouvant être seulement qualitative (les échelons constitutifs étant par exemple définis de façon seulement verbale). La procédure P définie section 2 caractérise toutes les compositions du sac qui optimisent le critère lexicographique défini en section 1.

Considérons le codage de l'échelle D obtenu en affectant, à chacun de ses échelons e un coût $c(e)$ défini comme suit :

$$c(e_1) = n^0, \dots, c(e_k) = n^{k-1}, \dots, c(e_\delta) = n^{\delta-1} \quad (4.1)$$

(δ désignant le nombre des échelons de D). Considérons enfin le programme linéaire en variables bivalentes :

$$\begin{aligned} \text{minimiser } c(X) &= \sum_{i=1}^n c(d_i) x_i + c(\bar{d}_i) (1 - x_i) \\ \text{s.c. } \sum_{i=1}^n x_i &= v \\ x_i &\in \{0, 1\} \quad (i = 1, \dots, n) \end{aligned} \quad (4.2)$$

Lemme 4 : Avec le codage (4.1), toute solution optimale $X^* = (x_1^*, \dots, x_n^*)$ du programme (4.2) est solution du problème posé en section 1 et vice versa.

Preuve : Quel que soit le vecteur binaire $X = (x_1, \dots, x_n)$ vérifiant $\sum_{i=1}^n x_i = v$, $c(X)$ est

la somme de n termes qui sont tous de la forme n^j avec $j \in \{0, \dots, \delta - 1\}$. Ces n termes peuvent être ordonnés du plus grand jusqu'au plus petit et notés $y_1, \dots, y_h, \dots, y_n$ avec $y_h \geq y_{h+1}, \forall h \in \{1, \dots, n-1\}$. Montrons que le préordre complet défini par $c(X)$ sur l'ensemble des vecteurs binaires admissibles, c'est-à-dire vérifiant l'unique contrainte du programme (4.2), coïncide exactement avec le préordre complet introduit section 1.

Considérons pour cela deux vecteurs admissibles X et X' avec :

$$c(X) = \sum_{h=1}^n y_h \text{ et } c(X') = \sum_{h=1}^n y'_h.$$

Soit k la plus petite valeur de l'indice h telle que $y_h \neq y'_h$. Il s'agit de montrer que:

$$y_k < y'_k \Leftrightarrow c(X) < c(X'). \quad (4.3)$$

Posons : $y_k = n^q$ pour tout $j > k$, $y_j \leq n^q$, d'où :

$$y_k + y_{k+1} + \dots + y_n \leq (n - k + 1) n^q = n^{q+1} - (k - 1) n^q.$$

Si $y_k < y'_k$, alors $y'_k \geq n^{q+1}$, d'où :

$$y'_k + y'_{k+1} + \dots + y'_n \geq n^{q+1} + n - k > n^{q+1} - (k - 1) n^q,$$

d'où :

$$y_k + y_{k+1} + \dots + y_n < y'_k + y'_{k+1} + \dots + y'_n,$$

ce qui, compte tenu des égalités $y_1 = y'_1, \dots, y_{k-1} = y'_{k-1}$ établit l'implication (4.3) dans le sens gauche vers droite. L'implication inverse équivaut à prouver que :

$$y'_k < y_k \Rightarrow c(X) > c(X').$$

Le même type de raisonnement permet d'établir cette implication.

Lemme 5 : Le vecteur binaire $(x_1, \dots, x_n)$ vérifiant $\sum_{i=1}^n x_i = v$ est solution optimale

du programme (4.2) si et seulement si il peut être obtenu comme le préconise la procédure P' définie ci-après.

Procédure P'

- i) $\forall i \in F$, calculer : $c(i) = c(d_i) - c(\bar{d}_i)$.
- ii) Ordonner les éléments de F conformément aux valeurs $c(i)$ croissantes, la position relative de i et j lorsque $c(i) = c(j)$ pouvant être librement choisie.

- iii) Déterminer l'ensemble F^+ des v premiers éléments de F ainsi ordonnés ; poser $x_i = 1$ si $i \in F^+$ et $x_i = 0$ si $i \notin F^+$.

