

CAHIER DU LAMSADE

Laboratoire d'Analyse et Modélisation de Systèmes pour l'Aide à la Décision

(Université Paris-Dauphine)

Equipe de Recherche Associée au C.N.R.S. N° 656

VRAIS, QUASI, PSEUDO ET PRECRITERES
DANS UN ENSEMBLE FINI :
Propriétés et Algorithmes

N° 27-1980

Ph. VINCKE

Février 1980

SOMMAIRE

	<u>Pages</u>
<u>ABSTRACT</u>	I
<u>RESUME</u>	III
I - <u>PREORDRES COMPLETS ET VRAIS CRITERES</u>	1
1. Préordre complet (ou total)	1
2. Vrai critère	2
3. Théorème	2
4. Représentation d'un préordre complet par un vrai critère : algorithme I.1	3
II - <u>QUASI-ORDRES ET QUASI-CRITERES</u>	5
1. Quasi-ordre	5
2. Quasi-critère	6
3. Théorème	7
4. Représentation d'un quasi-ordre par un quasi-critère à seuil variable : algorithme II.1	7
5. Représentation d'un quasi-ordre par un quasi-critère à seuil constant : algorithme II.2	8
III - <u>PSEUDO-ORDRES ET PSEUDO-CRITERES</u>	11
1. Pseudo-ordre	11
2. Pseudo-critère	16
3. Théorème	16
4. Représentation d'un pseudo-ordre par un pseudo-critère à seuils variables : algorithme III.1	17
5. Représentation d'un pseudo-ordre par un pseudo-critère à seuil d'indifférence constant et seuil de préférence variable : algorithme III.2	17
6. Représentation d'un pseudo-ordre par un pseudo-critère à seuil d'indifférence variable et à seuil de préférence constant : algorithme III.3	23

	<u>Pages</u>
IV - <u>PSEUDO-CRITERES A DEUX SEUILS CONSTANTS</u>	29
1. Exemple montrant que la structure de pseudo-ordre n'est pas suffisante pour avoir un pseudo-critère à 2 seuils constants	29
2. Définitions préliminaires	30
3. Théorème	31
4. Condition C_n et pseudo-critère	32
5. Représentation d'un triplet (I, Q, P) satisfaisant la condition C_n au moyen d'un pseudo-critère à 2 seuils constants : algorithme IV.1	34
6. La condition C_2	37
7. Le théorème de l'alternative	41
V - <u>QUASI-ORDRES ORIENTES ET PRECRITERES</u>	49
1. Quasi-ordre orienté	49
2. Précritère	49
3. Théorème	50
4. Représentation d'un quasi-ordre orienté par un pré-critère à seuil constant : algorithme V.1	50
VI - <u>EXEMPLE</u>	51
<u>BIBLIOGRAPHIE</u>	61

TRUE, QUASI, PSEUDO AND PRECRITERIA IN A FINITE SET :
PROPERTIES AND ALGORITHMS

ABSTRACT

This paper proposes the algorithms to represent, in a finite set :

- 1°) a complete preorder by a true criterion,
- 2°) a semiorder by a quasi-criterion (variable or constant threshold),
- 3°) a pseudo-order by a pseudo-criterion (2 variable thresholds or one variable and one constant),
- 4°) an oriented semiorder by a precriterion (variable or constant threshold).

It also gives the condition which is necessary and sufficient to have a pseudo-criterion with 2 constant thresholds and the corresponding algorithm.

The main algorithms are illustrated by an example.

VRAIS, QUASI, PSEUDO ET PRECRITERES DANS UN ENSEMBLE FINI :
PROPRIETES ET ALGORITHMES

RESUME

Ce cahier propose des algorithmes permettant de représenter, dans un ensemble fini :

- 1°) un préordre complet par un vrai-critère,
- 2°) un quasi-ordre par un quasi-critère (seuil variable ou constant),
- 3°) un pseudo-ordre par un pseudo-critère (2 seuils variables ou un des 2 seuils constant),
- 4°) un quasi-ordre orienté par un précritère (seuil variable ou constant).

Il fournit également la condition nécessaire et suffisante pour avoir un pseudo-critère à 2 seuils constants et l'algorithme correspondant.

Un exemple illustre les principaux algorithmes présentés.

I - PREORDRES COMPLETS ET VRAIS CRITERES

1. Préordre complet (ou total)

Définition : une relation S dans un ensemble A constitue un pré-ordre complet ssi

- elle est transitive : $\forall a, b, c \in A : a S b, b S c \Rightarrow a S c,$
- elle est complète (ou totale) : $\forall a, b \in A : a S b$ et/ou $b S a.$

Propriétés (démonstrations simples)

La relation $\overset{\circ}{S}$ définie par

$$a \overset{\circ}{S} b \text{ ssi } a S b \text{ et } b S a$$

est une relation d'équivalence (réflexive, symétrique, transitive). S est un préordre complet ssi la relation $\bar{S}$, définie par

$$a \bar{S} b \text{ ssi } a S b \text{ et } b \not S a$$

est un "ordre faible" (weak order), c'est-à-dire une relation

- asymétrique : $\forall a, b \in A : a \bar{S} b \Rightarrow b \not \bar{S} a,$
- négativement transitive : $\forall a, b, c \in A : a \bar{S} b, b \bar{S} c \Rightarrow a \bar{S} c.$

On a

$$\begin{aligned} a S b & \text{ ssi } a \bar{S} b \text{ ou } a \overset{\circ}{S} b ; \\ a \overset{\circ}{S} b & \text{ ssi } a \bar{S} b \text{ et } b \bar{S} a. \end{aligned}$$

Désignons par $A_1, A_2, A_3, \dots$ les classes de l'équivalence $\overset{\circ}{S}$ (a et b appartiennent à la même classe ssi $a \overset{\circ}{S} b$).

