

CAHIER DU LAMSADE

Laboratoire d'Analyse et Modélisation de Systèmes pour l'Aide à la Décision
(Université Paris-Dauphine)
Unité de Recherche Associée au CNRS ESA 7024

UN NOUVEAU MODÈLE POUR LA CONSTRUCTION DE RÉSEAU DE TÉLÉCOMMUNICATION À COÛT MINIMUM ¹

CAHIER N° 171
juin 2000

Marc DEMANGE ²
Cécile MURAT ²
Vangelis PASCHOS ²
Sophie TOULOUSE ²

reçu : janvier 2000.

¹ Ce travail a été effectué grâce à un contrat de recherche financé par BOUYGUES TELECOM.

² LAMSADE, Université Paris-Dauphine, Place du Maréchal De Lattre de Tassigny, 75775 Paris Cedex 16, France ({demange,murat,paschos,toulouse}@lamsade.dauphine.fr).

Table des matières

Abstract	ii
Résumé	ii
1 Introduction	1
2 Construction de réseau à coût(s) minimal(aux)	1
2.1 Difficultés d'une résolution conjointe ou globale	1
2.1.1 Préliminaires : quelques notions de télécommunication	1
2.1.2 Difficultés : intégrité et forte non linéarité	2
2.1.2.1 Part de la fonction objectif	2
2.1.2.2 Part des variables de décision	2
2.1.2.3 Restrictions	3
2.2 Pourquoi s'attaquer au problème global?	3
2.3 Comment contourner ces difficultés	3
2.3.1 Séparation des problèmes	3
2.3.2 De la transmission à la commutation	3
2.3.3 Taille du problème de multiflot relatif aux faisceaux	3
3 Modèle mathématique, cadre général	4
3.1 Hypothèses	4
3.1.1 Les coûts	4
3.1.2 Le dimensionnement	4
3.1.3 Les contraintes	4
3.1.4 La répartition des trafics	4
3.2 Le problème original	4
3.3 Le principe de résolution	5
3.3.1 Le réseau des faisceaux	5
3.3.2 Réduction du problème	5
3.3.3 Le problème de multiflot	6
3.3.4 Résolution globale	6
4 Algorithme proposé	6
4.1 Un peu de sensibilité dans un monde NP-dur	6
4.2 Sensiblement en marge du modèle : la solution initiale	7
4.3 Exploration pas à pas	7
4.3.1 L'idée	7
4.3.2 Détail d'un cycle	7
4.3.2.1 Première stratégie	8
4.3.2.2 Seconde stratégie	8
4.3.2.3 Évaluation	8
4.3.3 Gestion globale de l'exploration	8
5 Points critiques	8
5.1 Difficultés paramétriques	10
5.2 Réalités non prises en compte	10
5.2.1 Dispersion du trafic	10
5.2.2 Dimensionnement faussé	10
5.3 Complexité en taille du problème	10
5.3.1 Quand faisceaux et arêtes coïncident	10
5.3.2 Taille du problème de multiflot relatif au arêtes	11
6 Conclusion	11

A new model for the design of a minimum-cost telecommunication network¹

Abstract

We propose a model for the problem of designing telecommunication networks simultaneously deciding about capacities and routings, two versions separately treated until now. Once the main critical points of the problem at hand exposed, a mathematical model is described and an algorithm based upon this model is specified for its solution. Finally, we discuss several difficulties rising from the mathematical model proposed.

Keywords: telecommunication network, cost-minimization, mathematical model, optimization.

Un nouveau modèle pour la construction de réseau de télécommunication à coût minimum²

Résumé

Nous proposons dans cet article un modèle pour la construction de réseau de télécommunication qui décide conjointement des capacités et des routages, deux problèmes généralement traités séparément. Après avoir dans un premier temps mis en exergue les points de résistance du problème posé, nous exposerons dans une deuxième partie un modèle mathématique pour sa résolution. Nous proposons ensuite une mise en œuvre algorithmique de ce modèle, enfin une exploration des difficultés nouvelles ou persistantes.

Mots-clé : réseau de télécommunication, minimisation des coûts, modèle mathématique, optimisation.

¹Work supported by a BOUYGUES TELECOM contract.

2. Ce travail a été effectué grâce à un contrat de recherche financé par BOUYGUES TELECOM.

1 Introduction

Cet article est le fruit d'une collaboration entre le laboratoire LAMSADE et Bouygues Télécom ayant pour objet la résolution des problèmes liés à l'interconnexion de leur réseau de téléphonie mobile et du réseau France Télécom. Le projet a été initié par le Département de Recherche et Développement de Bouygues Télécom pour répondre aux besoins spécifiques identifiés par ses entités opérationnelles.

La conception de réseaux de télécommunication soulève deux types de problème: tout d'abord, quel réseau construire pour satisfaire une demande de trafic donnée (problème de construction d'un réseau réalisable à moindre coût); ensuite, comment acheminer les différents trafics dans le réseau existant (problème de routage ou de multiflot à coût minimum). Ces deux questions, bien évidemment interdépendantes, correspondent à deux types de soucis financiers: les coûts de construction des lignes d'une part, dont on ne peut préjuger de la forme, et les coûts de passage du trafic sur une ligne d'autre part, généralement considérés comme fonctions linéaires (éventuellement par morceaux) du trafic. Ces deux problèmes sont connus pour leur difficulté de résolution: ils ont été démontrés, dans leur formulation générale, NP-difficiles. La complexité de ces deux sous-problèmes et de leur relation au sein du problème global laisse augurer du niveau de difficulté de celui-ci. Notons que la construction de réseaux pose de plus des exigences en terme de robustesse et de sécurité, aspects qui ne sont pas pris en considération dans le cadre de ce travail. Le seul critère considéré dans cette étude pour optimiser le réseau à construire sera donc le coût, ou plutôt une somme de coûts de natures totalement différentes. Nous aurons ainsi pour seul type de contraintes celui de la cohérence entre des capacités, des trafics et des demandes. Il n'existe à notre connaissance aucun algorithme décidant simultanément des capacités et des routages sur le type de réseau que nous allons considérer. On trouve, sous d'autres hypothèses, quelques travaux similaires, citons par exemple Dahl et Stoer [2]; mais la plupart des études proposées dans ce domaine ne traitent qu'un problème à la fois. Pour un état de l'art, se reporter à Kennington [6], Minoux [7] ou encore Ahuja *et al.* [1].