Preuve

- a) Considérons l'un quelconque des ordres complets que P' préconise de définir sur F . Notons respectivement j et k les éléments qui occupent les rangs v et $v + 1$. Si $c(j) < c(k)$, la solution à laquelle conduit P' ne dépend pas de l'ordre considéré. Si $c(j) = c(k)$, des solutions différentes peuvent être obtenues en ordonnant autrement les éléments de F qui vérifient $c(i) = c(j)$. Notons $I(j)$ l'ensemble de ces éléments. Seul l'ordre choisi relativement aux éléments de $I(j)$ est susceptible de modifier la solution mais, quel que soit cet ordre, le nombre des éléments de $I(j)$ qui figurent parmi les v premiers de l'ordre adopté est toujours le même. Il s'ensuit que toutes les solutions auxquelles peut conduire P' donnent une valeur identique à la fonction $c(X)$. Soit c' la valeur que prend $c(X)$ lorsque X est obtenu conformément à ce que préconise P' .
- b) Pour établir le lemme, il suffit de prouver que si X ne peut être obtenu comme le préconise P' , alors $c(X) > c'$. Soit donc X une telle solution. Il existe nécessairement $h \in F$ vérifiant $x_h = 1$ que P' place dans tous les ordres complets postérieurement au $v^{\text{ème}}$ élément. Avec les notations du a), il vient $c(h) > c(j)$. Le nombre des x_i égaux à 1 étant imposé, il existe nécessairement, dans X , $h' \in F$ que P' place dans l'un au moins des ordres complets parmi les v premiers éléments, d'où $c(h') \leq c(j)$. Par conséquent :

$$c(X) - c' \geq c(h) - c(h') > 0.$$

Lemme 6 : *La procédure P' préconise de définir, sur F , une famille de préordres complets qui est identique à celle que P préconise de définir.*

Preuve

- a) Montrons tout d'abord que si l'ordre relatif de deux éléments de F peut être librement choisi dans P' , il en va nécessairement de même dans P et vice versa.

Dans P' , i et j sont permutable si et seulement si $c(i) = c(j)$, c'est-à-dire si et seulement si :

$$c(d_i) - c(\overline{d}_i) = c(d_j) - c(\overline{d}_j).$$

Nous allons prouver que, compte tenu du codage (4.1), cette égalité n'est possible que dans deux cas.

Cas α : $d_i = d_j$ et $\overline{d}_i = \overline{d}_j$.

Cas β : $d_i = \overline{d}_i$ et $d_j = \overline{d}_j$.

Ces deux cas sont précisément ceux dans lesquels la procédure P laisse libre choix pour l'ordre de i et j et ce sont les seuls.

Compte tenu du codage (4.1), $c(i)$ et $c(j)$ sont nécessairement de la forme :

$$c(i) = n^h - n^\pi \text{ et } c(j) = n^k - n^\kappa.$$

Si l'on n'est ni dans le cas α ni dans le cas β , il vient :

$$h \neq k, \bar{h} \neq \bar{k}, h \neq \bar{h}, k \neq \bar{k}.$$

Supposons $c(i) = c(j) > 0$ (la même démonstration vaut dans le cas contraire) et $\bar{h} > \bar{k}$ (ce qui n'est pas restrictif). Il vient :

$$h > \bar{h} > \bar{k} \text{ et } k > \bar{k}.$$

En divisant les deux membres de l'égalité $c(i) = c(j)$ par $n^{\bar{k}}$, on obtient :

$$n^{h-\bar{k}} - n^{\bar{h}-\bar{k}} = n^{k-\bar{k}} - 1.$$

Les deux exposants du premier membre étant strictement positifs, il est divisible par n alors que le second ne peut pas l'être. L'égalité ne peut donc avoir lieu.

b) Considérons $i \in F$ et $j \in F$ tels que $c(i) < c(j)$. Il reste maintenant à démontrer que P préconise de ranger i avant j .

Premier cas : $c(j) < 0$: il s'ensuit que $i \in \bar{M}$ et $j \in \bar{M}$. En conservant les notations ci-dessus, il faut montrer que, dans ces conditions, on a nécessairement :

- soit $\bar{d}_i = n^{\bar{h}} > \bar{d}_j = n^{\bar{k}} \Leftrightarrow \bar{h} > \bar{k}$,
- soit $\bar{d}_i = \bar{d}_j$ et $d_i = n^h < d_j = n^k \Leftrightarrow \bar{h} = \bar{k}$ et $h < k$.

Dans ce premier cas, on a par hypothèse :

$$n^{\bar{h}} - n^h > n^{\bar{k}} - n^k > 0.$$

Ceci implique $k \leq \bar{k} - 1$, d'où :

$$n^{\bar{h}} - n^k \geq n^{\bar{h}} - n^{\bar{k}-1} \geq n^{\bar{h}-1} \text{ (puisque } n \geq 2).$$

On a par conséquent :

$$n^{\bar{h}} - n^h > n^{\bar{h}-1}.$$

Ceci n'est possible que pour $\bar{h} \geq \bar{k}$. Dans le cas $\bar{h} = \bar{k}$, il est clair que l'hypothèse implique $n^h < n^k$.

Deuxième cas : $c(i) < 0$ et $c(j) \geq 0$: on a $i \in \bar{M}$ et $j \in M$; dans ces conditions, P préconise de ranger i avant j .