La relation T définie dans $\{A_1, A_2, A_3, \dots\}$ par

$$A_i T A_j \text{ ssi } a S b, \forall a \in A_i, \forall b \in A_j$$

est un ordre total (relation antisymétrique, transitive, totale).

Un préordre complet S dans A définit en fait un rangement des éléments de A avec d'éventuelles classes d'ex-aequo (qui sont les classes A_i).

2. Vrai critère

Définition : un vrai critère sur un ensemble A est une fonction g , à valeurs réelles, telle que, $\forall a, b \in A$:

$$\begin{cases} a I b \Leftrightarrow g(a) = g(b), \\ a P b \Leftrightarrow g(a) > g(b), \end{cases}$$

où I et P désignent respectivement une relation d'indifférence et une relation de préférence sur A .

3. Théorème

La condition nécessaire et suffisante pour avoir un vrai critère sur un ensemble fini A est que la relation S définie par

$$a S b \text{ ssi } a I b \text{ ou } a P b$$

soit un préordre complet.

Nous ne rappelons pas ici la démonstration (très simple) de ce théorème bien connu.

4. Représentation d'un préordre complet par un vrai critère : algorithme I.1

Soit $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$.

Etape 1 : $g(a_1) = 0$.

Etape k ($k = 2, \dots, n$) :

- s'il existe $i < k$ tel que $a_k \text{ I } a_i$, $g(a_k) = g(a_i)$;
- si $a_k \text{ P } a_i$, $\forall i < k$, $g(a_k) = \max_{i < k} g(a_i) + 1$;
- si $a_i \text{ P } a_k$, $\forall i < k$, $g(a_k) = \min_{i < k} g(a_i) - 1$;
- dans les autres cas, $g(a_k) = \frac{1}{2} \{g(a_1) + g(a_s)\}$ où
 $1 < k$, $a_k \text{ P } a_1$ et $\nexists i < k : a_k \text{ P } a_i \text{ P } a_1$,
 $s < k$, $a_s \text{ P } a_k$ et $\nexists j < k : a_s \text{ P } a_j \text{ P } a_k$.

La justification de cet algorithme est immédiate.

II - QUASI-ORDRES ET QUASI-CRITERES

1. Quasi-ordre ($[2]$, $[3]$)

Définition : un couple (I, P) de relations dans un ensemble A est un quasi-ordre ssi

- $\forall a, b \in A : a I b$ ou $a P b$ ou $b P a$ (ou exclusifs) ;
- $\forall a \in A : a I a$;
- $\forall a, b, c, d \in A : a P b, b I c, c P d \Rightarrow a P d$ ($P I P \subset P$) ;
- $\forall a, b, c, d \in A : a P b, b P c, a I d \Rightarrow d I c$ ($P^2 \cap I^2 = \emptyset$).

Propriétés

La relation I est réflexive et symétrique ; elle n'est pas nécessairement transitive.

La relation P est asymétrique et transitive.

La relation S définie par

$$a S b \text{ ssi } \forall c \in A : \begin{cases} c P a \Rightarrow c P b, \\ b P c \Rightarrow a P c \end{cases}$$

est un préordre complet (démonstration simple).

Nous désignons par $A_1, A_2, \dots$ les classes de l'équivalence $\overset{\circ}{S}$, numérotées de telle sorte que

$$A_i T A_j \text{ ssi } i \geq j$$

où $\overset{\circ}{S}$ et T sont définies à partir de S comme dans la section précédente (cette numérotation est possible puisque T est un ordre total).

Notons encore

$$\begin{aligned} A_i P A_j & \text{ssi } a P b, \forall a \in A_i, \forall b \in A_j, \\ a_i I A_j & \text{ssi } a I b, \forall a \in A_i, \forall b \in A_j \end{aligned}$$

(cet abus de notations a un sens puisque les éléments d'une même classe d'équivalence ont tous le même comportement vis-à-vis des autres éléments de A ; (I, P) est un quasi-ordre sur l'ensemble des classes $\{A_1, A_2, A_3, \dots\}$).

Il résulte des définitions précédentes que :

$$\begin{aligned} i > j & \Rightarrow A_i P A_j \text{ ou } A_i I A_j, \\ A_i P A_j \text{ et } j \geq k & \Rightarrow A_i P A_k, \\ i \geq j \text{ et } A_j P A_k & \Rightarrow A_i P A_k, \\ A_i I A_j \text{ et } i \leq k \leq j & \Rightarrow A_i I A_k, A_k I A_j. \end{aligned}$$

Ces propriétés sont à la base des algorithmes II.1 et II.2.

2. Quasi-critère ([6])

Définition : un quasi-critère sur un ensemble A est un couple (g, q) de fonctions à valeurs réelles telles que $\forall a, b \in A$:

$$\left\{ \begin{array}{l} a I b \Leftrightarrow \begin{cases} g(a) \leq g(b) + q(b), \\ g(b) \leq g(a) + q(a), \end{cases} \\ a P b \Leftrightarrow g(a) > g(b) + q(b), \\ q(a) \geq 0, \\ \frac{q(a) - q(b)}{g(a) - g(b)} \geq -1. \end{array} \right.$$

q sera appelée seuil d'indifférence.

La dernière inégalité est une condition de cohérence qui peut encore s'écrire

$$\begin{cases} g(a) > g(b) \Rightarrow g(a) + q(a) \geq g(b) + q(b), \\ g(a) = g(b) \Rightarrow g(a) + q(a) = g(b) + q(b). \end{cases}$$

3. Théorème

La condition nécessaire et suffisante pour avoir un quasi-critère sur un ensemble fini A est que le couple (I, P) soit un quasi-ordre.

La démonstration de la condition nécessaire est laissée au lecteur : il suffit de vérifier que l'existence d'un quasi-critère implique les 4 axiomes définissant le quasi-ordre.

