

CAHIER DU LAMSADE

Laboratoire d'Analyse et Modélisation de Systèmes pour l'Aide à la Décision

(Université Paris-Dauphine)

Equipe de Recherche Associée au C.N.R.S. N° 656



LES PROGRAMMES UTA Manuel d'utilisation

N° 24-1979



J. SISKOS

octobre 1979



B2. 1703-24

SOMMAIRE

	<u>Pages</u>
<u>ABSTRACT</u>	I
<u>RESUME</u>	I
I. <u>INTRODUCTION</u>	1
II. <u>PRESENTATION DU PROBLEME</u>	2
II.1 La fonction d'utilité-multiattribut - Notations	2
II.2 La préférence globale	5
II.3 Les données - Le problème	6
III. <u>SCHEMA DE RESOLUTION</u>	8
III.1 Le modèle UTA I	8
III.2 Le modèle UTA II	10
III.3 L'analyse post-optimale	12
IV. <u>LES CARACTERISTIQUES DES PROGRAMMES</u>	15
IV.1 La structure des programmes	15
IV.2 Caractéristiques et restrictions relatives à la résolution des programmes linéaires	17
IV.3 La complexité des algorithmes	20
V. <u>EXEMPLE D'APPLICATION ET UTILISATION DES PROGRAMMES</u>	21
V.1 Exemple d'application	21
V.2 Les entrées des programmes	26
V.3 Les sorties des programmes	28
VI. <u>REFERENCES</u>	34

ABSTRACT

This paper presents two programs (UTA programs) for assessing one or more additive value functions which are based on the explanation of a decision-maker's whollistic preference.

The models use the techniques and the post-optimality principle in linear programming.

Inputs and outputs of UTA programs are discussed and illustrated by an example.

RESUME

Ce cahier présente deux programmes (programmes UTA) de construction d'une ou plusieurs fonctions d'utilité additives fondées sur l'explication de la préférence globale d'un décideur.

Les modèles utilisent les techniques et le principe de la post-optimalité en programmation linéaire.

Les entrées et les sorties des programmes UTA sont discutées et illustrées par un exemple.

I. INTRODUCTION

L'agrégation des critères multiples en une fonction d'utilité unique conduit à une modélisation très restrictive des préférences du décideur. La construction d'une fonction d'utilité optimale force les préférences à obéir à des lois mathématiques très spécifiques et parfois contradictoires à la réalité du comportement humain.

Les méthodes UTA (UTilité Additive) que nous présentons dans la section III visent à appréhender les préférences d'un individu par la construction des fonctions d'utilité multiples ayant la forme additive.

Le problème posé (section II), nous exposons le principe et les caractéristiques des programmes UTA (sections III et IV) ainsi que leur mode d'utilisation (section V) concrétisé par application sur un exemple précis (*).

(*) Le lecteur intéressé par une application directe des programmes doit se reporter à la section V.2.

II. PRESENTATION DU PROBLEME

II.1 La fonction d'utilité-multiattribut - Notations

Considérons un ensemble d'actions A caractérisé et évalué sur la base de n critères $g_1, g_2, \dots, g_n$ définis sur A de telle sorte que le vecteur $\underline{g}(a) = (g_1(a), g_2(a), \dots, g_n(a))$, $a \in A$ contienne toute l'information propre à l'action a (cf. [19]).

Nous supposons que les critères sont définis sur des intervalles finis (discrets ou continus) G_i , $i = 1, 2, \dots, n$ délimitant les domaines des conséquences ou valeurs que prennent toutes les actions de A sur chaque critère. Nous appelons dans ce cas-là ensemble de conséquences de A l'ensemble $G(A) = \{\underline{g}(a) ; a \in A\}$ et espace produit de conséquences l'ensemble $G = \prod_{i=1}^n G_i = G_1 \times G_2 \times \dots \times G_n$ en admettant de représenter chaque G_i par des intervalles de la forme :

$$G_i = [\underline{g}_{i*}, g_{i*}^*]$$

avec $\underline{g}_{i*}$ et g_{i*}^* respectivement la conséquence la moins et la plus préférée de G_i .

Une fonction d'utilité, ou fonction de valeurs, est une fonction réelle, notée $u(\underline{g}) = u(g_1, g_2, \dots, g_n)$, $\underline{g} \in G$; son rôle est de préserver l'ordre sur G d'une préférence individuelle transitive. Si l'on désigne par P (ou $\succ$) la préférence et par I (ou $\sim$) l'indifférence, cette fonction est définie par les relations :

$$(1) \quad u(\underline{g}) > u(\underline{g}') \iff \underline{g} P \underline{g}'$$

$$(2) \quad u(\underline{g}) = u(\underline{g}') \iff \underline{g} I \underline{g}'$$

pour tout $\underline{g}$ et $\underline{g}'$ éléments de G .

Cette fonction, propre à un décideur, aussi complexe soit-elle, est toujours supposée décomposable (décomposition des préférences) sous la forme :

$$(3) \quad u(\underline{g}) = f[u_1(g_1), u_2(g_2), \dots, u_n(g_n)], \quad \underline{g} \in G.$$

Elle est considérée comme la fonction de n fonctions réelles $u_1, u_2, \dots, u_n$ définies respectivement sur les ensembles $G_1, G_2, \dots, G_n$ et nommées utilités partielles. Beaucoup de travaux sont consacrés à l'étude des différentes formes de f (additive, multiplicative, etc.) en avenir certain, probabilisable ou incertain. Citons, à titre d'exemple, les travaux de synthèse de R.L. KEENEY, H. RAIFFA (1976), de P. FISHBURN (1977) et de P.H. FARQUHAR (1977).

La distribution de valeurs $u[\underline{g}(a)]$, $a \in A$ définit sur l'ensemble d'alternatives A une relation préordinaire totale $\mathcal{R} = (P, I)$ dont la partie antisymétrique P est définie par les relations (1) et la partie symétrique I par les relations (2) (figure 1).

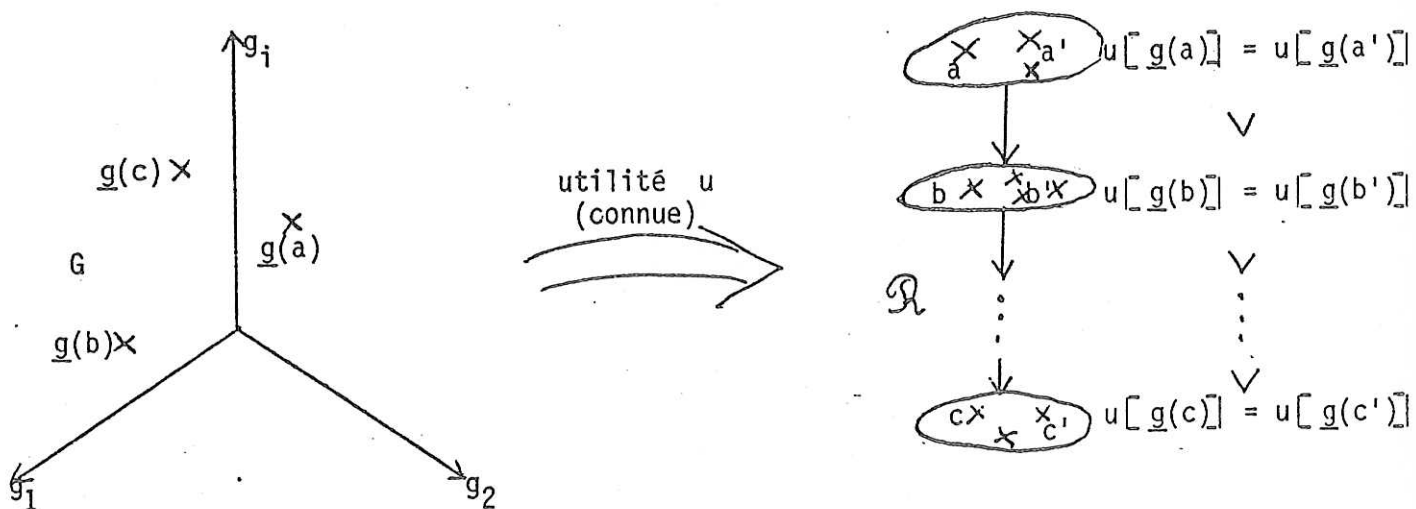


Figure 1 : Schéma d'agrégation de n critères par une fonction d'utilité

Une utilité est appelée additive si elle est de la forme :

$$(4) \quad u(\underline{g}) = u_1(g_1) + u_2(g_2) + \dots + u_n(g_n)$$

ou encore

$$u(\underline{g}) = \sum_{i=1}^n u_i(g_i), \quad \underline{g} \in G.$$

Une autre forme additive (pondérée)

$$(5) \quad u(\underline{g}) = p_1 u'_1(g_1) + p_2 u'_2(g_2) + \dots + p_n u'_n(g_n)$$

ou encore

$$u(\underline{g}) = \sum_{i=1}^n p_i u'_i(g_i), \quad \underline{g} \in G$$

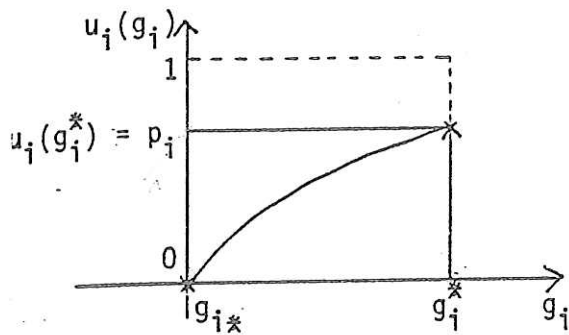
est équivalente à (4) dans la mesure où les valeurs $u'_i(g_i)$ sont normées (par exemple entre 0 et 1) à l'avance. Dans ce cas, nous n'avons qu'à poser

$$(6) \quad u'_i(g_i) = \frac{1}{p_i} u_i(g_i) \quad \text{pour tout } i = 1, 2, \dots, n$$

pour passer d'une forme à l'autre.

Les méthodes UTA exposées dans la section III estiment ces deux formes d'utilité sous les conditions de normalisation de la figure 2.

