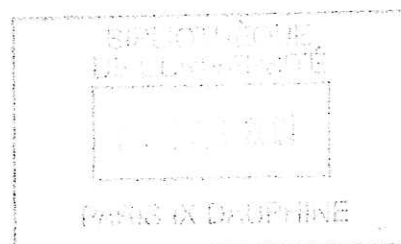


CAHIER DU LAMSADE

Laboratoire d'Analyse et Modélisation de Systèmes pour l'Aide à la Décision
(Université Paris-Dauphine)

Unité de Recherche Associée au CNRS ESA 7024

A



UNE CRITIQUE DE BASE DE L'APPROCHE DE SAATY : MISE EN QUESTION DE LA MÉTHODE DE LA VALEUR PROPRE MAXIMALE

CAHIER N° 175
février 2001

Carlos A. BANA E COSTA ¹
Jean-Claude VANSNICK ²

reçu : août 2000.

¹ *Department of Operational Research, London School of Economics, Houghton Street, London WC2A 2AE, UK (c.bana@lse.ac.uk).*

² *Université de Mons-Hainaut, F.W.S.E., Place du Parc, 20 – 7000 Mons, Belgique (Jean-Claude.Vansnick@umh.ac.be).*

TABLE DES MATIÈRES

	<u>Pages</u>
Abstract	1
Résumé	1
1. Aperçu de l'approche de Saaty	2
2. Objectif du papier	4
3. Exemples de non respect de la condition fondamentale de mesurage	5
4. Analyse d'un exemple de Saaty	9
5. Discussion de la signification du "Rapport d'Inconsistance"	12
6. Conclusion	13
Références	13

A fundamental criticism to Saaty's use of the eigenvalue procedure to derive priorities

Carlos A. BANA E COSTA¹

Jean-Claude VANSNICK²

- ¹ Department of Operational Research, London School of Economics
Houghton Street, London WC2A 2AE, UK (e-mail: c.bana@lse.ac.uk)
et CEG-IST, Instituto Superior Técnico, Lisboa, PORTUGAL
- ² Université de Mons-Hainaut, F.W.S.E., Place du Parc, 20 – 7000 Mons,
BELGIQUE (e-mail: Jean-Claude.Vansnick@umh.ac.be)

Abstract

Many papers have been devoted to critical analyses of Saaty's Analytic Hierarchy Process, from various perspectives. However, as far as we know, nobody has addressed a fundamental problem in using the principal eigenvector of a positive pairwise comparison matrix to derive priorities: its violation of an elementary measurement condition stated in this paper. Besides the discussion of this problem, we also discuss the meaning of Saaty's Inconsistency Ratio.

Key-words

Analytic Hierarchy Process, Measurement condition, Consistency.

Une critique de base de l'approche de Saaty: mise en question de la méthode de la valeur propre maximale

Résumé

De multiples articles ont déjà été consacrés à une étude critique de l'approche de Saaty. A notre connaissance cependant, aucun ne s'est intéressé à un problème fondamental lié à la technique utilisée par Saaty pour obtenir les priorités (méthode de la valeur propre maximale) : la violation d'une condition élémentaire de mesurage que nous présentons dans ce papier. Outre la discussion de ce problème, cet article examine aussi la signification du "Rapport d'Inconsistance" utilisé par Saaty.

Mots-clés

Analytic Hierarchy Process, Condition de mesurage, Consistance.

1. Aperçu de l'approche de Saaty

Soit $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ un ensemble d'éléments et PV un point de vue c'est-à-dire une caractéristique ou une propriété de ces éléments à laquelle une personne J s'intéresse – par exemple X pourrait être un ensemble de voitures et PV le confort de ces voitures. Comment peut-on aider J à quantifier le degré relatif avec lequel chaque élément de X possède à ses yeux la propriété PV – ce que nous appellerons, en conformité avec Saaty (1977), « intensité relative » ou « priorité » de chaque élément de X eu égard à PV ?

La procédure proposée par Saaty en réponse à cette question consiste d'abord à demander à J de comparer deux à deux les éléments de X eu égard à PV et de juger, chaque fois qu'un élément x_i est au moins aussi prioritaire à ses yeux qu'un élément x_j , combien de fois x_i est plus prioritaire que x_j c'est-à-dire quel est le rapport de priorité de x_i sur x_j (nombre que nous noterons w_{ij}). J peut exprimer ce jugement de deux manières différentes :