2 Construction de réseau à coût(s) minimal(aux)

Nous allons au cours de cette section tenter d'éclaircir les trois points suivants: tout d'abord la nature de la difficulté d'une résolution globale, puis la légitimité d'une telle résolution en dépit de ces difficultés, enfin la manière par laquelle nous proposons de contourner (partiellement du moins) ces difficultés.

2.1 Difficultés d'une résolution conjointe ou globale

2.1.1 Préliminaires: quelques notions de télécommunication

Un réseau de télécommunication est constitué de *nœuds* et de *liens* entre ces nœuds. Il peut être naturellement représenté par un graphe dont les sommets sont ces nœuds et les arêtes ces liens. Liens et nœuds permettent d'acheminer les *demandes de trafic* qui s'expriment entre deux nœuds. Le problème posé revient donc à décider quelles *capacités* installer sur quels liens et quels *chemins* emprunter pour la distribution du trafic.

Comme différentes technologies peuvent être considérées conjointement, nous travaillerons en réalité sur un *multigraphe*, bien que, par abus de langage, nous parlerons de graphe. Il n'y a donc pas seulement une arête entre deux sommets, mais autant que de technologies envisagées pour relier ces deux sommets. La pluralité des types d'équipement considérés participe ainsi à la complexité en taille du problème en multipliant par autant que de technologies le nombre d'arêtes du graphe.

Tous les nœuds d'un réseau ne remplissent pas la même fonction : certains, les *commutateurs*, permettent d'aiguiller le trafic, tandis que les autres, appelés *points de transmission*, se contentent de laisser passer le trafic. Les demandes de trafic se font toujours d'un commutateur vers un autre. Quant aux liens, ils sont considérés entre nœuds de tout type et de toute technologie possible.

Le *trafic* est constitué des appels qui circulent sur les liens. Un trafic est émis par un commutateur et reçu par un autre. On peut voir le réseau de télécommunication comme un ensemble de canaux entre des commutateurs : un trafic envoyé sur un canal ne pourra en être dérouté, quelque point de transmission qu'il rencontre sur son chemin. Ces canaux, nous les appelons *faisceaux* et les définissons comme une capacité de transmission orientée joignant deux commutateurs et qui traverse en chemin d'éventuels points de transmission. Un faisceau permet ainsi d'amener du trafic de son commutateur initial à son commutateur terminal par un chemin spécifique. Pour exemple, entre deux commutateurs *A* et *B*, on peut avoir entre autre un faisceau pour le trafic de *A* vers *B* dit *sortant* et un faisceau pour le trafic de *B* vers *A* dit *entrant*. Un faisceau supportant simultanément les deux sens de trafic (entrant et sortant) est dit *mixte*.

Pour aller d'un point à un autre, le trafic devra emprunter une succession de faisceaux : c'est ce que l'on appelle un *chemin*. Une même demande de trafic pourra ainsi être envoyée sur différents chemins.

Nous verrons plus tard que c'est la présence de points de transmission et dans une moindre mesure l'hypothèse de non mixité des constituants des liens (induisant la séparation des trafics sortant et entrant) qui rendent nécessaire l'introduction de la notion de faisceau.

2.1.2 Difficultés : intégrité et forte non linéarité

2.1.2.1 Part de la fonction objectif

Les coûts d'équipements en télécommunication présentent deux inconvénients majeurs : leur irrégularité (dans le sens où ils ne présentent aucune bonne propriété particulière) et leur diversité (du fait de la coexistence de diverses technologies). Les expressions mathématiques de ces coûts sont donc, non seulement, souvent ingrates (concaves, affines par morceaux, fonctions d'un ensemble de liens), mais en plus fortement hétérogènes, notamment en ce qui concerne les échelles de variation.

Nous ne formulons pas d'hypothèse sur la forme des coûts d'équipement, pour deux raisons : tout d'abord, il faut prendre en compte le manque d'uniformité de ces coûts du fait de l'utilisation conjointe de plusieurs technologies ; ensuite, comme nous le présentons ci-après, ces coûts ne constituent pas malgré leur irrégularité la difficulté majeure d'une résolution globale.

2.1.2.2 Part des variables de décision

On appelle *loi de dimensionnement* la fonction qui permet de déterminer la capacité d'un faisceau à partir des quantités de trafics qui le traversent.

Il faut, dans le problème posé, décider de capacités de liens et de quantités de trafic sur des chemins : ce sont nos variables de décision. Le trafic s'exprime en *erlang* (nombre de secondes de trafic par seconde), la capacité en MIC. Un MIC est un ensemble de 32 circuits dont 2 sont réservés pour l'envoi de certains signaux : il reste donc 30 circuits destinés à l'acheminement du trafic. La loi d'erlang traduit le fait qu'on ne peut router avec succès 30 appels sur un MIC, du fait d'un certain taux d'échec (appels non aboutis). Nous considérerons qu'un MIC permet d'acheminer simultanément un nombre constant d'appels (alors qu'en réalité cela dépend de la capacité totale du faisceau, la loi d'erlang n'étant pas linéaire). De fait, le nombre de MIC nécessaires à la circulation d'un trafic sur un faisceau sera une partie entière de ce trafic (précisément la partie entière supérieure d'une fonction linéaire du trafic). Un même lien pouvant être utilisé par différents faisceaux, sa capacité est partagée en les capacités des faisceaux qui le traversent.