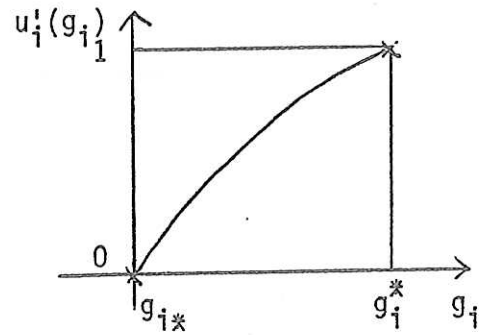
L'additivité dans les formules (4) et (5) est soumise à des conditions un peu restrictives concernant l'indépendance en valeur (ou indépendance au sens des préférences) de toute paire de critères par rapport aux critères qui restent. Cette question de l'interaction de deux critères indépendamment des valeurs ou des conséquences des autres a été l'objet des recherches de plusieurs théoriciens : G. DEBREU (1960), R.D. LUCE, J.M. TUKEY (1964) (utilité en avenir certain) et P. FISHBURN (1965), R. POLLAK (1967) (utilité-multiattribut espérée ou de Von NEUMANN-MORGENSTERN).



Forme (4)

$$u_i(g_{i*}) = 0$$

$$\sum_{i=1}^n u_i(g_i^*) = 1$$



Forme (5)

$$u'_i(g_{i*}) = 0$$

$$u'_i(g_i^*) = 1$$

$$\sum_{i=1}^n p_i = 1$$

Figure 2 : Conditions de normalisation des utilités partielles

u_i et u'_i pour tout $i = 1, 2, \dots, n$

II.2 La préférence globale

Avant de poser le problème auquel les méthodes UTA (UTilité Additive) prétendent fournir une solution, nous ouvrons une petite parenthèse pour donner quelques définitions et exemples de ce que nous entendons par préférence globale. Celle-ci est une relation sur un ensemble d'actions réelles ou fictives obtenues par un des modes suivants (Tableau 1) :

MODE	EXEMPLES
1. Observation des comportements individuels	. Choix des modes de transport par les voyageurs (choix modal) .. Achat de produits par les consommateurs
2. Jugements globaux des actions de référence (actions bien connues)	. Classement des candidats par un concours d'entrée (déjà effectué) dans un établissement .. Comparaison des dossiers de crédit déjà octroyés ou non par la direction d'une banque
3. Réponses obtenues au moyen d'un questionnaire simple et précis où l'on demande :	. Jugements globaux (attribution des notes globales) sur un sous-ensemble-échantillon des projets de recherche à sélectionner .. Comparaison de quelques variantes caractéristiques de tracé autoroutier choisies parmi l'abondance des combinaisons possibles ... Taux de substitution entre paires de critères ou probabilités définissant des loteries équivalentes au sens des préférences sur des conséquences $\underline{g} \in G$ concernant le problème précis

Tableau 1 : Modes d'obtention d'une préférence globale

La préférence globale est alors une relation binaire R définie sur les conséquences $\underline{g}(A') \subset G$ d'un ensemble d'actions A' . Dans le cas 3..., par exemple, l'attribution du taux de substitution $t_{ij}(\underline{g})$ au vecteur-conséquence $\underline{g} \in G$ indique le nombre d'unités de g_i que le décideur accepte de sacrifier pour récupérer une unité sur g_j (les valeurs des autres critères restant fixes) et définit l'indifférence suivante :

$$(g_1, \dots, g_i, \dots, g_j, \dots, g_n) \sim (g_1, \dots, g_i - t_{ij}, \dots, g_j + 1, \dots, g_n).$$

II.3 Les données - Le problème

Le problème consiste à estimer des fonctions d'utilité additives propres à un individu-décideur à partir d'un ensemble A' évalué sur les n cri-

tères et d'une préférence globale préordinaire $R = (P, I)$ sur A' . Ceci équivaut à l'ajustement du modèle linéaire $u(\underline{g}) = u_1(g_1) + \dots + u_n(g_n)$ où l'on explique "au mieux" la préférence globale (variable à expliquer) par les n critères $g_1, g_2, \dots, g_n$ (variables explicatives). Cette démarche explicative s'appelle désagrégation de la préférence globale R (cf. E. JACQUET-LAGREZE (1978)) et apparaît comme la démarche inverse de la figure 1 (fig. 3).

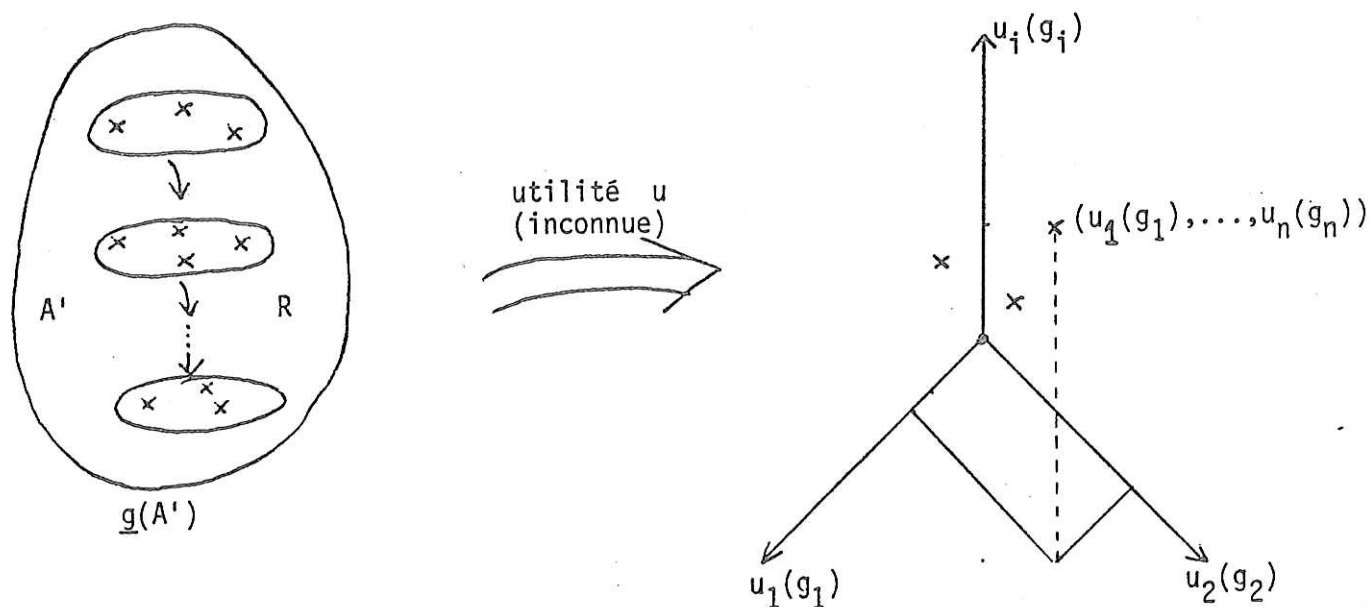


Figure 3 : Schéma de désagrégation d'une préférence globale
"Plongeon" d'un vecteur $\underline{g} \in G$ dans l'espace des utilités partielles

Estimer la fonction d'utilité $u(\underline{g})$, $\underline{g} \in G$, c'est estimer les n utilités partielles $u_1(g_1), u_2(g_2), \dots, u_n(g_n)$ de la forme (4) ou $u'_1(g_1), u'_2(g_2), \dots, u'_n(g_n)$ et $\underline{p} = (p_1, p_2, \dots, p_n)$ de la forme (5).

III. SCHEMA DE RESOLUTION

III.1 Le modèle UTA I (cf. [11])

On considère un préordre R sur A' contenant Q classes d'équivalence (ou d'indifférence) dont chacune contient n_q , $q = 1, 2, \dots, Q$ actions.

On suppose que les valeurs extrêmes g_{i*}, g_i^* rencontrées sur chaque critère sont finies et on découpe l'intervalle $G_i = [g_{i*}, g_i^*]$ en $(\alpha_i - 1)$ intervalles égaux $[g_i^j, g_i^{j+1}]$. α_i est choisi par l'utilisateur (par exemple $\alpha_i = 5$) qui précise ainsi le nombre de points estimés pour chaque utilité u_i . g_i^j est alors donné par la formule :

$$g_i^j = g_{i*} + \frac{j-1}{\alpha_i-1} (g_i^* - g_{i*}).$$

Au cas où un intervalle G_i est discret à peu d'échelons, on pose α_i égal au nombre d'échelons. Si par exemple $G_i = [5, 6, 7, 8, 9, 10]$, on peut prendre $\alpha_i = 6$ afin de rechercher les utilités $u_i(5), u_i(6), \dots, u_i(10)$.

Si l'on ajoute à chaque utilité $u[g(a)]$, $a \in A'$ une variable-erreur $\sigma(a)$ pondérée ou non par un coefficient $p(a)$, les utilités partielles $u_i(g_i^j)$, $j = 1, 2, \dots, \alpha_i$, $i = 1, 2, \dots, n$ de la forme (4) et les erreurs σ sont estimées par le programme linéaire suivant :

$$(7) \quad [\min] F = \sum_{a \in A'} p(a) \sigma(a)$$

sous les contraintes :

$$(8) \quad \sum_{i=1}^n \{u_i [g_i(a)] - u_i [g_i(b)]\} + \sigma(a) - \sigma(b) \geq \delta \quad \text{si } a P b$$

$$(9) \quad \sum_{i=1}^n \{u_i [g_i(a)] - u_i [g_i(b)]\} + \sigma(a) - \sigma(b) = 0 \quad \text{si } a I b$$

$$(10) \quad u_i(g_i^{j+1}) - u_i(g_i^j) \geq s_i \quad \text{pour tout } i \text{ et } j$$

$$(11) \quad \sum_{i=1}^n u_i(g_i^*) = 1$$

$$(12) \quad u_i(g_{i*}) = 0, u_i(g_i^j) \geq 0, \sigma(a) \geq 0 \quad \text{pour tout } i \text{ et } j \text{ et} \\ \text{pour tout } a \in A'$$

Dans le programme linéaire (7)-(12) qui est un programme de type "goal programming" (cf. A. CHARNES, W.W. COOPER [3], [4]), les contraintes (8) et (9) respectent les relations (1) et (2) dans le préordre R, les contraintes (10)-(12) portent sur les conditions de monotonie et de normalisation des u_i (le calcul des u_i^j et $\underline{p}$ de la forme (5) se fait suivant les formules (6)). Les utilités partielles u_i des actions $a \in A'$ dont les évaluations $g_i(a)$ se situent à l'intérieur d'un intervalle $[g_i^j, g_i^{j+1}]$ sont calculées par interpolation linéaire :

$$(13) \quad u_i [g_i(a)] = u_i(g_i^j) + \frac{g_i(a) - g_i^j}{g_i^{j+1} - g_i^j} [u_i(g_i^{j+1}) - u_i(g_i^j)]$$

Par exemple, si $[g_i^j, g_i^{j+1}] = [3, 4]$ et $g_i(a) = 3.8$, alors d'après (13) $u_i [g_i(a)] = 0.2 u_i(3) + 0.8 u_i(4)$.