- soit numériquement en donnant un nombre réel entre 1 et 10 (cf. Saaty, 1989) – par exemple, si x_i est une Chevrolet et x_j une Lada et si, aux yeux de J, une Chevrolet est 6 fois plus confortable qu'une Lada, on aura $w_{ij} = 6$.
- soit verbalement en choisissant l'une des 5 expressions suivantes :
 - x_i est aussi prioritaire que x_j (x_i et x_j sont également prioritaires),
 - x_i est modérément plus prioritaire que x_j ,
 - x_i est fortement plus prioritaire que x_j ,
 - x_i est très fortement plus prioritaire que x_j ,
 - x_i est extrêmement plus prioritaire que x_j

ou une expression intermédiaire entre celles-ci (au total, 9 possibilités différentes de réponse verbale sont donc offertes à J). Afin d'obtenir un nombre w_{ij} qui exprime le rapport de priorité de x_i sur x_j , Saaty utilise alors la table de correspondance reprise dans le Tableau 1 – par exemple, si x_i est une Peugeot et x_j une Opel et si, aux yeux de J, une Peugeot est modérément plus confortable qu'une Opel, on aura $w_{ij} = 3$.

Tableau 1 : Correspondance entre « expressions verbales » et « nombres »

Expressions verbales	Nombres associés
égale	1
égale à modérée	2
modérée	3
modérée à forte	4
forte	5
forte à très forte	6
très forte	7
très forte à extrême	8
extrême	9

Suite au questionnaire, Saaty peut ainsi construire une matrice positive réciproque (dont les lignes et les colonnes correspondent respectivement aux éléments $x_1, x_2, \dots, x_n$ de X) en plaçant, à l'intersection de la ligne x_i et de la colonne x_j , la valeur :

$$\begin{cases} w_{ij} & \text{si } x_i \text{ est au moins aussi prioritaire que } x_j \\ 1/w_{ij} & \text{si } x_j \text{ est au moins aussi prioritaire que } x_i \end{cases}$$

Par exemple, si nous supposons que, pour tout $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$, x_i est plus prioritaire que x_j si et seulement si $i < j$, on obtiendrait la matrice positive réciproque suivante :

$$W = \begin{pmatrix} 1 & w_{12} & \dots & w_{1n} \\ 1/w_{12} & 1 & \dots & w_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1/w_{1n} & 1/w_{2n} & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Pour associer à chaque élément x_i une « priorité » – valeur numérique que nous noterons $w(x_i)$ – Saaty calcule alors la valeur propre maximale $\lambda_{\max}$ de la matrice W et détermine le vecteur propre normalisé correspondant à cette valeur propre : les composantes de ce vecteur propre sont les $w(x_i)$. L'échelle numérique $w : X \rightarrow \mathbb{R}$ ainsi obtenue est une échelle de rapport.

La méthode de la valeur propre maximale que Saaty utilise pour passer de la matrice W à l'échelle de priorité jouit de la propriété intéressante suivante : si les réponses de J vérifient, pour tout $i < j < k$, la condition (de consistance cardinale) $w_{ij} \cdot w_{jk} = w_{ik}$, alors les $w(x_i)$ obtenus sont tels que, pour tout $i < j$, $w_{ij} = w(x_i)/w(x_j)$. Cependant, une telle consistance a peu de chances de se rencontrer en pratique ; en particulier, elle est violée dès l'instant où $w_{ij} \cdot w_{jk} > 10$, ce qui est une situation courante. Aussi, Saaty a-t-il introduit un « test de consistance » pour prévenir du danger de calculer des priorités dans des cas d'inconsistance inacceptable. Pour cela, il a bâti un indice destiné à mesurer l'inconsistance de la matrice W et un « Rapport d'Inconsistance » à propos duquel on peut trouver dans le logiciel *Expert Choice* – qui met en oeuvre l'approche de Saaty – le commentaire suivant : « An Inconsistency Ratio of .1 or more may warrant some investigation ». En d'autres termes, un « Rapport d'Inconsistance » dont la valeur est de 0.1 ou moins peut être considéré comme acceptable.

Lorsqu'on est en présence de plusieurs PV, Saaty propose de les structurer sous la forme d'une « hiérarchie » où le niveau le plus haut correspond à l'objectif général et le niveau le plus bas représente les éléments à comparer. Les PV sont organisés dans des niveaux intermédiaires. La procédure décrite précédemment est alors appliquée de façon répétitive, soit pour calculer un vecteur de priorités des éléments par rapport à chaque PV au niveau intermédiaire inférieur, soit pour calculer un vecteur de poids pour chaque groupe de PV aux différents niveaux de la hiérarchie. La synthèse de toutes ces informations est alors réalisée de bas en haut par agrégations additives successives, ce qui conduit à un vecteur de priorités globales des éléments. Cette méthode est connue sous le nom de AHP (*Analytic Hierarchy Process*).