La démonstration de la condition suffisante peut être faite à partir d'un "théorème de l'alternative" sur les systèmes d'inéquations ($[1]$) ; nous utiliserons d'ailleurs ce théorème plus loin. Une autre façon de démontrer la condition suffisante consiste à bâtir un algorithme qui permette de représenter n'importe quel quasi-ordre au moyen d'un quasi-critère. C'est l'objet de l'algorithme II.1. L'algorithme II.2 montre que tout quasi-ordre peut être représenté au moyen d'un quasi-critère à seuil constant (rappelons que A est supposé fini).

4. Représentation d'un quasi-ordre par un quasi-critère à seuil variable : algorithme II.1

Soit $A_1, A_2, \dots, A_m$ les classes d'équivalence définies ci-dessus. Nous allons construire un quasi-critère sur $\{A_1, A_2, \dots, A_m\}$; le quasi-critère sur A s'en déduira immédiatement comme suit :

$$g(a) = g(A_k) \text{ et } q(a) = q(A_k), \forall a \in A_k, \forall k.$$

Le quasi-critère sur $\{A_1, A_2, \dots, A_m\}$ peut être défini de la façon suivante : $\forall k = 1, 2, \dots, m$:

$$\begin{aligned}g(A_k) &= k \\q(A_k) &= l_k - k\end{aligned}$$

où

$$l_k = \max\{j : A_j \text{ I } A_k\}.$$

La justification de cet algorithme est immédiate.

5. Représentation d'un quasi-ordre par un quasi-critère à seuil constant : algorithme II.2

Comme dans le cas précédent, il suffit de construire un quasi-critère à seuil constant sur $\{A_1, A_2, \dots, A_m\}$.

On donne à q une valeur constante arbitraire positive.

Etape 1 : $g(A_1) = 0$.

Etape k ($k = 2, 3, \dots, m$) :

- si $A_k \text{ I } A_1$, $g(A_k) = \frac{1}{2} [g(A_{k-1}) + \bar{q}]$;
- si $A_k \text{ P } A_{k-1}$, $g(A_k) = g(A_{k-1}) + q + 1$;
- dans les autres cas,

$$(1) \quad g(A_k) = \frac{1}{2} \{ \max [g(A_{k-1}), g(A_{j_k}) + \bar{q}] + g(A_{j_k+1}) + q \},$$

où

$$j_k = \max\{j : A_k \text{ P } A_j\}.$$

Justification (par récurrence)

Supposons les conditions suivantes satisfaites $\forall i, j \leq k-1$:

$$\begin{cases} A_i \text{ I } A_j \iff |g(A_i) - g(A_j)| < q, \\ A_i \text{ P } A_j \iff g(A_i) > g(A_j) + q, \\ i > j \iff g(A_i) > g(A_j) \end{cases}$$

(il résulte immédiatement de l'algorithme qu'elles sont satisfaites pour $k - 1 = 1$ et 2).

Nous devons démontrer que ces conditions sont remplies $\forall i, j \leq k$.

1er cas : $A_k \text{ I } A_1$

Dans ce cas, on a nécessairement $A_i \text{ I } A_j$, $\forall i, j \leq k$.

D'autre part, comme $g(A_{k-1}) < q$ (puisque $A_{k-1} \text{ I } A_1$), il vient

$$g(A_k) = \frac{1}{2} [g(A_{k-1}) + \bar{q}] < q < g(A_j) + q, \quad \forall j < k,$$

et

$$g(A_k) > g(A_{k-1}) > g(A_{k-2}) > \dots g(A_1).$$

2e cas : $A_k \text{ P } A_{k-1}$

Dans ce cas, on a nécessairement $A_k \text{ P } A_j$, $\forall j < k$.

D'autre part

$$g(A_k) = g(A_{k-1}) + q + 1 > g(A_j) + q, \quad \forall j < k.$$

3e cas : de la définition de j_k , il résulte que :

$$\begin{cases} A_k \text{ P } A_j & \text{ssi } j \leq j_k, \\ A_k \text{ I } A_j & \text{ssi } j_k < j. \end{cases}$$

D'autre part,

$$A_k \text{ I } A_{j_k+1} \Rightarrow A_{k-1} \text{ I } A_{j_k+1} \Rightarrow g(A_{k-1}) < g(A_{j_k+1}) + q,$$

$$g(A_{j_k}) < g(A_{j_k+1}) \Rightarrow g(A_{j_k}) + q < g(A_{j_k+1}) + q ;$$

de ces inégalités et de la définition (1), il résulte que :

- $g(A_k) < g(A_{j_k+1}) + q$ et donc $g(A_k) < g(A_j) + q, \forall j > j_k,$
- $g(A_k) > g(A_{j_k}) + q$ et donc $g(A_k) > g(A_j) + q, \forall j \leq j_k,$
- $g(A_k) > g(A_{k-1}),$

ce qu'il fallait démontrer.

III - PSEUDO-ORDRES ET PSEUDO-CRITERES

1. Pseudo-ordre

Définition : un triplet (I, Q, P) de relations dans un ensemble A est un pseudo-ordre ssi :

$$\left\{ \begin{array}{l} - (I, \succ) \text{ est un quasi-ordre ;} \\ - (J^S, P) \text{ est un quasi-ordre ;} \\ - \forall a, b, c, d \in A : \begin{cases} a P b, b I c, c Q d \Rightarrow a P d \text{ (} P I Q \subset P \text{)}, \\ a Q b, b I c, c P d \Rightarrow a P d \text{ (} Q I P \subset P \text{)}, \\ a P b, b Q c, c I d \Rightarrow a P d \text{ (} P Q I \subset P \text{)}, \\ a I b, b Q c, c P d \Rightarrow a P d \text{ (} I Q P \subset P \text{)}, \end{cases} \end{array} \right.$$

où

$a \succ b$ ssi $a Q b$ ou $a P b$

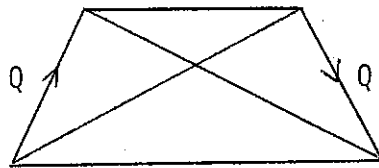
et

$a J^S b$ ssi $a Q b$ ou $a I b$ ou $b Q a$.