Les seuils s_i doivent prendre des valeurs qui traduisent les relations de préférence $g_i^{j+1} P g_i^j$ pour tout i (par exemple $s_i = 0.02$). Eventuellement, dans une première utilisation du programme, on doit poser : $s_i = 0, i = 1, 2, \dots, n$.

La valeur δ représente la plus petite différence d'utilité que l'on souhaite restituer entre deux classes consécutives du préordre R ; elle dépend du nombre Q de classes dans R (par exemple, pour $Q = 4-6$, $0.01 \leq \delta \leq 0.10$ et plus Q augmente plus δ doit diminuer), des valeurs des seuils s_i (prendre toujours $\delta \geq \sum_{i=1}^n s_i$) et des évaluations $g(A')$.

Le programme UTA I est chargé de formuler et de résoudre le programme dual du programme linéaire (7)-(12) qui comporte $\left\{ \sum_{i=1}^n (\alpha_i - 1) + |A'| \right\}$ contraintes de signe " $\leq$ " et

$$\left\{ \sum_{i=1}^n (\alpha_i - 1) + 2 \times \sum_{i=1}^Q (n_i - 1) + Q + 1 \right\} \text{ variables.}$$

Un exemple d'illustration et quelques applications de ce modèle sont présentées dans [11] avec un certain nombre d'extensions possibles.

III.2 Le modèle UTA II

Cette méthode contient deux phases principales : la première sert à déterminer les allures des utilités partielles normées $u_i(g_i)$ et la seconde le jeu de poids $\underline{p} = (p_1, \dots, p_n)$ de la forme additive (14) :

$$(14) \quad u(\underline{g}) = \sum_{i=1}^n p_i u_i(g_i), \quad \underline{g} \in G.$$

Dans la première phase, UTA II emprunte une méthode d'étude et de construction des utilités partielles normées qui permet d'exprimer l'importance et la sensibilité des valeurs d'une échelle $G_i = [g_{i*}, g_i^*]$ au sens des préférences (figure 4).

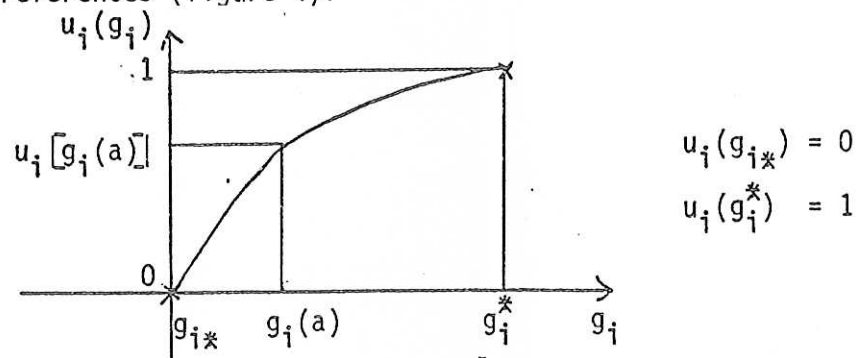


Figure 4 : Utilité partielle normée entre 0 et 1

Echelle sensible aux valeurs proches de g_{i*}

Les méthodes qui peuvent servir de support à cette phase sont, par exemple, la méthode du point de valeur médiane (Mid-Value Splitting Technique) de R.L. KEENEY, H. RAIFFA ([12], [13]) qui utilise des substitutions équivalentes pour compenser la même perte sur un critère, les méthodes d'étude de variation des taux de substitution dans G exposées et utilisées dans K.R. OPPENHEIMER (1978) qui cherchent les formes explicites des $u_i(g_i)$ (par exemple $u_i(g_i) = e^{w_i g_i}$ ou $u_i(g_i) = g_i^{w_i}$, $w_i > 0$ constante), les méthodes des loteries équivalentes de P. FISHBURN (1967), etc.

La seconde phase concerne la détermination des poids des critères par désagrégation de la préférence globale $R = (P, I)$. Comme dans UTA I, les vecteurs $\underline{p}$ et $\underline{\sigma}$ sont calculés par le programme linéaire suivant :

$$(15) \quad [\min] F = \sum_{a \in A'} p(a) \sigma(a)$$

sous les contraintes :

$$(16) \quad \sum_{i=1}^n \{u_i[g_i(a)] - u_i[g_i(b)]\} p_i + \sigma(a) - \sigma(b) \geq \delta \quad \text{si } a P b$$

$$(17) \quad \sum_{i=1}^n \{u_i[g_i(a)] - u_i[g_i(b)]\} p_i + \sigma(a) - \sigma(b) = 0 \quad \text{si } a I b$$

$$(18) \quad \sum_{i=1}^n p_i = 1$$

$$p_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, n; \sigma(a) \geq 0, a \in A'$$

Cette structure, qui est plus réduite que celle du modèle UTA I, permet également de saisir la transitivité de R et est susceptible de subir une discussion semblable. Son dual ne contient que $n + |A'|$ contraintes de signe " $\leq$ " à $(2 \times \sum_{i=1}^Q (n_i - 1) + Q + 1)$ variables.

Au cas où les évaluations $\underline{g}(A)$ permettent la mise au point du modèle additif particulier (somme pondérée) $u(\underline{g}) = \sum_{i=1}^n p_i g_i$, la deuxième phase du modèle UTA II s'applique directement en posant :

$$(19) \quad u_i[\underline{g}_i(a)] = g_i(a) ; a \in A', i = 1, 2, \dots, n.$$

La valeur δ dépend alors de valeurs des critères.

III.3 L'analyse post-optimale

Dans ce paragraphe, nous abordons le problème crucial de la sensibilité d'une fonction d'utilité construite à l'aide des méthodes UTA. Il s'agit d'un problème général qui se pose toujours lorsqu'on estime les paramètres d'un modèle en rendant optimal un certain critère, quel que soit ce critère : une corrélation ou une distance entre deux variables, une somme algébrique d'écarts pondérés ou absolus, etc.

Le modélisateur qui veut saisir les préférences d'un ou de plusieurs décideurs au moyen d'une fonction d'utilité se trouve face à un champ de questions liées à des phénomènes comme les suivants :

. phénomènes de forte corrélation entre critères pouvant fausser et altérer une bonne explication de la préférence globale ;

.. phénomènes de multiplicité de solutions, toutes considérées comme admissibles au sens de l'explication et de la reconstitution de la préférence globale.

Nous avons qualifié d'"optimale" une fonction $u^*(\underline{g})$, $\underline{g} \in G$ qui explique "au mieux" la relation binaire R au sens du critère F . Dans les modèles UTA, cette fonction est donnée par la solution optimale (vecteur $\underline{x}^*$) d'un programme linéaire du type ($p(a) = 1, \forall a \in A'$) :

$$(20) \quad \begin{cases} [\min] F = \sum_{a \in A'} \sigma(a) \\ \text{dans le polyèdre} \\ \mathcal{X} \underline{x} \geq \underline{b} \\ \underline{x} \geq 0 \end{cases}$$

dont la valeur optimale est symbolisée par F^* .

Soit $k(F^*)$ une petite valeur positive ou nulle dépendant de F^* .
 Nous formons la nouvelle contrainte (21)

$$(21) \quad F \leq F^* + k(F^*)$$

qui est relative aux valeurs de F et nous l'ajoutons aux contraintes de (20). Le nouveau polyèdre prend la forme suivante :

$$\begin{cases} \mathcal{A} \underline{x} \geq \underline{b} \\ -F \geq -[F^* + k(F^*)] \\ \underline{x} \geq 0 \end{cases}$$

ou la forme plus synthétisée :

$$(22) \quad \begin{cases} A' \underline{x} \geq \underline{b}' \\ \underline{x} \geq 0 \end{cases}$$

avec : $\mathcal{A}' = \begin{bmatrix} \mathcal{A} \\ -F \end{bmatrix}$ et $\underline{b}' = \begin{bmatrix} \underline{b} \\ -F^* - k(F^*) \end{bmatrix}$ les matrices $\mathcal{A}$ et $\underline{b}$ augmentées de la ligne supplémentaire (21).

Dans l'espace à deux dimensions, ce polyèdre serait représenté par la région hachurée de la figure 5.

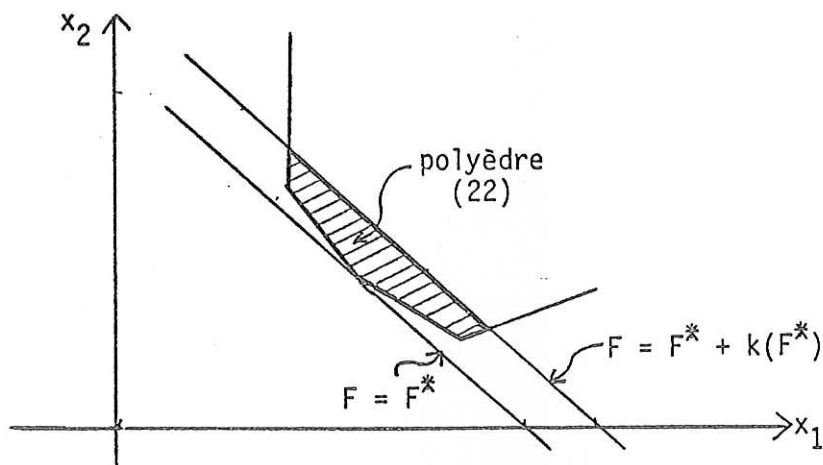


Figure 5 : Représentation graphique de la k-optimalité

L'analyse post-optimale consiste à rechercher tous les vecteurs (points) $\underline{x}$ contenus dans le polyèdre (22), cf. [23]. Dans les méthodes UTA, nous recherchons simplement un ensemble de sommets caractéristiques de ce polyèdre aussi différents que possible et plus précisément ceux qui attribuent des poids extrémaux aux critères. Cette exploration du polyèdre (22) est effectuée par la résolution successive des programmes linéaires (24).

$$(24) \quad \left\{ \begin{array}{l} [\min] \sum_{i=1}^n \rho_i p_i \\ \text{dans :} \\ \text{polyèdre (22)} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} [\max] \sum_{i=1}^n \rho_i p_i \\ \text{dans :} \\ \text{polyèdre (22)} \end{array} \right.$$

avec $\rho_i = 0$ ou 1 pour tout i et dans UTA I : $p_i = u_i(g_i^*)$. Ce procédé donne une idée très claire de la variation ("fourchettes") des poids d'un ou de plusieurs critères à la fois et par conséquent de la stabilité de l'optimum. Si, par exemple, l'on trouve $[\min] p_i$ et $[\max] p_i$, on peut conclure l'importance que le décideur attache au critère g_i .