Depuis que Saaty a proposé sa méthode (Saaty, 1977 et 1980), de nombreuses applications de AHP à des situations réelles ont été réalisées

(cf. Zahedi, 1986; Golden *et al.*, 1989; Shim, 1989; Vargas, 1990) et le logiciel *Expert Choice* est devenu populaire. Parallèlement, AHP a très souvent été critiquée dans la littérature et cela sous différents angles (voir, entre autres, Watson et Freeling, 1982 et 1983; Belton et Gear, 1983 et 1985; Holder, 1990; Dyer, 1990a et b; Barlizai et Golany, 1994; Salo et Hämäläinen, 1997). Saaty a toujours répondu systématiquement à ces critiques (voir, par exemple, Saaty *et al.*, 1983; Saaty et Vargas, 1984, Saaty, 1990 et 1997) et, pour l'essentiel, il n'a pas modifié sa méthode originale.

2. Objectif du papier

Lors d'un processus de quantification d'une propriété (que peuvent posséder, à des degrés divers, les éléments d'un ensemble X aux yeux d'une personne J), les nombres que l'on construit deviennent porteurs d'une signification en termes de la propriété étudiée. Cette signification dépend bien sûr du type d'échelle auquel le processus de quantification aboutit ; ainsi par exemple, si l'échelle obtenue est une échelle ordinale, la comparaison (par rapport à la relation $>$) de deux nombres de l'échelle sera signifiante ; si l'échelle obtenue est une échelle de rapport, le rapport de deux nombres de cette échelle aura une signification absolue.

Comme la construction de l'échelle numérique s'effectue sur la base de jugements de J (généralement fournis en réponse à un questionnaire qui fait partie intégrante du processus de quantification), il nous paraît essentiel que la technique utilisée pour obtenir cette échelle soit telle que les énoncés signifiants qu'on peut en déduire soient conformes aux jugements de J (et même, plus généralement, à tout ce qui résulte logiquement de ces jugements). Ainsi, dans le cas de la procédure de Saaty, étant donné quatre éléments a, b, c et d avec a plus prioritaire que b et c plus prioritaire que d , s'il résulte des jugements de J que le rapport de priorité de a sur b est plus grand que le rapport de priorité de c sur d (par exemple parce que J a déclaré que a est fortement plus prioritaire que b et que c est modérément plus prioritaire que d), alors il nous paraît indispensable que l'échelle numérique $w : X \rightarrow \mathbb{R}$ que Saaty construit pour quantifier la priorité de ces éléments soit telle que

$$\frac{w(a)}{w(b)} > \frac{w(c)}{w(d)}$$

(notons que, comme w est une échelle de rapport, cet énoncé est signifiant).

L'objectif essentiel de ce papier est de montrer qu'une telle exigence n'est pas toujours respectée par la procédure de Saaty. En d'autres termes, nous allons montrer que la méthode de la valeur propre maximale utilisée par Saaty pour quantifier l'idée de priorité ne satisfait pas nécessairement la condition suivante :

CONDITION FONDAMENTALE DE MESURAGE : Pour tous les éléments a, b, c, d de X tels que a est plus prioritaire que b et c est plus prioritaire que d (aux yeux de J et eu égard à PV), s'il résulte des réponses de J que le nombre de fois que a est plus prioritaire que b est plus grand que le nombre de fois que c est plus prioritaire que d , alors l'échelle numérique $w : X \rightarrow \mathfrak{R}$ quantifiant la priorité des éléments de X doit être telle que $w(a)/w(b) > w(c)/w(d)$.

Parfois, les jugements de J sont tels qu'il n'existe pas d'échelle numérique $w : X \rightarrow \mathfrak{R}$ satisfaisant cette condition fondamentale de mesure, c'est-à-dire qu'il y a incompatibilité entre les jugements de J et l'obtention d'une échelle de rapport. A nos yeux, il est très important de pouvoir détecter ce type de situation afin de pouvoir entamer une discussion avec J . Un objectif secondaire de ce papier est de montrer que la valeur du « Rapport d'Inconsistance » de Saaty n'est pas une base possible pour effectuer cette détection car sa valeur peut être plus faible en cas d'impossibilité de satisfaire la condition fondamentale de mesure que lorsque la chose est possible.

Le papier est organisé comme suit. Les sections 3 et 4 sont consacrées à la présentation d'exemples de non respect, par la procédure de Saaty, de la condition fondamentale de mesure alors que les jugements de J sont pourtant tels que le respect de cette condition est possible. Dans la section 5, nous donnons un exemple de jugements incompatibles avec l'obtention (sans modification de ces jugements) d'une échelle de rapport et nous nous intéressons à la valeur du « Rapport d'Inconsistance » dans ce cas. Enfin, la section 6 constitue une brève conclusion.