Troisième cas : $c(j) > c(i) \geq 0$: si $c(i) = 0$, il est clair que P préconise de ranger i avant j . Enfin, le cas $c(i) \neq 0$ est équivalent au premier cas moyennant permutation des rôles joués par d et $\bar{d}$.

Puisque P' permet d'obtenir toutes les solutions optimales du programme (4.2) (cf. lemme 5), cette procédure permet également d'obtenir toutes les solutions optimales du problème initial (cf. lemme 4) ; il en est donc de même avec P qui est une procédure équivalente à P' (cf. lemme 6).

Ce qui précède a le mérite de mettre en évidence les liens qui peuvent exister entre le problème posé en section 1 et un problème de type sac à dos. La formulation qui en a été donnée en début de la présente section s'écarte de la formulation classique (cf. Martello et Toth, 1990) par le fait que la contrainte n'est pas une inégalité mais une égalité ainsi que par la nature de la fonction économique.

Soulignons que cette nouvelle démonstration conduit à passer par l'intermédiaire du nombre et de la quantité pour traiter ce qui relève exclusivement de l'ordre et de la qualité. On remarquera que ce détour ne permet pas un gain d'élégance. La démonstration directe met davantage en évidence (par son lemme 2) la raison d'être des différentes façons d'ordonner F pour pouvoir en déduire toutes les solutions optimales. Ce détour enfin ne permet pas de gagner en opérationnalité pour trouver ces différents rangements de F . En effet, le codage (4.1) fait intervenir des nombres qui vont de 1 à $n^{\delta-1}$. Il s'ensuit que les nombres $c(i)$ peuvent être extrêmement grands. Pour $n = 30$ et $\delta = 10$, ils peuvent dépasser 10^{13} . Or, pour effectuer le rangement de F et bien discerner les ex aequo, il faut conserver tous les chiffres significatifs. La procédure P' n'est donc pas plus opérationnelle que la procédure P .

Faisons encore observer que les procédures P et P' montrent que la solution est unique si et seulement si le $v^{\text{ième}}$ élément d'un quelconque rangement préconisé par ces procédures n'appartient pas à une classe d'ex aequo ou s'il est le dernier dans cette classe d'ex aequo. Dans le cas contraire, si l'on note z le nombre total d'éléments de cette classe d'ex aequo et y le nombre d'éléments de cette classe qui appartiennent à F^+ ,

alors le nombre de solutions optimales vaut $\frac{z(z-1), \dots, (z-y+1)}{y(y-1), \dots, 1}$.

5. APPLICATIONS

5.1 Minimisation d'erreurs d'arrondi

Considérons n nombres $w_1, \dots, w_n$ dont la somme vaut $\sum_{i=1}^n w_i = W$. On souhaite normaliser ces nombres qui peuvent par exemple représenter (comme dans Roy et Figueira, 1998) les poids respectifs de n critères. Cette normalisation consiste à substituer, aux valeurs initiales w_i , des valeurs k_i (dites normées) qui leur soit proportionnelles autant que faire se peut compte tenu des contraintes suivantes : les k_i doivent être des entiers et vérifier $\sum_{i=1}^n k_i = 100$. Dans le cas (exceptionnel) où $k_i^* = \frac{100 w_i}{W}$ est entier, on dispose d'une solution respectant rigoureusement la proportionnalité. Dès l'instant où il n'en est pas ainsi, la normalisation conduit à arrondir certains des k_i^* à l'entier supérieur et d'autres à l'entier inférieur. Cela entraîne des erreurs d'arrondi. Celles-ci peuvent être appréciées de deux façons :

– erreur absolue : $|k_i - k_i^*|$;

– erreur relative : $\frac{|k_i - k_i^*|}{k_i^*}$.

Dans un cas comme dans l'autre, on peut vouloir minimiser la plus grande de ces erreurs, puis la seconde plus grande, etc.

Tableau 1

i	w_i	k_i^*	$100 d_i$	$100 \bar{d}_i$	k_i	$\hat{k}_i$
1	7	4.118	21.429	2.857	4	4
2	9	5.294	13.333	5.556	5	5
3	11	6.471	8.182	7.273	6	6
4	14	8.235	9.286	2.857	8	8
5	16	9.412	6.250	4.375	9	9
6	19	11.177	7.368	1.579	11	11
7	21	12.353	5.238	2.857	13	12
8	23	13.529	3.478	3.913	14	14
9	24	14.118	6.260	0.833	14	14
10	26	15.294	4.615	1.923	16	15
TOTAL	170	100			100	98

k_i : valeurs préconisées ; $\hat{k}_i$: valeurs arrondies à l'entier le plus proche

La procédure P (cf. section 2) permet d'obtenir toutes les solutions de ce problème quel que soit le mode d'appréciation des erreurs. En effet, associons à chaque w_i une variable booléenne x_i telle que :

- décider $x_i = 1$ signifie arrondir k_i^* à l'entier supérieur ;
- décider $x_i = 0$ signifie arrondir k_i^* à l'entier inférieur.