Cette analyse permet d'étudier la sensibilité et la stabilité de la fonction d'utilité $u^*(g)$, $g \in G$ et apporte des informations très intéressantes sur les différentes possibilités d'explication de la préférence globale R . Des expérimentations nombreuses ont montré que $u^*(g)$, $g \in G$, qui est optimale par rapport à F , n'est pas toujours optimale par rapport à d'autres critères (voir V.1), par exemple au τ de KENDALL (coefficient de distance entre R et le préordre défini par u^* , variant de -1 à 1 (cf. P. BERTIER, J.M. BOUROCHE (1975))). Nous pouvons donc obtenir plusieurs fonctions d'utilité aussi admissibles que u^* du point de vue de la reconstitution de la préférence globale.

L'aide à la décision est basée soit sur l'optimisation d'une fonction d'utilité unique mais stable, soit sur des classements définis à partir des relations de surclassement floues fondées sur la concordance des fonctions d'utilité multiples (cf. [21]).

IV. LES CARACTERISTIQUES DES PROGRAMMES

IV.1 La structure des programmes

Les méthodes UTA I et UTA II sont automatisées et comportent respectivement 980 et 694 instructions FORTRAN IV. Leur mise au point est caractérisée par l'existence de deux phases. La première phase se situe dans le contexte d'optimisation avec recherche de la fonction d'utilité "optimale" u^* ; IPØST (Indicateur de POST-optimalité) = 0. La structure commune des deux programmes pour cette phase est donnée par la figure 6. Lors de la seconde phase (IPØST = 1), les programmes produisent un ensemble de fonctions post-optimales telles que nous les avons définies au paragraphe III.3.

Les deux programmes, à l'exception des sous-programmes DATA et SØRTIE, appellent les mêmes sous-programmes au cours de leur déroulement. Leur fonctionnement est contrôlé par un indicateur d'arrêt ISTØP (fig. 6) qui prend la valeur 1 lorsque le problème est mal posé ou quand les paramètres sont mal introduits dans DATA (voir IV.2).

Nous présentons ci-dessous les sous-programmes de UTA I et II accompagnés de leurs caractéristiques :

- DATA : Lecture des données - Structuration du programme linéaire (primal) (7)-(12) pour UTA I ou du programme (15)-(18) pour UTA II - Passage au dual par appel du sous-programme MATRA.

- MATRA (MATRice A) : Stockage uniquement des éléments non nuls de A dans des matrices unidimensionnelles. Cette technique permet d'économiser un grand espace - mémoire d'ordinateur.

IV. LES CARACTERISTIQUES DES PROGRAMMES

IV.1 La structure des programmes

Les méthodes UTA I et UTA II sont automatisées et comportent respectivement 980 et 694 instructions FORTRAN IV. Leur mise au point est caractérisée par l'existence de deux phases. La première phase se situe dans le contexte d'optimisation avec recherche de la fonction d'utilité "optimale" u^* ; IPØST (Indicateur de POST-optimalité) = 0. La structure commune des deux programmes pour cette phase est donnée par la figure 6. Lors de la seconde phase (IPØST = 1), les programmes produisent un ensemble de fonctions post-optimales telles que nous les avons définies au paragraphe III.3.

Les deux programmes, à l'exception des sous-programmes DATA et SØRTIE, appellent les mêmes sous-programmes au cours de leur déroulement. Leur fonctionnement est contrôlé par un indicateur d'arrêt ISTØP (fig. 6) qui prend la valeur 1 lorsque le problème est mal posé ou quand les paramètres sont mal introduits dans DATA (voir IV.2).

Nous présentons ci-dessous les sous-programmes de UTA I et II accompagnés de leurs caractéristiques :

- DATA : Lecture des données - Structuration du programme linéaire (primal) (7)-(12) pour UTA I ou du programme (15)-(18) pour UTA II - Passage au dual par appel du sous-programme MATRA.

- MATRA (MATRice A) : Stockage uniquement des éléments non nuls de A dans des matrices unidimensionnelles. Cette technique permet d'économiser un grand espace - mémoire d'ordinateur.

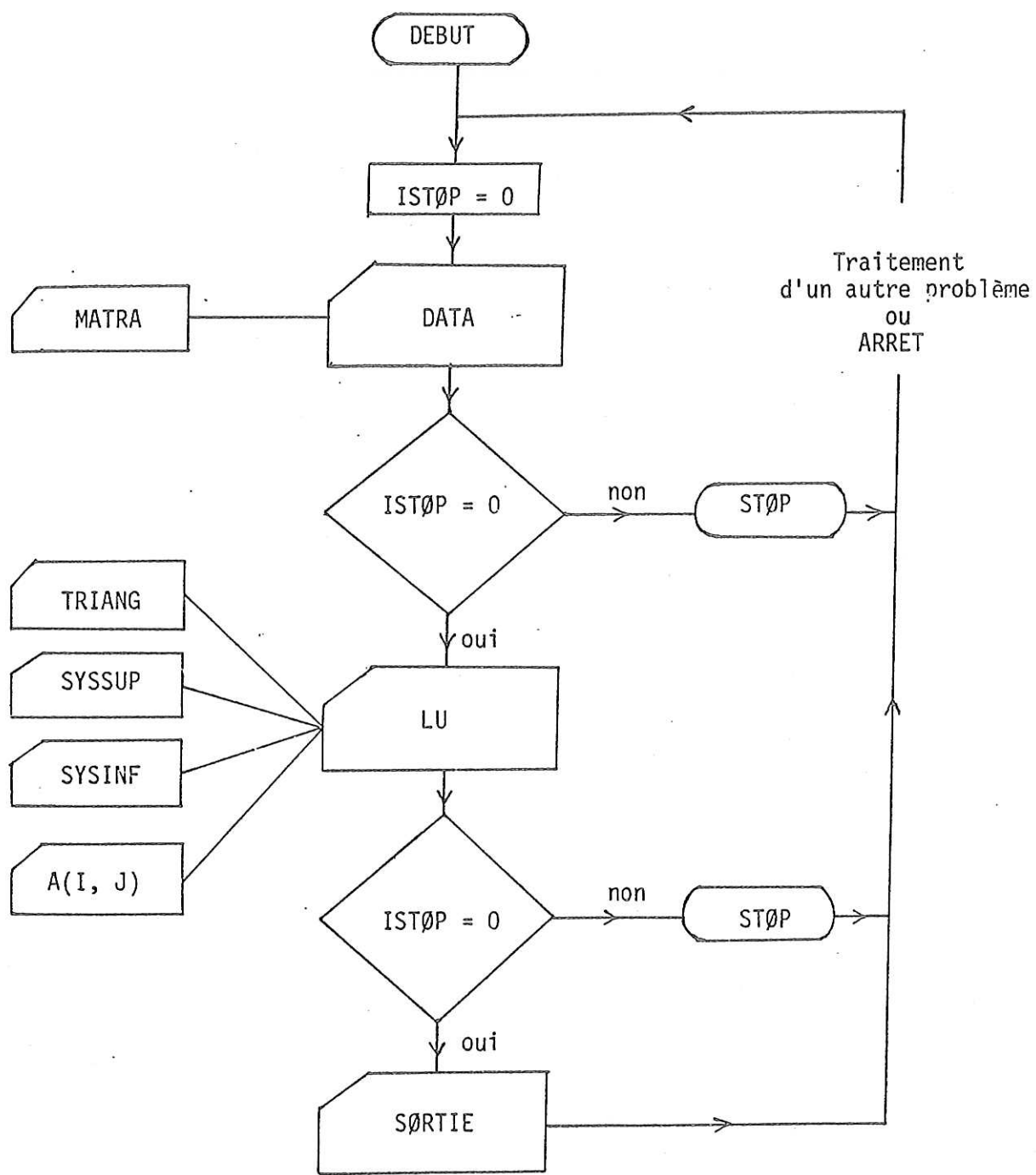


Figure 6 : Organigramme général des programmes UTA
(IPØST = 0 : optimisation)

- LU : Résolution d'un programme linéaire par la méthode de décomposition de BALTELS-GOLUB (cf. R.H. BARTELS [1] ou P. TOLLA [22]). Dans cette méthode, la base du simplexe s'exprime par le produit d'une matrice triangulaire inférieure L et d'une matrice triangulaire supérieure U ($B = LU$). Les résultats de cette méthode sont dotés d'une grande précision numérique (exécution en simple précision).

- TRIANG : TRIANGularisation d'une matrice avec recherche du plus grand coefficient sous la diagonale.

- SYSSUP : Résolution d'un SYStème linéaire triangulaire SUPérieur pour le calcul du vecteur y du simplexe.

- SYSINF : Résolution d'un SYStème linéaire triangulaire INFérieur pour la détermination du vecteur π des multiplicateurs du simplexe.

- A(I, J) : Fonction d'identification d'un élément non nul de la matrice A .

- SORTIE : Présentation des résultats :

- . programme dual (nombre de contraintes, nombre de variables, nombre d'itérations, F^*) ;

- . pondération pour UTA II ou pondération et utilités partielles u_i pour UTA I ;

- . valeur du τ de Kendall ;

- . préordre à expliquer et préordre défini par l'utilité ;

- . matrices associées aux préordres (uniquement si $IP\emptyset ST = 0$).