3. Exemples de non respect de la condition fondamentale de mesure

Nous présentons dans cette section deux exemples prouvant que, aussi bien dans le cas où J répond verbalement au questionnement de Saaty que dans celui où il répond numériquement, la condition fondamentale de mesure énoncée en section 2 peut ne pas être respectée par l'échelle de Saaty alors qu'il est pourtant possible de la satisfaire.

Exemple 1 (cas de réponses verbales)

Soit $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$ et supposons que les réponses fournies par J lors des comparaisons par paires des éléments de X soient les suivantes :

$\{x_1, x_2\}$	x_1 entre aussi et modérément plus prioritaire que x_2
$\{x_1, x_3\}$	x_1 modérément plus prioritaire que x_3
$\{x_1, x_4\}$	x_1 fortement plus prioritaire que x_4
$\{x_1, x_5\}$	x_1 extrêmement plus prioritaire que x_5
$\{x_2, x_3\}$	x_2 entre aussi et modérément plus prioritaire que x_3
$\{x_2, x_4\}$	x_2 entre modérément et fortement plus prioritaire que x_4
$\{x_2, x_5\}$	x_2 extrêmement plus prioritaire que x_5
$\{x_3, x_4\}$	x_3 entre aussi et modérément plus prioritaire que x_4
$\{x_3, x_5\}$	x_3 entre très fortement et extrêmement plus prioritaire que x_5
$\{x_4, x_5\}$	x_4 très fortement plus prioritaire que x_5 .

Compte tenu de la correspondance entre « expressions verbales » et « nombres » utilisée par Saaty (voir Tableau 1), ces réponses permettent de former la matrice positive réciproque

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 & 9 \\ 1/2 & 1 & 2 & 4 & 9 \\ 1/3 & 1/2 & 1 & 2 & 8 \\ 1/5 & 1/4 & 1/2 & 1 & 7 \\ 1/9 & 1/9 & 1/8 & 1/7 & 1 \end{pmatrix}$$

dont le vecteur propre normalisé correspondant à la valeur propre maximale est

$$\begin{pmatrix} 0.426 \\ 0.281 \\ 0.165 \\ 0.101 \\ 0.027 \end{pmatrix}.$$

En d'autres termes, compte tenu des réponses fournies par J, la méthode de Saaty attribue aux éléments de X les priorités

$$w(x_1) = 0.426$$

$$w(x_2) = 0.281$$

$$w(x_3) = 0.165$$

$$w(x_4) = 0.101$$

$$w(x_5) = 0.027$$

En particulier, nous avons donc

$$\frac{w(x_1)}{w(x_4)} \approx 4.218 \quad \text{et} \quad \frac{w(x_4)}{w(x_5)} \approx 3.741$$

c'est-à-dire que

$$\frac{w(x_1)}{w(x_4)} > \frac{w(x_4)}{w(x_5)}.$$

Or, J a déclaré que "x₄ est très fortement plus prioritaire que x₅" et que "x₁ est fortement plus prioritaire que x₄", d'où l'on déduit que, aux yeux de J :

le rapport de priorité de x₄ sur x₅
est plus grand que
le rapport de priorité de x₁ sur x₄.

La technique proposée par Saaty pour déterminer les priorités ne respecte donc pas, dans le cas de l'exemple 1, la condition fondamentale de mesurage. Pourtant, il était tout à fait possible de la respecter. Il suffit pour s'en convaincre d'examiner l'échelle w* suivante :

$$\begin{aligned}
w^*(x_1) &= 0.385 \\
w^*(x_2) &= 0.275 \\
w^*(x_3) &= 0.195 \\
w^*(x_4) &= 0.125 \\
w^*(x_5) &= 0.020
\end{aligned}$$

qui satisfait, comme on peut aisément le vérifier à l'aide du Tableau 2, la condition fondamentale de mesurage¹.

Tableau 2 : Exemple 1 – valeurs des rapports $w^*(x_i)/w^*(x_j)$

Catégories verbales relatives aux rapports de priorité	Couple(s) (x_i, x_j) appartenant à la catégorie et valeur du rapport $w^*(x_i)/w^*(x_j)$		
entre égale et modérée	$(x_1, x_2) : 1.40$	$(x_2, x_3) : 1.41$	$(x_3, x_4) : 1.56$
modérée		$(x_1, x_3) : 1.96$	
entre modérée et forte		$(x_2, x_4) : 2.20$	
forte		$(x_1, x_4) : 3.08$	
entre forte et très forte		$\emptyset$	
très forte		$(x_4, x_5) : 6.25$	
entre très forte et extrême		$(x_3, x_5) : 9.75$	
extrême	$(x_2, x_5) : 14.25$	$(x_1, x_5) : 19.25$	

Signalons encore que la valeur du « Rapport d'Inconsistance » associée à l'exemple 1 est égale à 0.05 (valeur donnée par le logiciel *Expert Choice*). Comme cette valeur est bien inférieure à 0.10, les jugements de l'exemple 1 paraissent tout à fait acceptables dans l'optique de Saaty.