Si l'on considère que l'appréciation de l'erreur (dysfonctionnement dû à la décision) doit être appréciée de façon absolue, on a :

$$d_i = 1 - (k_i^* - [k_i^*]) \text{ et } \bar{d}_i = k_i^* - [k_i^*],$$

$[k_i^*]$ désignant la partie entière de k_i^* . Chacun de ces dysfonctionnements doit être divisé par k_i^* si l'on souhaite prendre en compte les erreurs relatives et non pas absolues.

Posons :

$$\sum_{i=1}^n [k_i^*] = K.$$

Pour que la somme des valeurs normées totalise exactement 100, le nombre des arrondis par excès doit être égal à $100 - K = v$.

Le tableau 1 ci-dessus présente un exemple numérique où les erreurs d'arrondi sont appréciées de façon relative. Le lecteur vérifiera sans peine que :

- $K = 97$, d'où $v = 3$;
- $M = \{8\} \subset F^+$;
- les éléments 10 puis 7 viennent dans cet ordre en tête de M ;
- $F^+ = \{8, 10, 7\}$;
- la prise en compte d'erreurs absolues (au lieu d'erreurs relatives) conduirait à $F^+ = \{8, 3, 5\}$;
- la procédure consistant à arrondir à l'entier le plus proche conduirait à un total de 98 et non pas de 100.

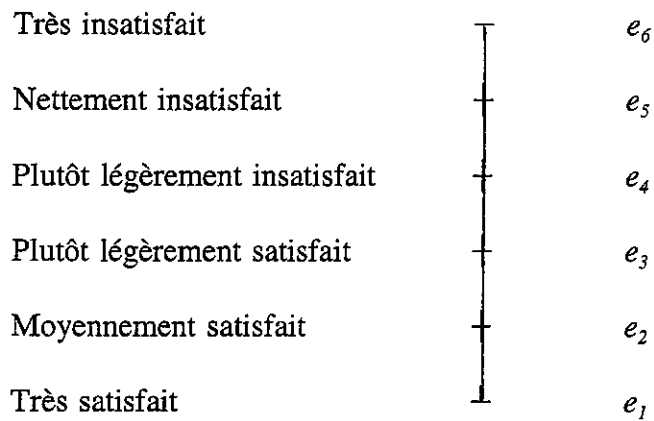
5.2 Optimisation de niveaux de satisfaction

F désigne ici un groupe de n individus qui doivent être répartis en deux sous-groupes dont les effectifs sont imposés : v personnes dans le premier, $n - v$ dans le second. Cette répartition doit permettre d'accomplir, dans les meilleures conditions, soit une tâche (qui demande deux équipes avec des horaires différents), soit une formation (qui nécessite des postes de travail spécialisés répartis dans deux salles), soit encore un voyage (avec, par exemple, deux modes de transport différents). Supposons qu'un questionnaire approprié ait permis d'apprécier, sur l'échelle de la figure 1, le niveau de plus ou moins grande satisfaction (ou insatisfaction) de chaque individu quant à son affectation à l'un et à l'autre des deux sous-groupes. Précisons que certains individus peuvent être davantage satisfaits s'ils sont affectés au premier sous-groupe alors que d'autres peuvent préférer aller dans le second.

Notons d_i le niveau de satisfaction de l'individu i en cas d'affectation au premier sous-groupe et $\bar{d}_i$ son niveau de satisfaction en cas d'affectation au second sous-groupe.

Un principe d'équité peut conduire à rechercher une affectation telle que l'individu le plus insatisfait (ou encore le moins satisfait) ait un niveau d'insatisfaction minimum (ou encore un niveau de satisfaction maximum), de même pour le second plus insatisfait (ou encore moins satisfait) et ainsi de suite. Il est clair que la procédure P permet de construire toutes les affectations optimales selon ce critère lexicographique. Elle permet également de décider immédiatement de quelle(s) personne(s) devrait(ent) quitter, ou au contraire venir dans, le premier sous-groupe si son effectif v était augmenté ou, au contraire, diminué, cela aussi bien avec F invariant qu'avec l'arrivée dans le groupe de nouveaux individus.

Figure 1 : Echelle de satisfaction



BIBLIOGRAPHIE

Bachelar G. : Essai sur la connaissance approchée, Paris, Librairie Philosophique Vrin, 6e édition, 1987.

Martello S., Toth P. : Knapsack problems: Algorithms and computer implementations, Chichester, Wiley, 1990.

Roy B., Figueira J. : Détermination des poids des critères dans les méthodes de type ELECTRE avec la technique de Simos révisée, Université Paris-Dauphine, *Document du LAMSADE* n° 109, juillet 1998..