La capacité d'un lien sera donc une somme de parties entières d'une fonction linéaire du trafic : la relation entre nos deux types de variables de décision manque singulièrement de linéarité.

2.1.2.3 Restrictions

Notons que deux hypothèses simplificatrices ont été formulées : l'appartenance à $\mathbb{R}$ des variables de trafic et la constance du taux de la loi de dimensionnement. Cette seconde hypothèse, bien plus que la première, est à la fois nécessaire à l'écriture d'un modèle *raisonnable* et malheureusement préjudiciable à la validité des résultats.

2.2 Pourquoi s'attaquer au problème global?

Tout simplement parce que c'est le problème qui nous a été posé, et ce du fait du cadre tout particulier dans lequel se situait notre intervention : l'interconnexion. Il s'agissait effectivement, non pas de construire tout un réseau, mais de raccorder celui de *Bouygues Telecom* à celui de *France Télécom*. Les offres de raccordement de ce dernier opérateur rendaient central l'arbitrage entre les coûts de passage du trafic et les coûts d'équipement : on ne peut dès lors traiter séparément routage et construction de liens.

2.3 Comment contourner ces difficultés

2.3.1 Séparation des problèmes

Nous avons vu précédemment comment la dépendance non linéaire de ses variables de décision rendait difficile la résolution du problème global. Or, les problèmes de multiflot ont été largement étudiés, et bien qu'ils demeurent difficiles à traiter sous leur formulation générale, certaines familles de multiflots sont aujourd'hui résolus efficacement ; c'est notamment vrai dans le cas de contraintes et de coûts linéaire [3]. Aussi nous proposons-nous d'extraire du problème global un problème de routage et de travailler sur un réseau à capacités figées. La stratégie que nous proposons consiste donc, partant d'un réseau réalisable (construction heuristique spécifique au problème), à minimiser alternativement les deux types de coût en déterminant sur un réseau donné un routage optimum, puis en changeant localement des capacités après étude de sensibilité sur ce routage.

2.3.2 De la transmission à la commutation

Pour extraire un problème de multiflot facilement résolvable, il nous faut une expression linéaire des contraintes de capacité pour les trafics : cela ne peut se faire qu'en considérant les capacités des faisceaux et non des liens. Ainsi, on ne travaillera plus sur le réseau des liens mais sur celui des faisceaux, changeant d'ensemble de variables de décision pour le choix des capacités. On se retrouve ainsi avec un multigraphe dont les sommets sont les seuls commutateurs et les arêtes les faisceaux : les points de transmission n'apparaissent plus. Cette transformation a un coût : celui de l'augmentation de la taille du problème de par la multiplication du nombre de ses variables de décision.

2.3.3 Taille du problème de multiflot relatif aux faisceaux

Disposant de n sommets dont n_c commutateurs et n_t points de transmission et d'un seul type de technologie pour créer les lignes, on suppose que tous les liens, faisceaux et chemins générables à partir de ces sommets sont envisageables. Soit k le nombre maximum de sommets intermédiaires autorisé sur un chemin ; si m , p et q désignent les nombres de liens, faisceaux et

chemins, alors pour n_c et n_t tels que $\min\{n_t, n - 2\} \geq k$ on obtient :

$$\begin{aligned} m &= \binom{n}{2} \approx n^2 \\ p &= n_c(n_c - 1) \sum_{i=0}^k A_i^{n_t} \approx n^{3+k} \\ q &= n_c(n_c - 1) \sum_{i=0}^k A_i^{n-2} \approx n^{5+k} \end{aligned}$$

où A désigne le nombre d'arrangements. La taille du problème est donc augmentée d'un facteur polynomial n^{k+1} .

Si la longueur des chemins n'est pas limitée, le nombre de variables de capacités sur le graphe des faisceaux devient d'ordre exponentiel en $O(n^{n+3})$:

$$p = n_c(n_c - 1) \sum_{i=0}^{n_t} A_i^{n_t} \approx n^2 \times n \times n^n = n^{n+3}.$$

3 Modèle mathématique, cadre général

3.1 Hypothèses

3.1.1 Les coûts

Les coûts des différents équipements sont supposés fonctions croissantes des capacités et les coûts de routage fonctions linéaires du trafic sur les chemins.

3.1.2 Le dimensionnement

La loi de dimensionnement d'un faisceau de capacité c exprimé en MIC en fonction d'un trafic tr exprimé en erlang est présumée être de la forme $c = \lceil \tau * tr \rceil$ avec τ constant³. Cette hypothèse, artificielle, nous permettra d'exprimer un problème linéaire de multiflots.

3.1.3 Les contraintes

Nous ne posons pas d'autre exigence que celle de capacités suffisantes à l'acheminement des demandes.

3.1.4 La répartition des trafics

Dans un premier temps, aucune restriction n'est émise quant au nombre de chemins à utiliser pour transiter les demandes de trafic : une même demande de trafic pourra être dispersée sur autant de chemins que l'on veut. Là encore, l'hypothèse est artificielle, mais la traduction linéaire de la limitation effective du nombre de chemins impliquerait l'introduction de variables bivalentes et de nombreuses contraintes. C'est cependant une exigence opérationnelle à prendre en compte, a posteriori à défaut d'avoir pu le faire a priori.

3.2 Le problème original

Les notations introduites au paragraphe 2.3.3 seront utilisées au cours de cette section.