Exemple 2 (cas de réponses numériques)

Soit $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ et supposons que les réponses fournies par J lors des comparaisons par paires des éléments de X soient les suivantes.

$\{x_1, x_2\}$	x_1 est 2.5 fois plus prioritaire que x_2
$\{x_1, x_3\}$	x_1 est 4 fois plus prioritaire que x_3
$\{x_1, x_4\}$	x_1 est 9.5 fois plus prioritaire que x_4
$\{x_2, x_3\}$	x_2 est 3 fois plus prioritaire que x_3
$\{x_1, x_4\}$	x_2 est 6.5 fois plus prioritaire que x_4
$\{x_3, x_4\}$	x_3 est 5 fois plus prioritaire que x_4 .

Ces réponses permettent de former la matrice positive réciproque :

¹ La condition fondamentale de mesurage est une condition se présentant sous la forme "si ... alors" et non sous la forme "si et seulement si" car, lorsque par exemple J s'est exprimé verbalement de la même manière à propos du [rapport de priorité de x_1 sur x_2] et du [rapport de priorité de x_3 sur x_4] (" x_1 est entre aussi et modérément plus prioritaire que x_2 " et " x_3 est entre aussi et modérément plus prioritaire que x_4 "), il ne semble pas raisonnable d'imposer que

$$\frac{w(x_1)}{w(x_2)} = \frac{w(x_3)}{w(x_4)}$$

étant donné le caractère un peu vague lié au mode d'expression utilisé.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2.5 & 4 & 9.5 \\ 1/2.5 & 1 & 3 & 6.5 \\ 1/4 & 1/3 & 1 & 5 \\ 1/9.5 & 1/6.5 & 1/5 & 1 \end{pmatrix}$$

dont le vecteur propre normalisé correspondant à la valeur propre maximale est

$$\begin{pmatrix} 0.533 \\ 0.287 \\ 0.139 \\ 0.041 \end{pmatrix}.$$

En d'autres termes, compte tenu des réponses fournies par J, la méthode de Saaty attribue aux éléments de X les priorités

$$\begin{aligned} w(x_1) &= 0.533 \\ w(x_2) &= 0.287 \\ w(x_3) &= 0.139 \\ w(x_4) &= 0.041 \end{aligned}$$

Le Tableau 3 présente, pour tout $i, j \in \{1, 2, 3, 4\}$ avec $i < j$, d'une part la valeur numérique w_{ij} fournie par J concernant le rapport de priorité de x_i sur x_j et, d'autre part, la valeur du rapport $w(x_i)/w(x_j)$.

Tableau 3 : Exemple 2 – valeurs de w_{ij} et de $w(x_i)/w(x_j)$

	w_{ij}	$w(x_i)/w(x_j)$
$\{x_1, x_2\}$	2.5	1.86
$\{x_1, x_3\}$	4	3.83
$\{x_1, x_4\}$	9.5	13
$\{x_2, x_3\}$	3	2.06
$\{x_2, x_4\}$	6.5	7
$\{x_3, x_4\}$	5	3.39

Il n'est évidemment pas surprenant de constater que les valeurs des rapports $w(x_i)/w(x_j)$ ne coïncident pas avec les valeurs numériques w_{ij} fournies par J (car ses réponses ne sont pas consistantes) mais il est par contre troublant que ne soit pas respecté l'ordre que l'on peut déduire des réponses de J concernant la grandeur des rapports de priorité, à savoir :

[rapport de priorité de x_1 sur x_4 ($w_{14} = 9.5$)]
plus grand que
[rapport de priorité de x_2 sur x_4 ($w_{24} = 6.5$)]
plus grand que
[rapport de priorité de x_3 sur x_4 ($w_{34} = 5$)]
plus grand que
[rapport de priorité de x_1 sur x_3 ($w_{13} = 4$)]

plus grand que
[rapport de priorité de x_2 sur x_3 ($w_{23} = 3$)]
plus grand que
[rapport de priorité de x_1 sur x_2 ($w_{12} = 2.5$)]

En effet

$$\frac{w(x_3)}{w(x_4)} (= 3.39) < \frac{w(x_1)}{w(x_3)} (= 3.83).$$

La condition fondamentale de mesurage n'est donc pas respectée dans le cas de l'exemple 2. Or, il était tout à fait possible de la respecter comme le prouve le vecteur de priorités suivant :

$$\begin{aligned} w^*(x_1) &= 0.48 \\ w^*(x_2) &= 0.32 \\ w^*(x_3) &= 0.16 \\ w^*(x_4) &= 0.04 \end{aligned}$$