Les exemples suivants montrent que cette définition ne contient aucune redondance. Dans chaque exemple, toutes les conditions pour avoir un pseudo-ordre sont satisfaites, sauf une seule qui est indiquée à côté de l'exemple.

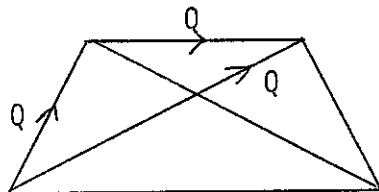
Exemples (les arcs non orientés représentent l'indifférence)

1)



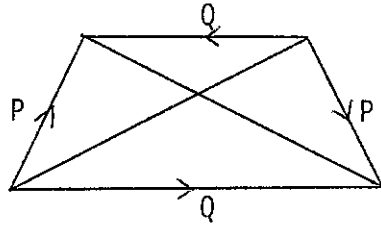
$\succ I \succ \not\subset \succ$

2)



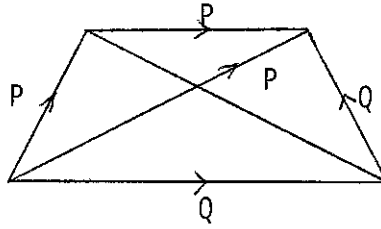
$\succ^2 \cap I^2 \neq \emptyset$

3)



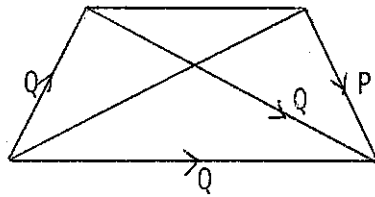
$$P J^S P \not\subseteq P$$

4)



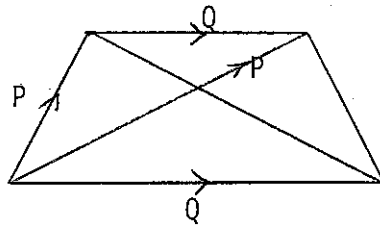
$$P^2 \cap J^{S^2} \neq \emptyset$$

5)



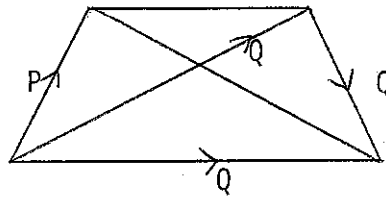
$$Q I P \not\subseteq P$$

6)



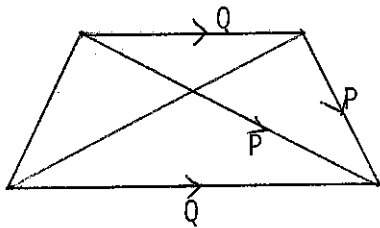
$$P Q I \not\subseteq P$$

7)



$$P I Q \not\subseteq P$$

8)

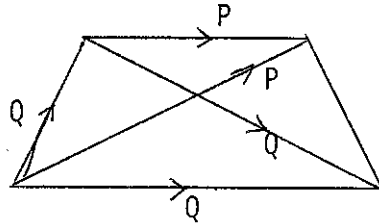


$$I P Q \not\subseteq P$$

Remarque

Les propriétés $Q P I \subset P$ et $I P Q \subset P$, qui ne figurent pas dans la définition du pseudo-ordre, ne sont pas non plus impliquées par les autres conditions.

Voici, par exemple, un pseudo-ordre où $Q P I \not\subset P$:



Propriétés

Les relations I et J^S sont réflexives et symétriques mais ne sont pas nécessairement transitives.

La relation Q est asymétrique.

Les relations P et $\succ$ sont asymétriques et transitives.

La relation S définie par

$$a S b \text{ ssi } \forall c \in A : \begin{cases} c Q a \Rightarrow c \succ b, \\ c P a \Rightarrow c P b, \\ b Q c \Rightarrow a \succ c, \\ b P c \Rightarrow a P c \end{cases}$$

est un préordre complet.

Démonstration

La transitivité de S est immédiate.

Supposons que S ne soit pas complète : $\exists a, b : a \not\leq b$ et $b \not\leq a$.
Cela signifie que $\exists c, d$ tels que

$$\left\{ \begin{array}{l} c Q a, c \not\leq b \\ \text{ou} \\ c P a, c \not\leq b \\ \text{ou} \\ b Q c, a \not\leq c \\ \text{ou} \\ b P c, a \not\leq c \end{array} \right\} \text{ et } \left\{ \begin{array}{l} d Q b, d \not\leq a \\ \text{ou} \\ d P b, d \not\leq a \\ \text{ou} \\ a Q d, b \not\leq d \\ \text{ou} \\ a P d, b \not\leq d \end{array} \right\}$$

16 cas sont donc à envisager ; nous en considérons 8, les autres se traitant de manière analogue ; les 8 cas ci-dessous ont été choisis de manière à montrer l'utilité des 8 conditions introduites dans la définition du pseudo-ordre.

1er cas : $c Q a, c \not\leq b, d Q b, d \not\leq a$.

On a donc $d \succ b, b \left\{ \begin{smallmatrix} I \\ \succ \end{smallmatrix} \right\} c, c \succ a$ et $d \not\leq a$, ce qui contredit $\succ I \prec c \succ$.

2e cas : $c Q a, c \not\leq b, d P b, d \not\leq a$.

On a donc $d P b, b \left\{ \begin{smallmatrix} I \\ \succ \end{smallmatrix} \right\} c, c Q a$ et $d \not\leq a$, ce qui contredit $P I Q \subset P$.

3e cas : $c Q a, c \not\leq b, a Q d, b \not\leq d$.