On a en entrée r demandes à acheminer représentées par le vecteur $\vec{d}$. Notons respectivement α et $\vec{\gamma}$ la fonction de coût d'équipement des liens et le vecteur de coût de routage sur les chemins ; désignons par $\vec{c}$ et $\vec{y}$ les vecteurs de capacité des liens et de trafic sur les chemins ; enfin,

3. $\lceil \cdot \rceil : x \mapsto \lceil x \rceil$ désigne la partie entière supérieure.

représentons par C la matrice d'incidence demandes/chemins et par β la fonction d'incidence liens/chemins.

Le problème mathématique de conception de réseau $(\mathcal{P})$ s'exprime alors sous la forme :

$$(\mathcal{P}) \quad \left\{ \begin{array}{l} \min_{\vec{y}, \vec{c}} \quad Z_{\mathcal{P}} = \alpha(c) + \vec{\gamma} \cdot \vec{y} \\ \text{s.c.} \quad \left\{ \begin{array}{ll} C \cdot \vec{y} \geq \vec{d} & (1) \\ \beta(y) \leq \vec{c} & (2) \\ \vec{c} \in \mathbb{N}^m & (i) \\ \vec{y} \in \mathbb{R}^q & (ii) \end{array} \right. \end{array} \right.$$

(1) : contraintes d'acheminement du trafic
(2) : contraintes de capacités trafics/liens (non linaires)

3.3 Le principe de résolution

La résolution que nous proposons s'appuie sur le réseau des faisceaux : il faut donc, dans un premier temps, exprimer le problème original en fonction des variables de capacités sur les faisceaux. Cette étape doit permettre l'émergence d'un problème linéaire de multiflot que l'on isole alors. Notre résolution consistant à relier les choix de routage et de capacités par une analyse de sensibilité, on exprime enfin au sein d'un même objectif les coûts d'équipements et de routage en fonction des seules variables de capacités sur les faisceaux.

3.3.1 Le réseau des faisceaux

Travaillant sur le réseau des faisceaux et non celui des liens, il nous faut réécrire le problème précédent en exprimant les contraintes liées au trafic relativement aux faisceaux. Soit $\vec{x}$ le vecteur de capacité des faisceaux et soient respectivement A et B les matrices d'incidence liens/faisceaux et faisceaux/chemins, le problème $(\mathcal{Q})$ suivant est équivalent au problème $(\mathcal{P})$:

$$(\mathcal{Q}) \quad \left\{ \begin{array}{l} \min_{\vec{y}, \vec{x}, \vec{c}} \quad Z_{\mathcal{Q}} = \alpha(c) + \vec{\gamma} \cdot \vec{y} \\ \text{s.c.} \quad \left\{ \begin{array}{ll} C \cdot \vec{y} \geq \vec{d} & (1) \\ B \cdot \vec{y} \leq \vec{x} & (2.1) \\ A \cdot \vec{x} \leq \vec{c} & (2.2) \\ \vec{c} \in \mathbb{N}^m & (i) \\ \vec{x} \in \mathbb{N}^p & (iii) \\ \vec{y} \in \mathbb{R}^q & (ii) \end{array} \right. \end{array} \right.$$

(2.1) : contraintes de capacité trafic/faisceaux
(2.2) : contraintes de capacité faisceaux/liens

3.3.2 Réduction du problème

Réduisons à présent l'expression du problème $(\mathcal{Q})$ en évinçant les variables de capacité des liens : pour toute solution optimale $(\vec{y}^*, \vec{x}^*, \vec{c}^*)$ de $(\mathcal{Q})$, la solution $(\vec{y}^*, \vec{x}^*, A \cdot \vec{x}^*)$ est non seulement réalisable mais aussi optimale de par la croissance de α . Ainsi, le problème suivant $(\mathcal{R})$ est équivalent à $(\mathcal{Q})$ du point de vue de l'optimalité :

$$(\mathcal{R}) \quad \left\{ \begin{array}{l} \min_{\vec{y}, \vec{x}} \quad Z_{\mathcal{R}} = \alpha(A \cdot \vec{x}) + \vec{\gamma} \cdot \vec{y} \\ \text{s.c.} \quad \left\{ \begin{array}{ll} C \cdot \vec{y} \geq \vec{d} & (1) \\ B \cdot \vec{y} \leq \vec{x} & (2.1) \\ \vec{x} \in \mathbb{N}^p & (iii) \\ \vec{y} \in \mathbb{R}^q & (ii) \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Remarquons que l'équivalence des problèmes (Q) et (R) reste valable en présence de contraintes de capacités supérieures sur les liens du type $\bar{c} \leq \bar{c}$:

$$(\bar{y}, \bar{x}, \bar{c}) \text{ réalisable} \implies (A.\bar{x} \leq \bar{c} \text{ et } \bar{c} \leq \bar{c}) \implies A.\bar{x} \leq \bar{c}.$$

Une argumentation similaire permet encore d'établir l'équivalence des deux problèmes en cas de contraintes de capacités supérieures sur les sommets.

3.3.3 Le problème de multiflot

On extrait du problème global (R) le problème de multiflot ou routage $\mathcal{M}(\bar{x})$ associé à un vecteur $\bar{x}$ de capacités sur les faisceaux suivant :

$$(\mathcal{M}(\bar{x})) \quad \begin{cases} \min_{\bar{y}} & Z_{\mathcal{M}(\bar{x})} = \bar{\gamma} \cdot \bar{y} \\ \text{s.c.} & \begin{cases} C.\bar{y} \geq \bar{d} & (1) \\ B.\bar{y} \leq \bar{x} & (2.1) \\ \bar{y} \in \mathbb{R}^q & (ii) \end{cases} \end{cases}$$

$\mathcal{M}(\bar{x})$ est pour tout vecteur $\bar{x}$ un programme linéaire en variables réelles.