En effet

$$\begin{aligned} \frac{w^*(x_1)}{w^*(x_4)} (= 12) &> \frac{w^*(x_2)}{w^*(x_4)} (= 8) > \frac{w^*(x_3)}{w^*(x_4)} (= 4) > \frac{w^*(x_1)}{w^*(x_3)} (= 3) \\ &> \frac{w^*(x_2)}{w^*(x_3)} (= 2) > \frac{w^*(x_1)}{w^*(x_2)} (= 1.5). \end{aligned}$$

Par ailleurs, signalons que la valeur du « Rapport d'Inconsistance » associée à l'exemple 2 est égale à 0.05 (valeur donnée par le logiciel *Expert Choice*). Comme cette valeur est bien inférieure à 0.10, les jugements de l'exemple 2 paraissent tout à fait acceptables dans l'optique de Saaty.

4. Analyse d'un exemple de Saaty

Nous analysons ci-dessous le non respect de la condition fondamentale de mesurage dans un exemple tiré des travaux de Saaty. Cet exemple est l'un de ceux présentés par Saaty pour valider empiriquement sa méthode dans ses deux premières grandes publications concernant AHP, à savoir (Saaty, 1977, pages 254-256) et (Saaty, 1980, pages 40-41). Saaty désirait montrer que, pour une matrice de comparaisons verbales par paires obtenue à propos de la richesse de sept pays, les priorités données par sa méthode étaient remarquablement proches des valeurs normalisées des produits nationaux bruts (PNB) de ces pays.

Les pays considérés sont (notations de Saaty) « U.S., U.S.S.R., China, France, U.K., Japan and W. Germany » et la matrice positive réciproque dérivée des jugements verbaux recueillis que présente Saaty est la suivante :

	U.S.	U.S.S.R.	China	France	U.K.	Japan	W.Germany
U.S.	1	4	9	6	6	5	5
U.S.S.R.	$\frac{1}{4}$	1	7	5	5	3	4
China	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{7}$	1	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{5}$
France	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{5}$	5	1	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
U.K.	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{5}$	5	1	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
Japan	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{3}$	7	3	3	1	2
W.Germany	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{4}$	5	3	3	$\frac{1}{2}$	1

En utilisant le logiciel *Expert Choice*, on obtient les priorités

$$\begin{aligned}
 w(\text{U.S.}) &= 0.427 \\
 w(\text{U.S.S.R.}) &= 0.230 \\
 w(\text{China}) &= 0.021 \\
 w(\text{France}) &= 0.052 \\
 w(\text{U.K.}) &= 0.052 \\
 w(\text{Japan}) &= 0.123 \\
 w(\text{W. Germany}) &= 0.094.
 \end{aligned}$$

Ces valeurs sont celles données dans (Saaty, 1980) ; elles sont un peu différentes de celles apparaissant dans (Saaty, 1977) : 0.429, 0.231, 0.021, 0.053, 0.053, 0.119, et 0.095, respectivement. Cependant, on peut observer, dans chacun des cas, les mêmes violations de la condition fondamentale de mesurage. Parmi les 5 violations qui existent, nous en présentons deux ci-dessous.

① Il résulte des jugements fournis que

[rapport de priorité de U.S. sur U.S.S.R. (4)]
plus grand que
[rapport de priorité de Japan sur France (3)].

Or,
$$\frac{w(\text{U.S.})}{w(\text{U.S.S.R.})} \approx 1.857 \quad \text{et} \quad \frac{w(\text{Japan})}{w(\text{France})} \approx 2.365$$

c'est-à-dire que
$$\frac{w(\text{U.S.})}{w(\text{U.S.S.R.})} < \frac{w(\text{Japan})}{w(\text{France})}.$$

② Il résulte également des jugements fournis que

[rapport de priorité de Japan sur China (7)]
plus grand que
[rapport de priorité de U.S. sur U.K. (6)].

Or, $\frac{w(\text{Japan})}{w(\text{China})} \approx 5.857$ et $\frac{w(\text{U.S.})}{w(\text{U.K.})} \approx 8.212$

c'est-à-dire que $\frac{w(\text{Japan})}{w(\text{China})} < \frac{w(\text{U.S.})}{w(\text{U.K.})}$.