On a donc $c \succ^2 d, d \left\{ \begin{smallmatrix} I \\ \succ \end{smallmatrix} \right\} b, b \left\{ \begin{smallmatrix} I \\ \succ \end{smallmatrix} \right\} c$, ce qui est en contradiction avec la transitivité et l'asymétrie de $\succ$ ou avec $\succ^2 \cap I^2 = \emptyset$.

4e cas : $c Q a, c \not\leq b, a P d, b \not\leq d$.

On a donc $b \left\{ \begin{smallmatrix} I \\ \succ \end{smallmatrix} \right\} c, c Q a, a P d$ et $b \not\leq d$, ce qui contredit $I Q P \subset P$.

5e cas : $c P a, c \not\leq b, d P b, d \not\leq a$.

On a donc $d P b, b \left\{ \begin{smallmatrix} J^S \\ P \end{smallmatrix} \right\} c, c P a$ et $d \not\leq a$, ce qui contredit $P J^S P \subset P$.

6e cas : $c P a, c \not P b, a Q d, b \not \succ d$.

On a donc $c P a, a Q d, d \left\{ \begin{smallmatrix} I \\ \gamma \end{smallmatrix} \right\} b$ et $c \not P b$, ce qui contredit $P Q I \subset P$.

7e cas : $c P a, c \not P b, a P d, b \not P d$.

On a donc $c P^2 d, d \left\{ \begin{smallmatrix} J^S \\ P \end{smallmatrix} \right\} b, b \left\{ \begin{smallmatrix} J^S \\ P \end{smallmatrix} \right\} c$, ce qui est en contradiction avec la transitivité et l'asymétrie de P ou avec $P^2 \cap J^{S^2} = \emptyset$.

8e cas : $b Q c, a \not \succ c, a P d, b \not P d$.

On a donc $b Q c, c \left\{ \begin{smallmatrix} I \\ \gamma \end{smallmatrix} \right\} a, a P d$ et $b \not P d$, ce qui contredit $Q I P \subset P$.

CQFD

Nous désignons par $A_1, A_2, \dots$ les classes de l'équivalence $\overset{\circ}{S}$ numérotées de telle sorte que

$$A_i T A_j \text{ ssi } i \geq j,$$

$\overset{\circ}{S}$ et T étant définies à partir de S comme dans le chapitre I.

Notons encore

$$\begin{aligned} A_i P A_j & \text{ ssi } a P b, \forall a \in A_i, \forall b \in A_j, \\ A_i Q A_j & \text{ ssi } a Q b, \forall a \in A_i, \forall b \in A_j, \\ A_i I A_j & \text{ ssi } a I b, \forall a \in A_i, \forall b \in A_j. \end{aligned}$$

(I, Q, P) est un pseudo-ordre sur l'ensemble $\{A_1, A_2, \dots\}$.

Il résulte des définitions précédentes que :

$$\begin{aligned}
 i > j &\Rightarrow A_i P A_j \text{ ou } A_i Q A_j \text{ ou } A_i I A_j, \\
 A_i P A_j \text{ et } j \geq k &\Rightarrow A_i P A_k, \\
 i \geq j \text{ et } A_j P A_k &\Rightarrow A_i P A_k, \\
 A_i Q A_j \text{ et } j \geq k &\Rightarrow A_i \succ A_k, \\
 i \geq j \text{ et } A_j Q A_k &\Rightarrow A_i \succ A_k, \\
 A_i I A_j \text{ et } i \leq k \leq j &\Rightarrow A_i I A_k, A_k I A_j.
 \end{aligned}$$

Ces propriétés sont à la base des algorithmes qui suivent.

2. Pseudo-critère ($[5]$, $[6]$)

Définition : un pseudo-critère sur un ensemble A est un triplet (g, q, p) de fonctions à valeurs réelles telles que $\forall a, b \in A$:

$$\left\{ \begin{array}{l}
 a I b \Leftrightarrow \begin{cases} g(a) \leq g(b) + q(b), \\ g(b) \leq g(a) + q(a), \end{cases} \\
 a Q b \Leftrightarrow g(b) + q(b) < g(a) \leq g(b) + p(b), \\
 a P b \Leftrightarrow g(a) > g(b) + p(b), \\
 p(a) \geq q(a) \geq 0, \\
 \frac{q(a) - q(b)}{g(a) - g(b)} \geq -1, \\
 \frac{p(a) - p(b)}{g(a) - g(b)} \geq -1.
 \end{array} \right.$$

q est le seuil d'indifférence et p le seuil de préférence.

Les deux dernières inégalités indiquent que q et p doivent satisfaire à une condition de cohérence analogue à celle vue pour les quasi-critères.

Un pseudo-critère dans lequel $q \equiv p$ est un quasi-critère ; un pseudo-critère dans lequel $q \equiv p \equiv 0$ est un vrai-critère.

3. Théorème

La condition nécessaire et suffisante pour avoir un pseudo-critère sur un ensemble fini A est que le triplet (I, Q, P) soit un pseudo-ordre.

La démonstration de la condition nécessaire est laissée au lecteur. L'algorithme III.1 montre la condition suffisante. En fait, un pseudo-ordre sur un ensemble fini peut toujours être représenté par un pseudo-critère où un des deux seuils est constant ; c'est ce que montrent les algorithmes III.2 (seuil d'indifférence constant) et III.3 (seuil de préférence constant). Nous étudions dans le chapitre suivant les conditions qui permettent de représenter un pseudo-ordre par un pseudo-critère où les deux seuils sont constants.