3.3.4 Résolution globale

Soit $\bar{y}^*$ la fonction qui à une répartition donnée $\bar{x}$ des capacités sur les faisceaux associe un routage optimal $\bar{y}^*(\bar{x})$ de $\mathcal{M}(\bar{x})$; pour résoudre (R) , notre approche mène à la résolution du problème :

$$(\Pi) \quad \begin{cases} \min_{\bar{x}} & Z_{\Pi} = \bar{\gamma} \cdot \bar{y}^*(\bar{x}) + \alpha(A.\bar{x}) \\ \text{s.c.} & \bar{x} \in \mathbb{N}^p \end{cases} \quad (iii)$$

(Π) est un problème de minimisation en variables entières doté d'une fonction objectif qui ne possède a priori aucune bonne propriété. C'est finalement ce problème (Π) que l'on cherchera à résoudre.

4 Algorithme proposé

La modélisation qui nous a mené au programme (Π) n'est qu'une étape de la résolution : nous n'avons fait que détacher de (P) ses aspects *faciles*, connus, et mis en relation linéaire les variables de décision. L'algorithme général que nous proposons ici n'est qu'une mise en œuvre directe de cette modélisation. Notons toutefois que la résolution du problème (Π) mérite de faire à son tour l'objet d'une étude approfondie en fonction des propriétés éventuelles du cas traité.

Revenant au cas général, on se place sur le réseau des faisceaux : une solution S du problème global est alors un couple $(\bar{x}, \bar{y})$ où $\bar{x}$ désigne une solution en capacités (le réseau) et $\bar{y}$ un routage réalisable sur ce réseau. Le coût $Z(S)$ d'une solution S sera donc la somme des coûts de construction du réseau et du coût d'un routage sur ce réseau, soit $Z(S) = \alpha(A.\bar{x}) + \gamma \cdot \bar{y}$. Résoudre le problème global par la résolution de (Π) consiste à déterminer la meilleure répartition des capacités sur les faisceaux $\bar{x}$ de façon à minimiser l'objectif $Z_{\Pi}(\bar{x}) = \alpha(A.\bar{x}) + \gamma \cdot \bar{y}^*(\bar{x})$: on ne travaille plus qu'avec des solutions S du type $(\bar{x}, \bar{y}^*(\bar{x}))$.

4.1 Un peu de sensibilité dans un monde NP-dur

Le choix de résolution du problème (Π) revient à considérer conjointement les variables de capacité et de trafic par le biais de l'étude de sensibilité, plus précisément des coûts duaux d'un routage optimum sur un réseau à capacités figées. Partant d'un réseau initial $\bar{x}_0$, l'algorithme

détermine un routage optimal $\bar{y}^*(\bar{x}_0)$; il regarde ensuite de quels faisceaux il pourrait être intéressant d'augmenter la capacité, et dans quelle mesure, en fonction des coûts d'équipement engendrés et de l'éventuel gain généré en terme de coûts de routage (coût dual associé à la contrainte de capacité du faisceau). Si un tel faisceau se présente, le changement de capacité est opéré, menant à un nouveau réseau $\bar{x}_1$ sur lequel un routage optimal $\bar{y}^*(\bar{x}_1)$ est déterminé et ainsi de suite.

4.2 Sensiblement en marge du modèle : la solution initiale

Notre méthode de résolution fait évoluer la solution par petites touches successives, risquant ainsi de nous mener vers un optimum local voisin de la solution initiale : la solution finale proposée par l'algorithme apparaît comme fortement dépendante de celle-ci. Quels que soient le problème, sa modélisation, la résolution envisagée, il est toujours dans le domaine de l'optimisation en nombres entiers très important de partir d'une bonne solution, celle-ci conditionnant la partie de l'ensemble des possibles qui sera explorée. Or, un aspect positif de notre problème est qu'il est assez facile de construire un réseau réalisable : autant donc y passer un peu de temps. Nous ne nous étendrons pas sur cette construction car elle ne constitue pas le propos de cet article, nous mentionnerons simplement deux points. Le premier reflète un soucis d'équité de la prise en considération des différents types de coûts : notre stratégie a consisté à construire un chemin physique demande par demande en minimisant en priorité les coûts d'équipement. Le second reflète une volonté de diversification : nous proposons différentes options pour orienter la construction de cette solution initiale vers des physionomies type de réseau.

4.3 Exploration pas à pas

4.3.1 L'idée

Une fois le réseau initial construit, la résolution consiste à effectuer des améliorations locales en modifiant seulement quelques MIC sur quelques liens à la lumière des coûts duaux donnés par la résolution à l'optimum du multiflot. Deux stratégies de changement local sont utilisées : l'une consiste à ajouter un petit montant de capacité sur un faisceau (cela permet de s'éloigner quelque peu de la solution courante), tandis que l'autre ajoute et retire simultanément quelques MIC sur un couple de faisceaux (c'est là que les améliorations sont attendues). Chacune de ces deux stratégies est appliquée par séries, la première servant à préparer un terrain favorable à la seconde (pour cause, notamment, de coûts par paliers). Notre méthode alterne ainsi des successions d'ajouts et des successions d'échanges, que nous dénommerons cycle.

4.3.2 Détail d'un cycle

L'ajout de MIC n'a pas pour vocation d'améliorer directement la solution mais plutôt d'augmenter les possibilités d'évolution du réseau. Aussi allons-nous à l'intérieur de chaque cycle limiter l'application de cette stratégie à un nombre maximum $P1$ d'itérations avant de passer à la phase d'échange. De plus, chaque ajout placera un même nombre fixe $M1$ de MIC sur un faisceau. Un faisceau sur lequel un ajout a été opéré lors d'un cycle qui n'a pas généré d'amélioration est définitivement interdit pour l'ajout de capacité.