IV.2 Caractéristiques et restrictions relatives à la résolution des programmes linéaires

1) Dimensions des programmes linéaires

La taille des programmes linéaires à résoudre est déterminée par les paramètres NEQ (Nombre d'Equations) et NV (Nombre de Variables). Chacune de ces variables est donnée par les formules (25) et (26).

$$(25) \text{ UTA I : } \begin{cases} \text{NEQ} = \sum_{i=1}^n (\alpha_i - 1) + |A'| \\ \text{NV} = \sum_{i=1}^n (\alpha_i - 1) + 2 \times \sum_{i=1}^Q (n_i - 1) + Q + 1 \end{cases}$$

$$(26) \text{ UTA II : } \begin{cases} \text{NEQ} = n + |A'| \\ \text{NV} = 2 \times \sum_{i=1}^Q (n_i - 1) + Q + 1 \end{cases}$$

Les programmes sous leur forme actuelle limitent ces valeurs à MAXM = 100 pour NEQ et à MAXN = 300 pour NV. En cas de dépassement de ces bornes, les programmes s'arrêtent (ISTOP = 1) et indiquent la valeur de NEQ à substituer (à la place de 100) dans les bornes des tableaux de deux premiers CØMMØN blancs et de CØMMØN étiqueté ALPHA ou la valeur de NV à substituer (à la place de 300) dans les bornes des tableaux du troisième CØMMØN blanc.

Une autre borne à ne pas dépasser est le nombre d'éléments non nuls de la matrice $\mathcal{A}$ stockés dans le tableau AA. Lorsque ce nombre dépasse la borne MAXA = 2000, il faut remplacer cette borne (par la valeur indiquée par les programmes) dans les tableaux du CØMMØN étiqueté ALPHA.

En principe, le nombre des actions de A' est limité à 100 et le nombre de critères à 20. Le nombre maximum d'itérations-simplexe est limité à 300.

2) Paramètres liés à l'ordinateur utilisé

Certains paramètres utilisés dans les programmes sont initialisés à des valeurs spécifiques de l'ordinateur IBM 370/168 :

- LEC (LECTure) = 5 : numéro logique de l'unité de lecture des données (initialisé dans DATA).

- IMP (IMPression) = 6 : numéro logique de l'unité d'impression des sorties (initialisé dans DATA).

- EPS (EPSilon) = 10^{-8} : tolérance utilisée à la place du 0.0 pour permettre le traitement des dégénérescences duales (certaines composantes du second membre b sont nulles ; initialisé dans LU).

- TØL (1) = 10^{-3} : tolérance utilisée à la place du 0.0 lors de l'application du premier critère de Dantzig (critère d'optimalité ; initialisé dans DATA).

- TØL (2) = 10^{-3} : tolérance utilisée à la place du 0.0 pour tester la signification ($\neq 0$) des composantes du vecteur y lors de l'application du deuxième critère de Dantzig (initialisé dans DATA).

- TØL (3) = 10^{-3} : tolérance utilisée lors de la détermination des classes d'indifférence (initialisé dans DATA) :

$$\underline{g} \sim \underline{g}' \Leftrightarrow u(\underline{g}) = u(\underline{g}') \Leftrightarrow |u(\underline{g}) - u(\underline{g}')| < \text{TØL (3)}.$$

3) Problèmes sans solution

Certains problèmes mal posés (seuils s_i ou δ très grands par rapport à Q , $\sum_i n_i \neq Q$, ...) ou très compliqués (données très lourdes avec seuils, actions dominant d'autres actions mais dominées dans R , ...) peuvent provoquer l'arrêt du déroulement des algorithmes.

Nous suggérons aux utilisateurs d'affecter (au début) une petite valeur à δ et de l'augmenter au fur et à mesure, jusqu'au moment où le τ de Kendall commence à décroître. Les premiers passages du programme UTA I doivent être évidemment sans seuils ($s_i = 0$ pour tout i).

Dans le cas où la complexité des données ne permet aucune utilité additive, le programme donne l'indication :

SØLUTION INFINIE APRES ∞ ITERATIONS.

Il faut alors examiner s'il y a des actions dominées en incohérence avec R et les éliminer du préordre.

Les autres messages des programmes se réfèrent à la perforation mauvaise des données du problème.

IV.3 La complexité des algorithmes

Les deux programmes ont déjà été adaptés à un ordinateur IBM 370/168. La complexité des algorithmes dépend de la taille et du nombre des programmes linéaires à résoudre. Nous présentons (Tableau 2) les temps de calcul nécessaires au déroulement du programme UTA I sur quatre problèmes réels ; UTA II est évidemment beaucoup plus rapide que UTA I.

N°	Problème	Référence	Nombre d'actions	Nombre de critères	Nombre de solutions	Temps de calcul
1	Choix de dossiers de crédits	[16] [20]	9	5	10	0 mn, 9.74 sec
2	Choix d'un tracé autoroutier	[15]	8	4	10	0 mn, 10.86 sec
3	Analyse des préférences d'un juge	[11] [21]	18	7	10	1 mn, 05.69 sec
4	Evaluation des fonctions d'une entreprise	[21]	57	6	1	1 mn, 12.03 sec

Tableau 2 : Expérience numérique avec le programme UTA I sur quelques problèmes réels

V. EXEMPLE D'APPLICATION ET UTILISATION DES PROGRAMMES

V.1 Exemple d'application

Le problème qui suit nous a été communiqué par B. ROY. Considérons le cas d'un responsable habilité à décider de l'octroi d'un certain type de crédits. Supposons que sa direction lui demande de fonder principalement sa décision sur 5 ratios (critères) qui sont automatiquement calculés à partir des informations que renferment les dossiers de demandes. Le problème consiste à déterminer des combinaisons de valeurs de ces critères susceptibles de caractériser, compte tenu de la politique de la direction, les limites du "sûrement acceptable" et celles du "sûrement inacceptable".

L'étude est appuyée sur l'information qu'apportent 9 actions-dossiers de référence (cf. Tableau 1) déjà jugées et classées par la direction de l'organisme financier (Tableau 3). Cette préférence globale R était le préordre suivant :

$$(27) \quad R : a_1 \succ (b_1 \sim b_2) \succ (a_2 \sim a_3) \succ (c_1 \sim c_2) \succ (a_4 \sim a_5).$$

La relation R confirme l'acceptation du dossier a_1 et le rejet de a_4 et a_5 . Pour a_2 et a_3 , aucune décision n'a été prise.

Le cas nous incite à appliquer UTA II car les critères sont des graduations ($g_i \equiv u_i(g_i)$). On teste alors le modèle de la fonction d'utilité ayant la forme d'une somme pondérée. La mise au point du modèle (cas d'optimisation) a donné les résultats des Tableaux 4 et 5 ($\delta = 0.01$).

		ratio 1	ratio 2	ratio 3	ratio 4	ratio 5
Limites du sûrement acceptable	b_1	0,7	0,7	0,5	0,5	0,5
	b_2	0,5	0,5	0,7	0,7	0,7
	...					
Limites du sûrement inacceptable	c_1	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5
	c_2	0,5	0,5	0,3	0,7	0,5
	...					
Exemples de dossiers de crédits	a_1	0,7	0,7	0,6	0,5	0,5
	a_2	0,5	0,5	0,6	0,7	0,7
	a_3	0,7	0,7	0,3	0,7	0,5
	a_4	0,6	0,6	0,3	0,7	0,1
	a_5	0,6	0,6	0,6	0,5	0,1
	...					

Tableau 3 : Exemple de l'octroi de crédits (B. ROY [20])

```

*****
* PROGRAMME LINEAIRE DUAL *
*****
+-----+
| NOMBRE DE CONTRAINTES = 14 |
+-----+
| NOMBRE DE VARIABLES = 14 |
+-----+
| F A(I,J) NON NULS = 35% |
+-----+
| NOMBRE D ITERATIONS = 7 |
+-----+
| OPTIMUM F* = 2,03000 |
+-----+

```

```

+-----+
| CRITERES | POIDS |
+-----+
| 1. RAT1 | 0,7 |
+-----+
| 2. RAT2 | 0,75 |
+-----+
| 3. RAT3 | 0,100 |
+-----+
| 4. RAT4 | 0,100 |
+-----+
| 5. RAT5 | 0,325 |
+-----+

```

Tableau 4 : Solution "optimale" du problème de l'octroi de crédits

PRÉO A EXPL		PRÉORDRE DÉFINI PAR L'UTILITE	
ACTIGN RANG	ACTIGN RANG	UTILITE U	SIGMA
A1 1	A1 1	0.605	0.012
B1 2	B2 1	0.605	0.012
B2 2	B1 2	0.595	0.0
A2 3	A2 2	0.595	0.0
A3 3	A3 2	0.595	0.0
C1 4	C1 3	0.500	0.0
C2 4	C2 3	0.500	0.0
A4 5	A5 4	0.427	0.010
A5 5	A4 5	0.417	0.0

Tableau 5 : Préordre R et préordre défini par l'utilité $u(g) = \sum_{i=1}^n p_i g_i$

Les variables $\sigma(a)$, $a \in A'$ se réfèrent à la première colonne et le tau de Kendall τ est égal à 0.86

Cette solution repère la limite de l'"inacceptable" à la valeur $u^*[g(c_1)] = u^*[g(c_2)] = 0.500$ mais laisse une zone de flou (entre 0.595 et 0.605) pour la détermination de la limite de l'"acceptable".

Pour la recherche des solutions post-optimales, on a choisi $k(F^*) = 0.001$, d'où $F^* + k(F^*) = 0.031$. La résolution d'une dizaine de programmes du type (24) a apporté les éléments du Tableau 6.