4. Représentation d'un pseudo-ordre par un pseudo-critère à seuils variables : algorithme III.1

Soit $A_1, A_2, \dots, A_m$ les classes d'équivalence définies ci-dessus. On va construire un pseudo-critère sur $\{A_1, A_2, \dots, A_m\}$; le pseudo-critère sur A s'en déduira immédiatement :

$$g(a) = g(A_k), q(a) = q(A_k), p(a) = p(A_k), \forall a \in A_k, \forall k.$$

Le pseudo-critère peut être défini de la façon suivante :
 $\forall k = 1, 2, \dots, m :$

$$\begin{aligned} g(A_k) &= k, \\ q(A_k) &= l_k - k, \\ p(A_k) &= \begin{cases} r_k - k & \text{s'il existe } i : A_i Q A_k, \\ q(A_k) & \text{sinon} \end{cases} \end{aligned}$$

où

$$l_k = \max \{j : A_j I A_k\},$$

et

$$r_k = \max \{j : A_j Q A_k\}.$$

La justification de cet algorithme est immédiate.

5. Représentation d'un pseudo-ordre par un pseudo-critère à seuil d'indifférence constant et seuil de préférence variable : algorithme III.2

Comme précédemment, ce pseudo-critère est construit sur $\{A_1, A_2, \dots, A_m\}$.

On donne à q une valeur constante positive arbitraire.

Etape 1 : $g(A_1) = 0$.

Etape k ($k = 2, 3, \dots, m$) :

- si $A_k \text{ I } A_1$, $g(A_k) = \frac{1}{2} [g(A_{k-1}) + \bar{q}]$;
- si $A_k \succ A_{k-1}$, $g(A_k) = g(A_{k-1}) + q + 1$;
- dans les autres cas,

$$g(A_k) = \frac{1}{2} \{ \max [g(A_{k-1}), g(A_{j_k}) + \bar{q}] + g(A_{j_k+1}) + q \}$$

où

$$j_k = \max \{j : A_k \succ A_j\}.$$

Etape $m + k$ ($k = 1, 2, 3, \dots, m$) :

$$p(A_k) = \begin{cases} q + 1 & \text{si } A_m \text{ I } A_k, \\ g(A_m) + 1 - g(A_k) & \text{si } A_m \text{ Q } A_k, \\ \frac{1}{2} [g(A_{r_k}) + g(A_{r_k+1})] - g(A_k) & \text{si } A_m \text{ P } A_k \text{ et s' } \exists i : A_i \text{ Q } A_k, \\ \frac{1}{2} [g(A_k) + q + g(A_{l_k+1})] - g(A_k) & \text{autrement,} \end{cases}$$

où

$$r_k = \max \{j : A_j \text{ Q } A_k\}$$

et

$$l_k = \max \{j : A_j \text{ I } A_k\}.$$

Justification

Les m premières étapes de l'algorithme sont identiques à celles de l'algorithme II.2, la relation P étant remplacée par $\succ$. Comme $(I, \succ)$ est un quasi-ordre, il en résulte que l'on a $\forall i, j$:

$$\begin{cases} A_i \text{ I } A_j \iff |g(A_i) - g(A_j)| < q, \\ A_i \succ A_j \iff g(A_i) > g(A_j) + q, \\ i > j \implies g(A_i) > g(A_j). \end{cases}$$

Il reste à démontrer que $\forall i, j$:

$$\begin{aligned} \alpha) & \left\{ \begin{array}{l} A_i Q A_j \Rightarrow g(A_j) + p(A_j) > g(A_i) > g(A_j) + q, \\ \beta) \left\{ \begin{array}{l} A_i P A_j \stackrel{(*)}{\Rightarrow} g(A_i) > g(A_j) + p(A_j), \\ \gamma) \left\{ \begin{array}{l} p(A_j) > q, \forall j, \\ \delta) \left\{ \begin{array}{l} g(A_i) < g(A_j) \Rightarrow g(A_i) + p(A_i) \leq g(A_j) + p(A_j). \end{array} \right. \end{array} \right. \end{array} \right. \end{array}$$

$\alpha)$ Soit $A_i Q A_j$ et $r_j = \max\{r : A_r Q A_j\}$.

Il vient alors, si $r_j = m$

$$i \leq r_j \Rightarrow g(A_i) \leq g(A_m) < g(A_m) + 1 = g(A_j) + p(A_j) ;$$

si $r_j \neq m$,

$$i \leq r_j \Rightarrow g(A_i) \leq g(A_{r_j}) < g(A_{r_j+1})$$

et donc

$$g(A_i) < \frac{1}{2} [g(A_{r_j}) + g(A_{r_j+1})] = g(A_j) + p(A_j).$$

D'autre part,

$$g(A_i) > g(A_j) + q$$

puisque $A_i Q A_j \Rightarrow A_i \succ A_j$.

$\beta)$ Soit $A_i P A_j$.

S'il $\exists h$ tel que $A_h Q A_j$, il vient

(*) Les implications inverses résultent de la conjonction des autres implications.

$$i > r_j \Rightarrow g(A_i) \geq g(A_{r_j+1}) > g(A_{r_j})$$

et donc

$$g(A_i) > \frac{1}{2} [g(A_{r_j}) + g(A_{r_j+1})] = g(A_j) + p(A_j).$$

Sinon

$$i \geq l_j + 1 \Rightarrow g(A_i) \geq g(A_{l_j+1})$$

et

$$A_i \text{ P } A_j \Rightarrow A_i \succ A_j \Rightarrow g(A_i) > g(A_j) + q,$$

donc

$$g(A_i) > \frac{1}{2} [g(A_j) + q + g(A_{l_j+1})] = g(A_j) + p(A_j).$$

γ) Démontrons maintenant que $p(A_j) > q, \forall j$.

C'est évident si $A_m \text{ I } A_j$.