C'est lors de la phase d'échange que la physionomie du réseau pourra réellement évoluer. C'est pour cela que la seconde stratégie est appliquée tant que possible. Chaque échange placera sur un faisceau et retirera sur un autre un même nombre fixe $M2$ de MIC. Un couple de faisceaux qui donnerait lieu après échange à un réseau non réalisable se verrait interdit d'échange pendant la durée du cycle.

Un cycle consiste donc à ajouter $P1$ fois puis échanger tant que possible, l'algorithme à répéter ce cycle aussi longtemps que les autorisations de changement le permettent, ou jusqu'à saturation d'un paramètre d'arrêt (nombre maximum d'itérations, taux minimum d'amélioration, temps d'exécution imparti, ...). Le déroulement de ces cycles, détaillé ci-suit, est illustré dans la figure.

4.3.2.1 Première stratégie

Tant que $P1$ n'est pas atteint et qu'il reste des faisceaux autorisés pour l'ajout de capacité, on octroie à un faisceau $M1$ MIC supplémentaires. Le faisceau choisi est celui qui réalise le minimum de $Cm_i + M1 * \lambda_i$ où Cm_i représente le coût d'équipement associé à l'ajout de $M1$ MIC sur le faisceau d'indice i et λ_i le coût dual associé à la contrainte relative à ce faisceau, soit le gain marginal en terme de coût de routage engendré par l'ajout d'un MIC sur le faisceau d'indice i .

4.3.2.2 Seconde stratégie

Tant que des couples de faisceaux le permettent, on fait l'échange de $M2$ MIC entre deux faisceaux. Le couple de faisceaux choisi est celui qui réalise le minimum de $Cm_{(i,j)}$ où $Cm_{(i,j)}$ représente le coût d'équipement associé aux opérations conjointes d'ajout de $M2$ MIC sur le faisceau d'indice i et de retrait de $M2$ MIC sur le faisceau d'indice j . Si la solution obtenue par cet échange n'est pas réalisable (pour les demandes de trafic), l'échange de MIC sur le couple choisi sera interdit tout au cours du cycle.

4.3.2.3 Évaluation

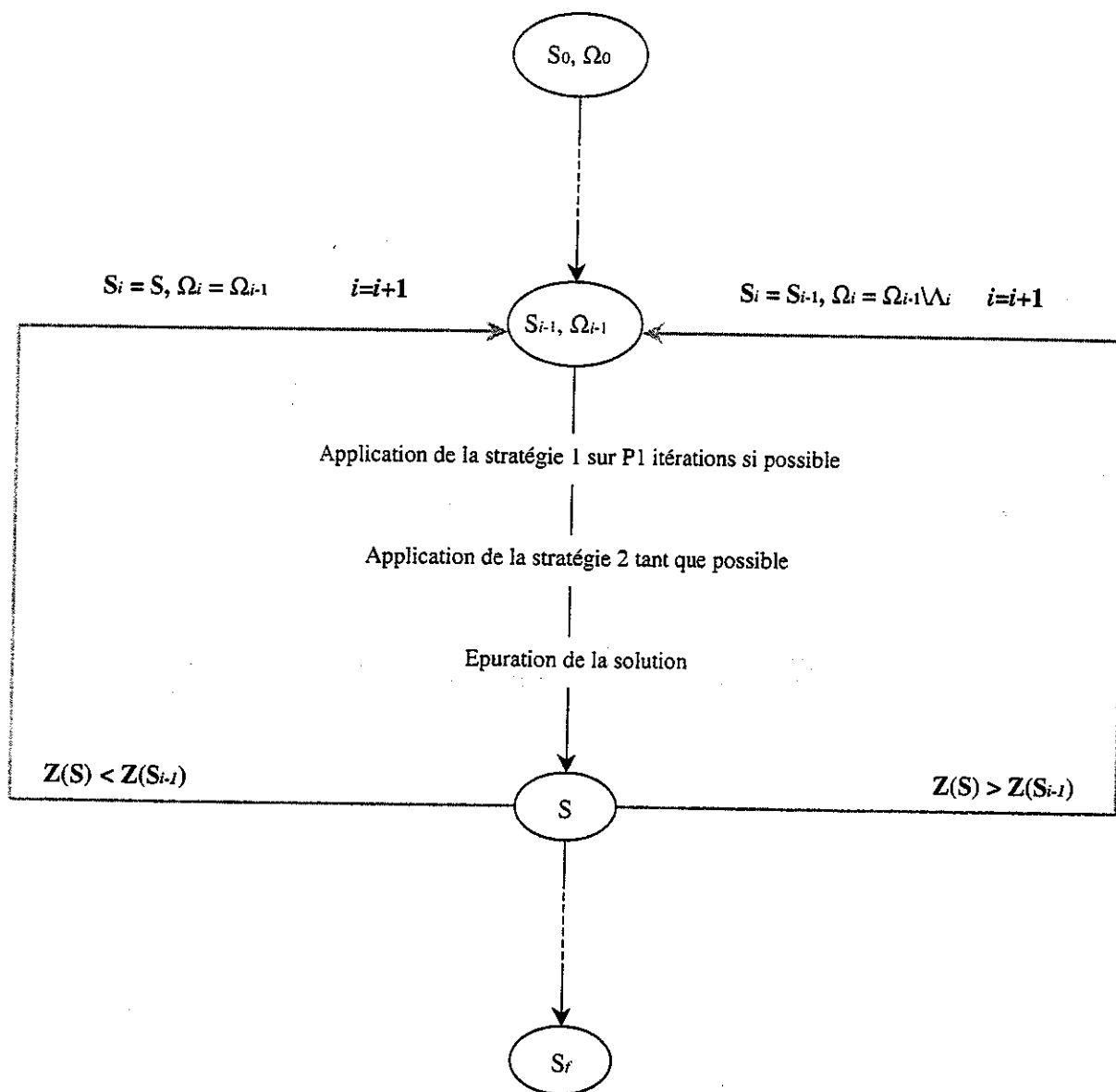
En fin de cycle augmentation/échange, la solution est évaluée pour la comparer à la dernière meilleure solution retenue. Il faut pour ce faire rendre minimale la solution courante en capacité en évinçant tout MIC non utilisé par le routage optimal courant avant de comparer le coût de la solution ainsi obtenue à celui de la dernière meilleure solution retenue : la nouvelle solution courante sera la solution de moindre coût. Si le cycle n'a pas généré d'amélioration, l'ajout de capacité sur les faisceaux dont la capacité avait été augmentée en première étape est alors définitivement interdit.