Les 5 premières solutions du Tableau 6 confirment une corrélation parfaite des critères g_1 et g_2 (résultat vérifié au Tableau 3 d'évaluation multicritère) ; ceci implique que toute paire de poids (p_1, p_2) qui vérifie la relation : $p_1 + p_2 =$ somme de deux poids d'une solution, est admissible. Dans la solution 4, par exemple, où $(p_1, p_2) = (0.0, 0.474)$, toute paire (p_1, p_2) telle que $p_1 + p_2 = 0.474$ est admissible

N°	Objectif (24)	Nombre d'itéra- tions	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	τ de Kendall	Limite de l'"accepte- table"	Limite de l'"inaccep- table"
1	$\lceil \max \rceil p_1$	10	0.502	0.000	0.090	0.040	0.367	0.92	0.599	0.500
2	$\lceil \min \rceil p_2$	11	0.502	0.000	0.090	0.040	0.367	0.92	0.599	0.500
3	$\lceil \max \rceil p_2$	10	0.000	0.502	0.090	0.040	0.367	0.92	0.599	0.500
4	$\lceil \min \rceil p_1 + p_2$	10	0.000	0.474	0.105	0.105	0.316	0.86	0.595-0.605	0.500
5	$\lceil \max \rceil p_1 + p_2$	10	0.000	0.502	0.090	0.040	0.367	0.92	0.599	0.500
6	$\lceil \min \rceil p_3$	10	0.000	0.478	0.090	0.090	0.343	0.86	0.595-0.604	0.500
7	$\lceil \max \rceil p_3$	12	0.000	0.497	0.110	0.065	0.327	0.89	0.599	0.500
8	$\lceil \min \rceil p_4$	11	0.000	0.502	0.090	0.040	0.367	0.92	0.599	0.500
9	$\lceil \max \rceil p_4$	13	0.000	0.475	0.110	0.110	0.305	0.89	0.595-0.605	0.500
10	$\lceil \max \rceil p_3 + p_4$	13	0.000	0.475	0.110	0.110	0.305	0.89	0.595-0.605	0.500

Tableau 6 : 10 solutions post-optimales du problème de l'octroi de crédits

pour cette solution. De plus, la pondération conjointe $p_1 + p_2$ est comprise entre 0.474 et 0.502 avec une meilleure explication de R vers les valeurs les plus élevées ($\tau = 0.92$). L'importance relative du critère g_1 par rapport à g_2 pourrait être l'objet d'une discussion entre décideur et modélisateur.

Ensuite, les critères g_3 et g_4 sont conservés à des niveaux faibles ($0.09 \leq p_3 \leq 0.11$, $0.04 \leq p_4 \leq 0.11$), de l'ordre de 10 % chacun ; leur attitude se révèle discordante par rapport notamment aux critères g_1 et g_2 (solutions 1, 3, 5 et 10 du Tableau 6). Le dernier critère reçoit finalement un poids de l'ordre de 30-40 %, jouant un rôle très important dans l'explication de R .

L'exploration du polyèdre (22) par l'analyse post-optimale a décelé :

- . une stabilité relative ("fourchettes" très fines) de la fonction d'utilité dans le polyèdre d'admissibilité (22) ;

- .. l'infériorité évidente de la solution "optimale" $u^*(g)$, $g \in G$ devant d'autres solutions, jugée sur les valeurs du τ de Kendall et sur la discrimination des valeurs $u[g(a)]$, $a \in A'$ vis-à-vis de la problématique du "tri" (segmentation) ;

- ... la détermination de la limite du "sûrement inacceptable" repérée à 0.500 et celle du "sûrement acceptable" repérée à 0.599.

Nous pouvons donc construire un critère de trichotomie des dossiers candidats (ensemble A) et apporter une aide à la décision de la direction de l'organisme financier, basée sur la distribution de valeurs de la fonction d'utilité du Tableau 7 ($\tau = 0.92$), notée $\tilde{u}(g)$, $g \in G$:

Un dossier $a \in A$ est octroyé $\Leftrightarrow$	$\tilde{u}[g(a)] \geq 0.599$
Un dossier $a \in A$ est renvoyé	
pour complément d'informations $\Leftrightarrow$	$0.500 < \tilde{u}[g(a)] < 0.599$
Un dossier $a \in A$ est rejeté $\Leftrightarrow$	$\tilde{u}[g(a)] \leq 0.500$

PREJ A EXPL		PREORDRE DEFINI PAR L UTILITE			
CRITERES	POIDS				
		ACTION RANG		UTILITE U	SIGMA
1. RAT1	p_1	A1	1	A1	1
2. RAT2	p_2	B1	2	B1	2
3. RAT3	0.090	B2	2	B2	3
4. RAT4	0.040	A2	3	A3	4
5. RAT5	0.067	A3	3	A2	4
		C1	4	C1	5
		C2	4	C2	6
		A4	5	A5	7
		A5	5	A4	8

Tableau 7 : Une des fonctions d'utilité $\tilde{u}(g)$, $g \in G$ retenue :
 les poids p_1 et p_2 prennent des valeurs arbitraires positives
 de façon à satisfaire la relation : $p_1 + p_2 = 0.502$

UTA I a été appliqué au même problème et dans la même perspective ; ses résultats étaient comparables à ceux de la méthode UTA II mais le polyèdre (22) permettait des fonctions d'utilité moins stables que $\tilde{u}$. Ce phénomène est dû à la nature de la préférence globale R (information très pauvre) et à la multiplicité des dimensions exigées dans les programmes linéaires de cette méthode. Certaines solutions sont présentées par les listings de sorties des résultats du programme.

V.2 Les entrées des programmes

1ère carte (FØRMAT 1801) TITRE : Titre du problème lu en 80 caractères alphanumériques (20A4)

2ème carte (FØRMAT 1803)

NBACT : Nombre d'actions, en colonnes 1-5 (I5)

NCRIT : Nombre de critères, en colonnes 6-10 (I5)

Q : Nombre de classes du préordre R , en colonnes 11-15 (I5)

MAXM : Dimension max de la base du simplexe (voir IV.2).
 Poser : = 100 en col. 16-20 (I5)
 MAXN : Dimension max du vecteur $\underline{b}$ (voir IV.2). Poser :
 = 300 en col. 21-25 (I5)
 MAXA : Nombre max d'éléments non nuls de la matrice $\underline{A}$
 (voir IV.2). Poser : = 2000 en col. 26-30 (I5)
 DQ : Valeur de δ en col. 31-40 (F10.4)
 INØBJ : Indicateur d'objectif, en col. 41-45 (I5)
 = 0 : $p(a) = 1 \quad \forall a \in A'$
 $\neq 0$: $p(a)$, $a \in A'$ à déterminer à la 10ème carte
 IPØST : Indicateur de post-optimalité, en col. 46-50 (I5)
 = 0 : optimisation
 $\neq 0$: post-optimalité
 INFØRM (*) : Indicateur de forme de l'utilité, en col. 51-
 55 (I5)
 = 0 : forme : $u(\underline{g}) = \sum_i u_i(g_i)$
 $\neq 0$: forme : $u(\underline{g}) = \sum_i p_i u_i(g_i)$
 ISEUIL (*) : Indicateur de seuil, en col. 56-60 (I5)
 = 0 : version sans seuils
 $\neq 0$: version avec seuils, à déterminer à la 9ème
 carte

3ème carte (FØRMAT 1805) : Tableau CR des noms des critères, lu en FØRMAT :
 16(1X, A4), c'est-à-dire 1 blanc, 4 caractères, 1 blanc, etc.

4ème carte (*) (FØRMAT 1804) : Tableau MØDAL des nombres α_i des modalit-
 tés des critères (échelons), lu en FØRMAT 40I2, c'est-à-dire
 α_1 en col. 1-2, α_2 en col. 3-4, etc.

5ème carte (FØRMAT 1804) : Tableau ICLEQ des nombres n_i (nombre d'actions
 contenues dans la ième classe d'équivalence de R), lu en FØRMAT
 40I2

6ème carte (*) (FØRMAT 1808) : Valeurs de g_{i*} et de g_i^* , lues en FØRMAT
 2F7.3. Répéter la 6ème carte autant de fois que le nombre de
 critères.

(*) Les variables ou cartes marquées sont omises dans UTA II.

- 7ème carte : Format de lecture du nom et de l'évaluation multicritère d'une action, lu en 80 caractères. En cas de critères ordinaux, prendre par exemple (A4, 2X, 3F72.0)
- 8ème carte PR(I) : Nom de l'action I
 RAN(I, J) : Evaluation multicritère de l'action I, J variant de 1 à NCRIT.
 Répéter la 8ème carte autant de fois que le nombre d'actions dans A' dans l'ordre imposé par la préférence globale R.
- 9ème carte (*) (uniquement si ISEUIL $\neq$ 0 ; FØRMAT 1807)
 Tableau des seuils s_i , lu en FØRMAT 10F8.5 par carte
- 10ème carte (uniquement si INØBJ $\neq$ 0 et IPØST = 0 ; FØRMAT 1811)
 Tableau des coefficients $p(a)$, $a \in A'$, lu en FØRMAT 40F2.0, c'est-à-dire 2 caractères par coefficient, écrit en tant que nombre entier
- 11ème carte (uniquement si IPØST $\neq$ 0 ; FØRMAT 1809)
 NSPØ : Nombre de solutions post-optimales (limité à 20), lu en col. 1-5 (I5)
 FØPT : Valeur de $\{F^* + k(F^*)\}$, lue en col. 6-15 (F10.5)
- 12ème carte (uniquement si IPØST $\neq$ 0 ; FØRMAT 1810)
 MAØUMI(I) : Variable indiquant la maximisation ou la minimisation de l'objectif (24), lue en col. 1-2 (I2)
 = - 1 : minimisation
 = + 1 : maximisation
 RØ(I, J) : Coefficients $\rho_j \in \{0, 1\}$, lus en col. 3-80 en FØRMAT 39F2.0 (en entier). Répéter la 12ème carte autant de fois que le nombre NSPØ ($I = 1, \text{NSPØ}$)
- 13ème carte : Recommencer par la 1ère carte, 2ème carte, etc. au cas du traitement d'autres données, sinon : 2 cartes blanches.

V.3 Les sorties des programmes

Dans ce paragraphe, nous présentons certaines sorties des programmes UTA concernant l'exemple de l'octroi de crédits. Les listings de sorties sont précédés par les bordereaux FØRTRAN des entrées correspondantes.