Si $A_m \text{ Q } A_j$, on a

$$g(A_m) > g(A_j) + q,$$

d'où

$$p(A_j) = g(A_m) + 1 - g(A_j) > q + 1 > q.$$

Si $A_m \text{ P } A_j$ et $\exists h : A_h \text{ Q } A_j$, on a

$$A_{r_j} \text{ Q } A_j \Rightarrow g(A_{r_j+1}) > g(A_{r_j}) > g(A_j) + q,$$

d'où

$$p(A_j) = \frac{1}{2} [g(A_{r_j}) + g(A_{r_j+1})] - g(A_j) > q.$$

Dans le dernier cas, on a nécessairement $A_{l_j+1} \text{ P } A_j$, d'où

$$p(A_j) = \frac{1}{2} [g(A_j) + q + g(A_{l_j+1})] - g(A_j) > q.$$

δ) Soit $g(A_i) < g(A_j)$, donc $i < j$

1er cas : $A_m \text{ I } A_i$ et $A_m \text{ I } A_j$,
d'où

$$g(A_i) + p(A_i) = g(A_i) + q + 1 < g(A_j) + q + 1 = g(A_j) + p(A_j).$$

2e cas : $A_m \text{ Q } A_i$ et $A_m \text{ I } A_j$, donc $g(A_m) < g(A_j) + q$,
d'où

$$g(A_i) + p(A_i) = g(A_m) + 1 < g(A_j) + q + 1 = g(A_j) + p(A_j).$$

3e cas : $A_m \text{ P } A_i$, $\exists h : A_h \text{ Q } A_i$ et $A_m \text{ I } A_j$,
d'où

$$g(A_i) + p(A_i) = \frac{1}{2} [g(A_{r_j}) + g(A_{r_j+1})] < g(A_m) < g(A_j) + q + 1 = g(A_j) + p(A_j).$$

4e cas : $A_m \text{ P } A_i$, $\nexists h : A_h \text{ Q } A_i$ et $A_m \text{ I } A_j$,
d'où

$$g(A_i) + p(A_i) = \frac{1}{2} [g(A_i) + q + g(A_{i+1})] < g(A_m) < g(A_j) + q + 1 = g(A_j) + p(A_j).$$

5e cas : $A_m \text{ Q } A_i$ et $A_m \text{ Q } A_j$,
d'où

$$g(A_i) + p(A_i) = g(A_m) + 1 = g(A_j) + p(A_j).$$

6e cas : $A_m \text{ P } A_i$, $\exists h : A_h \text{ Q } A_i$ et $A_m \text{ Q } A_j$,
d'où

$$g(A_i) + p(A_i) = \frac{1}{2} [g(A_{r_j}) + g(A_{r_j+1})] < g(A_m) < g(A_m) + 1 = g(A_j) + p(A_j).$$

7e cas : $A_m \text{ P } A_i$, $\nexists h : A_h \text{ Q } A_i$ et $A_m \text{ Q } A_j$,
d'où

$$g(A_i) + p(A_i) = \frac{1}{2} [g(A_i) + q + g(A_{i+1})] < g(A_m) < g(A_j) + p(A_j).$$

8e cas : $A_m \text{ P } A_i$, $A_m \text{ P } A_j$, $\exists h_1 : A_{h_1} \text{ Q } A_i$, $\exists h_2 : A_{h_2} \text{ Q } A_j$.

Comme $i < j$, on a

$$A_h Q A_j \Rightarrow A_h \succ A_i,$$

d'où

$$r_j \geq r_i$$

et par conséquent

$$\begin{aligned} g(A_i) + p(A_i) &= \frac{1}{2} [g(A_{r_i}) + g(A_{r_i+1})] \\ &\leq \frac{1}{2} [g(A_{r_j}) + g(A_{r_j+1})] = g(A_j) + p(A_j). \end{aligned}$$

9e cas : $A_m P A_i, A_m P A_j, \exists h_1 : A_{h_1} Q A_i, \nexists h_2 : A_{h_2} Q A_j$.
Il est impossible d'avoir

$$g(A_{r_i}) > g(A_j) + q;$$

en effet, il en résulterait

$$\begin{aligned} A_{r_i} \succ A_j &\Rightarrow A_{r_i} P A_j \quad (\text{car } \nexists h_2 : A_{h_2} Q A_j), \\ &\Rightarrow A_{r_i} P A_i \quad (\text{car } j > i), \end{aligned}$$

ce qui est contraire à la définition de r_i .

D'autre part,

$$\begin{aligned} A_{l_j+1} P A_j &\Rightarrow A_{l_j+1} P A_i \quad (j > i), \\ &\Rightarrow l_j + 1 \geq r_i + 1 \quad (\text{définition de } r_i). \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} g(A_i) + p(A_i) &= \frac{1}{2} [g(A_{r_i}) + g(A_{r_i+1})] \\ &\leq \frac{1}{2} [g(A_j) + q + g(A_{l_j+1})] = g(A_j) + p(A_j). \end{aligned}$$

10e cas : $A_m P A_i, A_m P A_j, \nexists h_1 : A_{h_1} Q A_i, \exists h_2 : A_{h_2} Q A_j$.
On a

$$\begin{aligned} A_{r_j} Q A_j &\Rightarrow A_{r_j} \succ A_i \quad (j > i), \\ &\Rightarrow A_{r_j} P A_i \quad (\nexists h_1 : A_{h_1} Q A_i), \end{aligned}$$

d'où

$$g(A_{r_j+1}) > g(A_{r_j}) > g(A_i) + p(A_i)$$

et donc

$$g(A_i) + p(A_i) < \frac{1}{2} [g(A_{r_j}) + g(A_{r_j+1})] = g(A_j) + p(A_j).$$

11e cas : $A_m P A_i, A_m P A_j, \nexists h_1 : A_{h_1} Q A_i, \nexists h_2 : A_{h_2} Q A_j$.

On a

$$A_{l_{j+1}} P A_j \Rightarrow A_{l_{j+1}} P A_i \quad (j > i),$$

$$\Rightarrow l_{j+1} \geq l_i + 1 \quad (\text{définition de } l_i),$$

d'où

$$\begin{aligned} g(A_i) + p(A_i) &= \frac{1}{2} [g(A_i) + q + g(A_{l_{j+1}})] \\ &< \frac{1}{2} [g(A_j) + q + g(A_{l_{j+1}})] = g(A_j) + p(A_j). \end{aligned}$$

Il n'y a pas d'autre cas puisque $i < j$.