4.3.3 Gestion globale de l'exploration

Le cycle d'évolution locale est répété tant que possible ou plus exactement tant qu'une amélioration est envisageable, ce qui paraît difficile à apprécier a priori. Les paramètres $M1$ et $M2$ d'évolution locale sont fixes mais on pourrait envisager une gradation de l'amplitude des modifications opérées sur le réseau en les diminuant progressivement (de forts changements en début d'exploration peuvent être préférables pour espérer pouvoir se démarquer d'une bonne situation initiale). Il est toutefois délicat de proposer une stratégie fine ici, car le comportement d'un tel type d'algorithme est fortement dépendant des caractéristiques techniques du problème posé.

5 Points critiques

Nous discutons dans cette section à la fois des difficultés opérationnelles rencontrées (comment aller plus loin dans ce que nous avons déjà fait) et des résistances de la nature (ce que nous n'avons pas su résoudre).



S_0 : solution initiale S_i : solution en fin d'itération i S_f : solution finale
 Ω_i : ensembles des faisceaux autorisés pour l'ajout de capacité en stratégie 1 pendant l'itération i
 Λ_i : ensembles des faisceaux dont la capacité est augmentée en stratégie 1 pendant itération i
 Z : coût de la solution

FIG. 1 - Exploration pas à pas : détail d'une itération.
4.3.2

5.1 Difficultés paramétriques

Les bons paramètres pour sortir de l'optimum physique local (*i.e.*, d'une répartition des capacités des faisceaux localement *bonne*) tout en restant raisonnable quant à l'exploration sont très difficiles à ajuster. Des interrogations se posent notamment sur la nature des changements (ajouts, retraits, échanges), les paramètres de coût à prendre en compte (coûts d'équipements et/ou de routage), ou encore les paramètres quantitatifs (nombre de MIC par faisceau, nombre de faisceaux, nombre de changements successifs d'un même type). Une grande difficulté est posée par la coexistence de différentes technologies qui donne lieu à une grande hétérogénéité des coûts (les décalages d'échelles rendent fort délicate la comparaison des coûts entre deux types d'équipement). Une autre, essentielle dans le cadre de cette résolution, est celle de la valorisation relative des coûts d'équipement et de routage.

Il faut pour tout cela prendre le temps d'une réflexion algorithmique et surtout celui de l'expérimentation.

5.2 Réalités non prises en compte

5.2.1 Dispersion du trafic

Nous pensons notamment à la limitation du nombre de chemins par demande, qui est une réalité en télécommunication, mais que notre modèle n'intègre pas pour cause de non linéarité. Aucun problème de dépassement ne s'est présenté lors des tests effectués dans notre cadre d'application, mais rien ne nous permet d'en conclure un bon comportement naturel des routages : il suffit pour s'en dissuader d'imaginer une configuration critique où il resterait une demande à acheminer qu'il serait possible de disperser, appel par appel, sur différents chemins.

5.2.2 Dimensionnement faussé

Une autre réalité forte est la non linéarité de la loi de dimensionnement : en supposant le contraire, nous faussons la justesse et pire, la faisabilité des solutions obtenues. Pour illustration, considérons 10 faisceaux de 1 MIC et 1 faisceau de 10 MIC : avec notre hypothèse, les deux solutions permettent de transiter le même nombre $10 \times 1/\tau$ de communications, alors qu'en réalité, selon la loi d'ergang, la première configuration achemine 200 appels (20 par MIC) contre 270 (27 par MIC) pour la seconde ! Nous nous permettons cependant de poser cette hypothèse, pensant d'une part qu'il est dans l'intérêt économique de créer de grosses liaisons en général, sachant d'autre part que la loi d'ergang (mesure effective du trafic) tend à s'aplanir quand la capacité augmente. C'est malgré tout un problème à prendre en considération, si ce n'est lors de la création (discrimination de coûts), lors de l'évaluation de la solution.

5.3 Complexité en taille du problème

L'objet de cette section est montrer par le biais de la présentation d'un cas particulier favorable combien la complexité du cas général est grande.

5.3.1 Quand faisceaux et arêtes coïncident

Si l'utilisation de faisceaux mixtes permettant la circulation conjointe des deux sens de trafic est permise, il n'est plus besoin de distinguer un faisceau pour chaque sens de trafic (le dimensionnement se fait sur la somme des trafics entrant et sortant), ce qui limite l'augmentation de la taille du problème. Plus encore, si tous les nœuds sont des commutateurs, alors liens et faisceaux peuvent coïncider. En ce cas, supposant que les coûts de routage puissent s'exprimer en fonction linéaire du trafic sur les liens (ce qui est généralement le cas), les trafics sur les liens remplaceraient les trafics sur les chemins comme variables de décision pour le routage des demandes.