Bien que l'on observe dans ce cas de nombreuses violations de la condition fondamentale de mesurage en utilisant les priorités déterminées par la technique de Saaty, il était pourtant possible de respecter cette condition comme, par exemple, avec les valeurs suivantes :

$$\begin{aligned} w^*(\text{U.S.}) &= 0.414 \\ w^*(\text{U.S.S.R.}) &= 0.217 \\ w^*(\text{China}) &= 0.019 \\ w^*(\text{France}) &= 0.069 \\ w^*(\text{U.K.}) &= 0.069 \\ w^*(\text{Japan}) &= 0.117 \\ w^*(\text{W. Germany}) &= 0.095. \end{aligned}$$

Le Tableau 4 permet de vérifier que la condition fondamentale de mesurage est respectée par l'échelle w^* .

Signalons encore que, dans le cas de l'exemple de Saaty traité dans cette section, le « Rapport d'Inconsistance » a une valeur de 0.08.

Tableau 4 : Vérification de la condition fondamentale de mesurage.

Catégories verbales relatives aux rapports de priorité	Couple(s) (x_i, x_j) appartenant à la catégorie et valeur du rapport $w^*(x_i)/w^*(x_j)$
entre égale et modérée	(Japan, W. Germany) : 1.23
modérée	(W. Germany, France) : 1.38 (W. Germany, U.K.) : 1.38 (Japan, France) : 1.70 (Japan, U.K.) : 1.70 (U.S.S.R., Japan) : 1.85
entre modérée et forte	(U.S., U.S.S.R.) : 1.91 (U.S.S.R., W. Germany) : 2.28
forte	(U.S.S.R., France) : 3.14 (U.S.S.R., U.K.) : 3.14 (U.S., Japan) : 3.54 (U.K., China) : 3.63 (France, China) : 3.63 (U.S., W. Germany) : 4.36
entre forte et très forte	(U.S., France) : 6.00 (U.S., U.K.) : 6.00
très forte	(Japan, China) : 6.16 (U.S.S.R., China) : 11.42
entre très forte et extrême	Ø
extrême	(U.S., China) : 21.79

5. Discussion de la signification du « Rapport d'Inconsistance »

Dans cette section, nous allons voir ce qui se passe au niveau du « Rapport d'Inconsistance » dans le cas d'un exemple tel qu'il est impossible de respecter la condition fondamentale de mesurage, c'est-à-dire lorsque les jugements de J ne sont pas compatibles avec l'obtention d'une échelle de rapport sur l'ensemble des éléments considérés.

Soit $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$ et supposons que les réponses fournies par J lors des comparaisons par paires des éléments de X soient les suivantes:

$\{x_1, x_2\}$	x_1 entre aussi et modérément plus prioritaire que x_2
$\{x_1, x_3\}$	x_1 fortement plus prioritaire que x_3
$\{x_1, x_4\}$	x_1 très fortement plus prioritaire que x_4
$\{x_1, x_5\}$	x_1 extrêmement plus prioritaire que x_5
$\{x_2, x_3\}$	x_2 entre aussi et modérément plus prioritaire que x_3
$\{x_2, x_4\}$	x_2 modérément plus prioritaire que x_4
$\{x_2, x_5\}$	x_2 très fortement plus prioritaire que x_5
$\{x_3, x_4\}$	x_3 modérément plus prioritaire que x_4
$\{x_3, x_5\}$	x_3 fortement plus prioritaire que x_5
$\{x_4, x_5\}$	x_4 entre aussi et modérément plus prioritaire que

x_5 .

Dans ce cas, il n'est pas possible de respecter la condition fondamentale de mesurage. En effet, pour respecter cette condition, on devrait simultanément avoir

$$1^\circ) \frac{w(x_1)}{w(x_3)} > \frac{w(x_2)}{w(x_4)}$$

car il résulte des réponses de J que

[rapport de priorité de x_1 sur x_3 (fortement plus prioritaire)]
plus grand que
[rapport de priorité de x_2 sur x_4 (modérément plus prioritaire)]

et

$$2^\circ) \frac{w(x_3)}{w(x_4)} > \frac{w(x_1)}{w(x_2)}$$

car il résulte des réponses de J que

[rapport de priorité de x_3 sur x_4 (modérément plus prioritaire)]
plus grand que
[rapport de priorité de x_1 sur x_2 (entre aussi et modérément plus prioritaire)].

Or, cela est impossible puisque le produit, membre à membre, de ces inégalités donne $\frac{w(x_1)}{w(x_4)} > \frac{w(x_1)}{w(x_4)}$.