ROBERT REAN

V L J Melour

N°

CODE

N°

PROJET

DATE

	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65	70	75	80
9	5	5	100	300	2000	0.01	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1
RAT1	3	2	3	RAT3	RAT4	RAT5										
3	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
0.5	0.7	0.7	0.7	0.7	0.7	0.7	0.7	0.7	0.7	0.7	0.7	0.7	0.7	0.7	0.7	0.7
0.5	0.7	0.7	0.7	0.7	0.7	0.7	0.7	0.7	0.7	0.7	0.7	0.7	0.7	0.7	0.7	0.7
0.3	0.7	0.7	0.7	0.7	0.7	0.7	0.7	0.7	0.7	0.7	0.7	0.7	0.7	0.7	0.7	0.7
0.5	0.7	0.7	0.7	0.7	0.7	0.7	0.7	0.7	0.7	0.7	0.7	0.7	0.7	0.7	0.7	0.7
0.1	0.7	0.7	0.7	0.7	0.7	0.7	0.7	0.7	0.7	0.7	0.7	0.7	0.7	0.7	0.7	0.7
(1)X	A4	5X	10F7	3												
A1	0.7	0.7	0.7	0.6	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5
B1	0.7	0.7	0.7	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5
B2	0.5	0.5	0.5	0.7	0.7	0.7	0.7	0.7	0.7	0.7	0.7	0.7	0.7	0.7	0.7	0.7
A2	0.5	0.5	0.5	0.6	0.6	0.6	0.6	0.6	0.6	0.6	0.6	0.6	0.6	0.6	0.6	0.6
A3	0.7	0.7	0.7	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3
C1	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5
C2	0.5	0.5	0.5	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3
A4	0.6	0.6	0.6	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3
A5	0.6	0.6	0.6	0.6	0.6	0.6	0.6	0.6	0.6	0.6	0.6	0.6	0.6	0.6	0.6	0.6
0.002	0.002	0.002	0.002	0.002	0.002	0.002	0.002	0.002	0.002	0.002	0.002	0.002	0.002	0.002	0.002	0.002
2	CARTES	BLANCHES														
9	5	5	100	300	2000	0.01	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1
2	0.34															
-1	0	0	0													
+1	0	0	0													

Tableau 8 : Bordereau FORTRAN d'entrées du programme UTA I

Premier bloc : cas d'optimisation (IPØST = 0)

Deuxième bloc : 2ème, 14ème et 12ème (min[p₁ + p₂], max[p₁ + p₂]) cartes au cas de la post-opti-
malité (IPØST = 1)

LE PROBLEME DE L'OCTROI DE CREDITS (S. ROY)

NOMBRE D' ACTIONS : 9 (MAX 10)
 NOMBRE DE CRITERES : 5 (MAX 2)

* PROGRAMME LINEAIRE DUAL *

NOMBRE DE CONTRAINTES	=	16
NOMBRE DE VARIABLES	=	23
% A(I,J) NON NULS	=	23%
NOMBRE D ITERATIONS	=	12
OPTIMUM F*	=	0.0302

* PONDERATION - UTILITES U (I) *

CRITERES	* POIDS	* CODE 1	CODE 2	CODE 3	CODE 4	CODE 5	CODE 6	CODE 7	CODE 8	CODE 9
1. RAT1	* 0.554	* 0.0	0.500	1.000						
2. RAT2	* 0.393	* 0.0	0.005	1.000						
3. RAT3	* 0.022	* 0.0	0.001	1.000						
4. RAT4	* 0.002	* 0.0	1.000							
5. RAT5	* 0.579	* 0.0	0.003	1.000						

= COEFFICIENT D'ADJUSTEMENT =

TAU DE KENDALL = 0.86

+-----+-----+

| PRED A EXPL | PREORDRE DEFINI PAR L UTILITE

ACTION RANG		ACTION RANG		UTILITE U	SIGMA	EVALUATION MULTICRITERE G(A) DES ACTIONS				
A1	1	A1	1	0.603	0.010	0.700	0.700	0.500	0.500	0.500
B1	2	B2	1	0.603	0.010	0.700	0.700	0.500	0.500	0.500
B2	2	B1	2	0.593	0.0	0.500	0.500	0.700	0.700	0.700
A2	3	A3	2	0.593	0.0	0.500	0.500	0.600	0.700	0.700
A3	3	A2	2	0.593	0.0	0.700	0.700	0.300	0.700	0.500
C1	4	C1	3	0.196	0.0	0.500	0.500	0.500	0.500	0.500
C2	4	C2	3	0.196	0.0	0.500	0.500	0.300	0.700	0.500
A4	5	A5	4	0.016	0.010	0.600	0.600	0.300	0.700	0.100
A5	5	A4	5	0.006	0.0	0.600	0.600	0.600	0.500	0.100

MATRICES ASSOCIEES AUX PREORDRES

[illegible]

0.0	1.0	0.5	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0
0.0	0.0	0.0	0.5	0.5	1.0	1.0	1.0	1.0
0.5	1.0	0.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0
0.0	0.5	0.0	0.5	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0
0.0	0.5	0.5	0.5	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0
0.0	0.0	0.0	1.0	0.5	0.5	1.0	1.0	1.0
0.0	0.0	0.0	0.0	0.5	0.5	0.0	1.0	1.0
0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	1.0	0.0	0.0	1.0

PROGRAMME LINEAIRE DUAL *

NOMBRE DE CONTRAINTES =	13
NOMBRE DE VARIABLES =	24
1 ATT(J) NON NULS =	244
NOMBRE D'ITERATIONS =	13
OPTIMUM F* =	0.3100

POUDERATION = UTILITE J (II) *

CRITERES	POIDS	CODE 1	CODE 2	CODE 3	CODE 4	CODE 5	CODE 6	CODE 7	CODE 8	CODE 9
1. RAT1 =	0.4	0.0	0.50	1.0						
2. RAT2 =	0.18		0.29	1.0						
3. RAT3 =	0.321	0.0	0.0	1.0						
4. RAT4 =	0.2	0.0	0.0		1.0					
5. RAT5 =	0.05		0.99	1.0						

COEFFICIENT D'ADJUSTEMENT *

TAU DE RENDEMENT = 0.30

PRED A EXPL	PREDONNE D'UNE PAR L UTILITE				EVALUATION MULTICRITERE (II) DES ACTIONS					
ACTION RANG	ACTION RANG	UTILITE J	SIGMA							
A1 1	A2 1	0.933	0.11	0.700	0.700	0.600	0.500	0.500		
A1 2	A1 2	0.908	0.10	0.700	0.700	0.500	0.500	0.500		
A2 2	A2 2	0.979	0.11	0.500	0.500	0.700	0.700	0.700		
A2 3	A1 2	0.979	0.10	0.500	0.500	0.600	0.700	0.700		
A3 3	A3 2	0.979	0.0	0.700	0.700	0.300	0.700	0.500		
C1 4	C1 3	0.900	0.0	0.500	0.500	0.500	0.500	0.500		
C2 4	C2 3	0.900	0.0	0.500	0.500	0.300	0.700	0.500		
A4 5	A5 4	0.15	0.09	0.600	0.600	0.300	0.700	0.100		
A5 5	A4 5	0.05	0.0	0.600	0.600	0.600	0.500	0.100		

SOLUTION POST-OPTIMALE NO 2

F* + K(F*) = 0.3100

ADJUST = 1

COEFFICIENTS RS : 1.00, 1.00, 0.0, 0.0, 0.0

NOMBRE D' ACTIONS : 9 (MAX 10)

NOMBRE DE CRITERES : 5 (MAX 10)

PROGRAMME LINEAIRE DUAL *

NOMBRE DE CONTRAINTES =	13
NOMBRE DE VARIABLES =	24
1 ATT(J) NON NULS =	244
NOMBRE D'ITERATIONS =	10
OPTIMUM F* =	0.6010

POUDERATION = UTILITE J (II) *

CRITERES	POIDS	CODE 1	CODE 2	CODE 3	CODE 4	CODE 5	CODE 6	CODE 7	CODE 8	CODE 9
1. RAT1 =	0.004	0.0	0.5	1.0						
2. RAT2 =	0.395		0.5	1.0						
3. RAT3 =	0.002	0.0	0.575	1.0						
4. RAT4 =	0.272	0.0	1.0		1.0					
5. RAT5 =	0.507	0.0	0.0	1.0						

COEFFICIENT D'ADJUSTEMENT *

TAU DE RENDEMENT = 0.30

PRED A EXPL	PREDONNE D'UNE PAR L UTILITE				EVALUATION MULTICRITERE (II) DES ACTIONS					
ACTION RANG	ACTION RANG	UTILITE J	SIGMA							
A1 1	A1 1	0.01	0.0	0.7	0.7	0.500	0.500	0.500		
A1 2	A1 2	0.01	0.0	0.7	0.7	0.500	0.500	0.500		
A2 2	A2 3	0.01	0.01	0.500	0.500	0.700	0.700	0.700		
A2 3	A2 4	0.01	0.01	0.500	0.500	0.600	0.700	0.700		
A3 3	A2 5	0.01	0.0	0.700	0.700	0.300	0.700	0.500		
C1 4	C1 6	0.0	0.0	0.500	0.500	0.500	0.500	0.500		
C2 4	C2 7	0.02	0.01	0.500	0.500	0.300	0.700	0.500		

2400442C LINGUISTIC MODAL VERBS

```

| NOMBRE DE CONTRAINTES = 13
| NOMBRE DE VARIABLES = 24
| : A(1,1) NON NULS = 246
| NOMBRE D'ITERATIONS = 13
| OPTIMUM F* = 1.01109

```

POWDERATION - UTILITIES J (1)

CRITERES	PRODS	CODE 1	CODE 2	CODE 3	CODE 4	CODE 5	CODE 6	CODE 7	CODE 8	CODE 9
1. RAT1	0.4	0.5	1.0							
2. RAT2	0.3	0.25	1.0							
3. RAT3	0.25	0.15	1.0							
4. RAT4	0.2	1.0								
5. RAT5	0.05	0.95	1.0							

TAX ON RENTALL = 0.00

PROFONDUR D'ANALYSE PAR L'UTILITE					EVALUATION MULTICRITERE (G24) DES ACTIONS				
ACTION RANG		ACTION RANG		UTILITE U	SIGMA				
A1	1	B2	1	0.938	0.11	0.700	0.700	0.600	0.500
A1	2	A4	2	0.938	0.10	0.700	0.700	0.500	0.500
A2	2	A2	2	0.979	0.11	0.500	0.500	0.700	0.700
A2	3	B1	2	0.979	0.10	0.500	0.500	0.600	0.700
A3	3	A3	2	0.979	0.10	0.700	0.700	0.300	0.500
C1	4	C1	3	0.900	0.11	0.500	0.500	0.500	0.500
C2	4	C2	3	0.900	0.10	0.500	0.500	0.300	0.500
A4	5	A5	4	0.915	0.10	0.600	0.600	0.700	0.100
A5	5	A4	5	0.915	0.10	0.600	0.600	0.600	0.100

SOLUTION POST-OPTIMALE No. 3

$$F_2 \rightarrow K(F_4) = 10.5151$$
$$4.3011 =$$

COEFFICIENTS OF: 1.00 1.00 1.00 1.00 1.00

NOISE: 0 ACTIONS : 0 (MAX 1)