Soient respectivement $\vec{\gamma}'$ et $\vec{y}'$ les vecteurs de coût et de trafic par lien par demande, C' et B' les matrices d'incidence demandes/trafics et liens/trafics, une nouvelle expression du problème original $(\mathcal{P}')$ pourrait être

$$(\mathcal{P}') \quad \begin{cases} \min_{\vec{y}', \vec{c}} & Z_{\mathcal{P}'} = \alpha(\vec{c}) + \vec{\gamma}' \cdot \vec{y}' \\ \text{s.c.} & \begin{cases} C' \cdot \vec{y}' \geq \vec{d} & (1) \\ B' \cdot \vec{y}' \leq \vec{c} & (2) \\ \vec{c} \in \mathbb{N}^m & (i) \\ \vec{y}' \in \mathbb{R}^q & (ii) \end{cases} \end{cases}$$

$(\mathcal{P}')$ est un programme linéaire en nombres entiers de taille *raisonnable*: avec la disparition des variables de capacité sur les faisceaux et l'expression du trafic en fonction des liens au lieu des chemins, le nombre de variables redevient polynomial en le nombre de sommets. Mais on peut encore réduire l'expression de $(\mathcal{P}')$. Soient $\dim$ et DIM les fonctions de dimensionnement définies comme suit

$$\begin{aligned} \dim : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{N} & tr &\mapsto \lceil \tau * tr \rceil \\ DIM : \mathbb{R}^m &\rightarrow \mathbb{N}^m & \vec{y}' &\mapsto \vec{c} = DIM(\vec{y}') \quad c_i = \dim\left((B' \cdot \vec{y}')_i\right) \quad i = 1, \dots, m \end{aligned}$$

$(\mathcal{P}')$ se ramène alors à un problème de flot classique (Π') :

$$(\Pi') \quad \begin{cases} \min_{\vec{y}'} & Z_{\Pi'} = (\alpha \circ DIM)(\vec{y}') + \vec{\gamma}' \cdot \vec{y}' \\ \text{s.c.} & \begin{cases} C \cdot \vec{y}' \geq \vec{d} & (1) \\ \vec{y}' \in \mathbb{R}^m & (ii) \end{cases} \end{cases}$$

La difficulté de résolution de (Π') va essentiellement dépendre de la composante $\alpha \circ DIM$ de la fonction de coût. Remarquons cependant que même sous ces hospices favorables, il s'agit de problèmes très difficiles à résoudre. Citons pour illustration la grande sous-famille des problèmes de multiflots à fonctions de coûts en escaliers (*cf.*, [4] et [5]).

5.3.2 Taille du problème de multiflot relatif aux arêtes

On note toujours respectivement n , n_c , m et r les nombres de sommets, commutateurs, liens et demandes. Soit q' le nombre de variables de trafics sur les arêtes, on a :

$$\begin{aligned} r &= n_c \times (n_c - 1) \approx n^2 \\ m &= \binom{n}{2} \approx n^2 \end{aligned}$$

i.e., $q' \leq r * m \approx n^4$ ($q' = r * m$ si chaque demande peut traverser chaque arête).

Le nombre de variables du problème de multiflot exprimé relativement aux arêtes est donc polynomial en $O(n^4)$.

6 Conclusion

Différentes questions sont ouvertes mais ce qu'il nous faudrait avant tout, ce sont des expérimentations. Nous ne pouvons en présenter actuellement pour cause de confidentialité des données. De ce fait, nous serions très intéressés par des jeux de données réelles pertinents pour notre modèle. Nous pensons cependant que ce travail, malgré les résistances et le manque d'expérimentations, présente certains intérêts, dont celui essentiel de faire jurisprudence en la matière :

accordons lui sa valeur d'exemple. Notre but est avant tout celui de présenter un cadre de réflexion, et non pas une solution, les solutions devant vraisemblablement être fortement liées à la réalité propre au problème traité. Nos écueils nous auront au moins permis d'ouvrir, à différents niveaux de spécificité, des voies de réflexion pour répondre aux besoins actuels en télécommunication.

L'avantage opérationnel de ce travail pourrait être sa grande généralité qui lui profère un fort potentiel d'adaptabilité: il faut travailler vite dans un monde très évolutif, il n'y a pas de donnée en télécommunication. Le modèle seul offre une voie de résolution quelles que soient les technologies (sous-entendu coûts associés) utilisées et l'alternance des optimisations en terme de trafic et de capacités permet une certaine souplesse dans le type de contraintes à considérer.

Remarquons pour conclure que la séparation réseau réalisable/routage n'est pas que le fait de l'homme d'étude, mais aussi celui des opérationnels: commutation et transmission sont traitées dans les entreprises de télécommunication au sein d'entités bien distinctes. En proposant une résolution globale, nous avons donc dressé le premier pont entre ces deux aspects d'une même réalité.

Références

- [1] R.K. Ahuja, T. Magnati, and J. Orlin. *Network Flows: Theory, Algorithms and Application*. Prentice Hall, 1993.
- [2] G. Dahl and M. Stoer. A cutting plane algorithm for multicommodity survivable network design problems. *INFORMS Journal on Computing*, 10(1), 1998.
- [3] L. Fratta, M. Gerla, and L. Kleinrock. The flow-deviation method: an approach to store-and-forward communication network design. *Network*, 3:97-133, 1973.
- [4] V. Gabrel, A. Knippel, and M. Minoux. Exact solution of multicommodity network optimization problems with general step cost functions. *Operations Research Letters*, 1999.
- [5] V. Gabrel and M. Minoux. Lp relaxations better than convexification for multicommodity network optimization problems with step increasing cost functions. *Acta Mathematica Vietnamica*, 22(1):123-145, 1997.
- [6] J.L. Kennington. A survey of linear cost multicommodity network flows. *Operations Research*, 26, 1978.
- [7] M. Minoux. Network synthesis and optimum design network problems: Models, solution methods and applications. *Networks*, 19:313-360, 1989.