Le logiciel *Expert Choice* fournit, dans le cas des jugements ci-dessus, une échelle numérique pour les priorités des éléments. Cependant, ce n'est pas tant cette échelle qui nous intéresse dans ce cas que la signification du « Rapport d'Inconsistance ». Vu le nom de cet indice, on pourrait s'attendre à ce qu'il révèle l'incompatibilité des jugements de J avec l'obtention, sans modification de ces jugements, d'une échelle de rapport sur X. Or, ce n'est pas du tout ce qui se passe. En effet, la valeur du « Rapport d'Inconsistance » est égale à 0.03, c'est-à-dire une valeur plus petite que dans les trois exemples précédents. Or, dans ce cas, il y a véritablement un problème important avec les jugements de J mais la valeur du « Rapport d'Inconsistance » ne permet pas de s'en douter. La signification de ce rapport ne semble dès lors pas très claire.

6. Conclusion

Dans ce papier, nous nous sommes intéressés aux fondements même de l'approche de Saaty, c'est-à-dire à la procédure utilisée pour obtenir un vecteur de priorités en présence d'un seul PV (méthode de la valeur propre maximale rappelée en section 1).

Bien que, sur le plan mathématique, cette méthode soit très élégante, nous avons montré qu'elle ne satisfaisait pas une condition de mesurage qui, à nos yeux, est fondamentale dans le cadre d'une étude d'aide à la décision, activité humaine où le respect des valeurs et des jugements est essentielle. Ainsi, indépendamment de toute autre critique, la méthode de Saaty présente, à notre avis, un très grave problème de fond en tant qu'outil d'aide à la décision. La critique que nous faisons dans cet article dépasse cependant largement la méthode de Saaty ; elle s'applique en fait à toute procédure déterminant un vecteur de priorités (à partir d'une matrice de jugements de comparaisons par paires) sur la base d'une technique mathématique qui n'intègre pas ou ne garantit pas que soit satisfaite ce que nous avons appelé la condition fondamentale de mesurage.

Références

- Barlitzai, J., Golany, B. (1994), "AHP rank reversal, normalization and aggregation rules", *INFOR*, 32 (57-64).
- Belton, V., Gear, A.E. (1983), "On a shortcoming of Saaty's method of analytic hierarchies", *Omega*, 11, 3 (228-230).
- Belton, V., Gear, A.E. (1985), "The legitimacy of rank reversal – a comment", *Omega*, 13, 3 (143-144).
- Dyer, J.S. (1990a), "Remarks on the Analytic Hierarchy Process", *Management Science*, 36, 3 (249-258).
- Dyer, J.S. (1990b), "A clarification of 'Remarks on the Analytic Hierarchy Process'", *Management Science*, 36, 3 (274-275).
- Golden, B.L., Wasil, E.A., Harker, P.T. (eds.) (1989), *The Analytic Hierarchy Process: Applications and Studies*, Springer-Verlag, New York.
- Holder, R. D. (1990), "Some comments on the Analytic Hierarchy Process", *Journal of the Operational Research Society*, 41, 11 (1073-1076).

- Saaty, T.L. (1977), "A scaling method for priorities in hierarchical structures", *Journal of Mathematical Psychology*, 15 (234-281).
- Saaty, T.L. (1980), *The Analytic Hierarchy Process*, McGraw-Hill, New York.
- Saaty, T.L. (1989), "Decision making, scaling, and number crunching", *Decision Sciences*, 20 (404-409).
- Saaty, T.L. (1990), "An exposition of the AHP in reply to the paper 'Remarks on the Analytic Hierarchy Process'", *Management Science*, 36, 3 (259-268).
- Saaty, T.L. (1997), "That is not the Analytic Hierarchy Process: what the AHP is and what it is not", *Journal of Multi-Criteria Decision Analysis*, 6 (324-335).
- Saaty, T.L., Vargas, L.G. (1984), "The legitimacy of rank reversal", *Omega*, 12, 5 (513-516).
- Saaty, T.L., Vargas, L.G., Wendell, R.E. (1983), "Assessing attribute weights by ratios", *Omega*, 11, 1 (9-12).
- Salo, A.A., Hämäläinen, R.P. (1997), "On the measurement of preferences in the Analytic Hierarchy Process", *Journal of Multi-Criteria Decision Analysis*, 6 (309-319).
- Shim, J.P. (1989), "Bibliography research on the Analytic Hierarchy Process (AHP)", *Socio-Economic Planning Sciences*, 23 (161-167).
- Vargas, L.G. (1990), "An overview of the Analytic Hierarchy Process and its applications", *European Journal of Operational Research*, 48 (2-8).
- Watson, S.R., Freeling, A.N.S. (1982), "Assessing attribute weights", *Omega*, 10, 6 (582-583).
- Watson, S.R., Freeling, A.N.S. (1983), "Comment on: Assessing attribute weights by ratios", *Omega*, 11, 1 (13).
- Zahedi, F. (1986), "The Analytic Hierarchy Process – A survey of the method and its applications", *Interfaces*, 16, 4 (96-108).