1013	De Calfornia	5	1	MAX	2
------	--------------	---	---	-----	---

• **Pragmatic Life-Air Goal** •

```

| NOMBRE DE CONSTANTES = 18
|-----|
| NOMBRE DE VARIABLES = 24
|-----|
| % A(I,J) NON NULS = 24%
|-----|
| NOMBRE D ITERATIONS = 16
|-----|
| OPTIMUM PR = 9.651

```

POWDERATION - UTILITIES J (1) +

CPITERFS	PROBS	CODE 1	CODE 2	CODE 3	CODE 4	CODE 5	CODE 6	CODE 7	CODE 8	CODE 9
1. RAT1	1.074	0.0	1.000	1.000						
2. RAT2	1.395	0.0	1.000	1.0						
3. RAT3	1.002	0.0	1.075	1.0						
4. RAT4	1.072	0.0	1.000							
5. RAT5	1.007	0.0	1.000	1.000						

TAU DE KRONALL = 2.59

[illegible]

FØRTRAN

V

Retour

NC

CODE

NOM

N de CALCUL

PROJET

DATE

1	5	15	25	35	45	55	65	75	85
		LE PROBLEME DE L'OPTIMUM DE CREDITS (B. RØY.)							
	9	5	1,0,0	3,0,0	2,0,0,0	0,0,1	0	1	
	RAT1	RAT2, RAT3, RAT4, RAT5							
	1, 2,	2	2						
	(1 X	A4, 5X, 10, F7, 3)							
	A1	0,7	0,7	0,6	0,5	0,5			
	B1	0,7	0,7	0,5	0,5	0,5			
	B2	0,5	0,5	0,7	0,7	0,7			
	A2	0,5	0,5	0,6	0,7	0,7			
	A3	0,7	0,7	0,3	0,7	0,5			
	C1	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5			
	C2	0,5	0,5	0,3	0,7	0,5			
	A4	0,6	0,6	0,3	0,7	0,1			
	A5	0,6	0,6	0,6	0,5	0,1			
	2	0,3,1							
	-1, 1	0,0,0							
	+1, 1	0,0,0							

Tableau 9 : Bordereau FØRTRAN d'entrées du programme UTA II
Cas de la post-optimalité ($\min[p_1 + p_2]$, $\max[p_1 + p_2]$)

SOLUTION POST-OPTIMALE NO 1
 FN * KERN1 = 0.31
 MAGN1 = 1
 COEFFICIENTS A2 : 1.0 1.0 0.0 0.0 0.0
 NOMBRE D' ACTIONS : 5 (MAX 10)
 NOMBRE DE CRITERES : 5 (MAX 2)

 * PROGRAMME LINEAIRE JOUL *

NOMBRE DE CONTRAINTES =	14
NOMBRE DE VARIABLES =	15
% ATTENUATION =	36%
NOMBRE D' ITERATIONS =	10
OPTIMUM FN =	0.0313

CRITERES	POIDS
1. RAT1	1.0
2. RAT2	0.474
3. RATE	0.15
4. RAT4	0.105
5. RATE	0.316

 * COEFFICIENT D' AJUSTEMENT *

TAU DE KENDALL = 0.80

PREMIER EXPL		PREMIER JURY PAR UTILITE											
ACTION KANS		ACTION KANS		UTILITE U	SIGMA	EVALUATION MULTICRITERE (JG(1)) DES ACTIONS							
A1	1	A1	1	0.03	0.319	0.700	0.700	0.600	0.500	0.500			
A2	2	A2	2	0.03	0.11	0.700	0.700	0.500	0.500	0.500			
A2	3	A1	3	0.03	0.0	0.500	0.500	0.700	0.700	0.700			
A3	3	A2	2	0.03	0.0	0.500	0.500	0.600	0.600	0.600			
C1	4	C2	3	0.03	0.0	0.700	0.700	0.500	0.500	0.500			
C2	4	C1	3	0.03	0.0	0.500	0.500	0.700	0.700	0.700			
A4	5	A3	4	0.03	0.11	0.500	0.500	0.500	0.500	0.500			
A5	5	A4	5	0.03	0.0	0.600	0.600	0.500	0.500	0.500			

SOLUTION POST-OPTIMALE NO 2
 FN * KERN1 = 0.31
 MAGN1 = 1
 COEFFICIENTS A2 : 1.0 1.0 0.0 0.0 0.0
 NOMBRE D' ACTIONS : 5 (MAX 10)
 NOMBRE DE CRITERES : 5 (MAX 10)

 * PROGRAMME LINEAIRE JOUL *

NOMBRE DE CONTRAINTES =	14
NOMBRE DE VARIABLES =	15
% ATTENUATION =	36%
NOMBRE D' ITERATIONS =	10
OPTIMUM FN =	0.0316

CRITERES	POIDS
1. RAT1	1.0
2. RAT2	0.502
3. RATE	0.090
4. RAT4	0.040
5. RATE	0.307

 * COEFFICIENT D' AJUSTEMENT *

TAU DE KENDALL = 0.72

PREMIER EXPL		PREMIER JURY PAR UTILITE											
ACTION KANS		ACTION KANS		UTILITE U	SIGMA	EVALUATION MULTICRITERE (JG(1)) DES ACTIONS							
A1	1	A1	1	0.03	0.0	0.700	0.700	0.600	0.500	0.500			
A2	2	A2	2	0.03	0.0	0.700	0.700	0.500	0.500	0.500			
A2	3	A1	3	0.03	0.0	0.500	0.500	0.700	0.700	0.700			
A3	3	A2	2	0.03	0.0	0.500	0.500	0.600	0.600	0.600			
C1	4	C2	3	0.03	0.0	0.700	0.700	0.500	0.500	0.500			
C2	4	C1	3	0.03	0.0	0.500	0.500	0.700	0.700	0.700			
A4	5	A3	4	0.03	0.0	0.600	0.600	0.500	0.500	0.500			
A5	5	A4	5	0.03	0.0	0.600	0.600	0.500	0.500	0.500			

VI. REFERENCES

- [1] R.H. BARTELS, A stabilization of the simplex method, *Numerische Mathematik* 16, 1971, p. 414-434.
- [2] P. BERTIER et J.M. BOUROCHE, *Analyse des données multidimensionnelles*, P.U.F., Paris, 1975.
- [3] A. CHARNES et W.W. COOPER, *Management models and industrial applications of linear programming*, Vol. 1, John Wiley and Sons, 1961.
- [4] A. CHARNES et W.W. COOPER, Goal programming and multiple objective optimizations Part 1, *European Journal of Operational Research* 1, 1977, p. 39-54.
- [5] G. DEBREU, Topological methods in cardinal utility theory, dans : K.J. ARROW, S. KARLIN et P. SUPPES (Eds), *Mathematical methods in the social sciences*, Stanford University Press, Stanford, Calif., 1960, p. 16-26.
- [6] P.H. FARQUHAR, A survey of multiattribute utility theory and applications, *TIMS Studies in the Management Sciences* 6, North-Holland Publishing Company, 1977, p. 59-89.
- [7] P. FISHBURN, Independence in utility theory with whole product sets, *Operations Research*, Vol. 13, 1965, p. 28-45.
- [8] P. FISHBURN, Methods of estimating additive utilities, *Management Science*, Vol. 13, n° 7, 1967, p. 435-453.
- [9] P. FISHBURN, Multiattribute utilities in expected utility theory, dans : D.E. BELL, R.L. KEENEY et H. RAIFFA (Eds), *Conflicting Objectives in Decisions*, IIASA, John Wiley and Sons, 1977.

- [10] E. JACQUET-LAGREZE, De la logique d'agrégation de critères à une logique d'agrégation-désagrégation de préférences et de jugements, Cahier LAMSADE n° 18-1978, Université Paris IX Dauphine, Communication présentée à la 8ème Conférence Internationale de l'IFORS, Toronto, 19-23 juin 1978.
- [11] E. JACQUET-LAGREZE et J. SISKOS, Une méthode de construction d'une fonction d'utilité additive explicative d'une préférence globale, Cahier LAMSADE n° 16-1978, Université Paris IX Dauphine, Communication présentée aux Journées de l'ASU, Nice, 22-24 mai 1978.
- [12] R.L. KEENEY et H. RAIFFA, Additive value functions, dans : Théorie de la décision et applications, Actes du colloque CESMAP, CNIPE édition, 1973, p. 65-79.
- [13] R.L. KEENEY et H. RAIFFA, Decisions with multiple objectives : preferences and value tradeoffs, John Wiley and Sons, 1976.
- [14] R.D. LUCE et J.W. TUKEY, Simultaneous conjoint measurement : a new type of fundamental measurement, Journal of Mathematical Psychology, Vol. 1, 1964, p. 1-27.
- [15] J.C. MARCHET et J. SISKOS, Aide à la décision en matière d'environnement : application au choix de tracé autoroutier, à paraître dans la Revue "Sistemi Urbani".
- [16] J. MOSCAROLA et B. ROY, Procédure automatique d'examen de dossiers fondée sur une segmentation trichotomique en présence de critères multiples, RAIRO Recherche Opérationnelle, Vol. 11, n° 2, 1977, p. 145-173.
- [17] K.R. OPPENHEIMER, A proxy approach to multi-attribute decision making, Management Science, Vol. 24, n° 6, 1978, p. 675-689.

- [18] R.A. POLLAK, Additive von Neumann-Morgenstern utility functions, *Econometrica*, Vol. 35, n° 3-4, 1967, p. 485-494.
- [19] B. ROY, Vers une méthodologie générale d'aide à la décision, *Revue METRA*, Vol. XIV, n° 3, 1975, p. 359-497.
- [20] B. ROY, L'aide à la décision - Critères multiples et optimisation pour choisir, trier, ranger, Livre en préparation, 1978.
- [21] J. SISKOS, La modélisation des préférences au moyen de fonctions d'utilité additives, Thèse de 3e Cycle, Institut de Programmation, Paris VI, juin 1979.
- [22] P. TOLLA, Contrôle et amélioration de la précision numérique des codes de programmation linéaire continue, *RAIRO Recherche Opérationnelle*, Vol. 11, n° 1, 1977, p. 109-121.
- [23] C. VAN DE PANNE, Methods for linear and quadratic programming, North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1975, p. 202-231.