CQFD

6. Représentation d'un pseudo-ordre par un pseudo-critère à seuil d'indifférence variable et à seuil de préférence constant : algorithme III.3

Comme précédemment, ce pseudo-critère est construit sur $\{A_1, A_2, \dots, A_m\}$.

On donne à p une valeur constante positive arbitraire.

Etape 1 : $g(A_1) = 0$.

Etape k ($k = 2, 3, \dots, m$) :

- si $A_k J^S A_1$, $g(A_k) = \frac{1}{2} [g(A_{k-1}) + \bar{p}]$;

N.B : $A_k J^S A_1$ ssi $A_k I A_1$ ou $A_k Q A_1$.

- si $A_k P A_{k-1}$, $g(A_k) = g(A_{k-1}) + p + 1$;

- dans les autres cas

$$g(A_k) = \frac{1}{2} \{ \max [g(A_{k-1}), g(A_{j_k}) + \bar{p}] + g(A_{j_k+1}) + p \}$$

où

$$j_k = \max \{j : A_k P A_j\}.$$

Etape $m + k$ ($k = 1, 2, \dots, m$) :

$$q(A_k) \begin{cases} = \frac{1}{2} [g(A_{l_k}) + g(A_{l_k+1})] - g(A_k) & \text{s' } \exists i : A_i Q A_k, \\ = \frac{1}{2} [g(A_{l_k}) + g(A_k) + \bar{p}] - g(A_k) & \text{sinon,} \end{cases}$$

où

$$l_k = \max\{j : A_j \text{ I } A_k\}.$$

N.B : $q(A_k) > 0$ puisque

$$A_k \text{ I } A_k \Rightarrow k \leq l_k \Rightarrow g(A_k) \leq g(A_{l_k}) < g(A_{l_k+1}).$$

Justification

Les m premières étapes de l'algorithme sont identiques à celles de l'algorithme II.2, la relation I étant remplacée par J^S . Comme (J^S, P) est un quasi-ordre, il en résulte que l'on a, $\forall i, j$:

$$\begin{cases} A_i \text{ J}^S A_j \Leftrightarrow |g(A_i) - g(A_j)| < p, \\ A_i \text{ P } A_j \Leftrightarrow g(A_i) > g(A_j) + p, \\ i > j \Rightarrow g(A_i) > g(A_j). \end{cases}$$

Il reste à démontrer que, $\forall i, j$:

$$\begin{aligned} \alpha) & \left\{ \begin{array}{l} A_i \text{ I } A_j \Rightarrow \begin{cases} g(A_i) < g(A_j) + q(A_j), \\ (*) \quad g(A_j) < g(A_i) + q(A_i), \end{cases} \\ \beta) \quad A_i \text{ Q } A_j \Rightarrow g(A_j) + p > g(A_i) > g(A_j) + q(A_j), \\ \gamma) \quad q(A_j) < p, \quad \forall j, \\ \delta) \quad g(A_i) < g(A_j) \Rightarrow g(A_i) + q(A_i) \leq g(A_j) + q(A_j). \end{array} \right. \end{aligned}$$

$\alpha)$ Soit $A_i \text{ I } A_j$ et $\exists h : A_h \text{ Q } A_i$.

Il vient alors

$$j \leq l_i \Rightarrow g(A_j) \leq g(A_{l_i}) < g(A_{l_i+1})$$

et donc

$$g(A_j) < \frac{1}{2} [g(A_{l_i}) + g(A_{l_i+1})] = g(A_i) + q(A_i).$$

(*) Les implications inverses résultent de la conjonction des autres implications.

En supposant $i < j$, ce qui n'est pas restrictif à cause de la symétrie de I , on a encore

$$g(A_i) < g(A_j) < g(A_j) + q(A_j).$$

Soit $A_i I A_j$ et $\nexists h : A_h Q A_i$.

On a toujours

$$j \leq l_i \Rightarrow g(A_j) \leq g(A_{l_i})$$

et de plus

$$A_i I A_j \Rightarrow A_i J^S A_j \Rightarrow g(A_j) < g(A_i) + p,$$

d'où

$$g(A_j) < \frac{1}{2} [g(A_{l_i}) + g(A_i) + p] = g(A_i) + q(A_i).$$

D'autre part, si $i < j$:

$$g(A_i) < g(A_j) < g(A_j) + q(A_j).$$

β) Soit $A_i Q A_j$.

Dans ce cas,

$$i \geq l_j + 1 \Rightarrow g(A_i) \geq g(A_{l_j+1}) > g(A_{l_j})$$

et donc

$$g(A_i) > \frac{1}{2} [g(A_{l_j}) + g(A_{l_j+1})] = g(A_j) + q(A_j).$$

D'autre part,

$$A_i Q A_j \Rightarrow A_i J^S A_j \Rightarrow g(A_i) < g(A_j) + p.$$

γ) Démontrons maintenant que $q(A_j) < p, \forall j$.

S'il existe h tel que $A_h Q A_j$, alors

$$A_{l_j+1} Q A_j,$$

d'où

$$A_{l_j+1} J^S A_j$$

et donc

$$g(A_{l_j}) < g(A_{l_{j+1}}) < g(A_j) + p,$$

ce qui donne

$$q(A_j) = \frac{1}{2} [g(A_{l_j}) + g(A_{l_{j+1}})] - g(A_j) < p.$$

S'il n'existe pas h tel que $A_h \leq A_j$, on a

$$A_{l_j} \leq A_j \Rightarrow A_{l_j} \leq A_j \Rightarrow g(A_{l_j}) < g(A_j) + p,$$

d'où

$$q(A_j) = \frac{1}{2} [g(A_{l_j}) + g(A_j) + p] - g(A_j) < p.$$

δ) Soit $g(A_i) < g(A_j)$ et donc $i < j$.

1er cas : $\exists h_1 : A_{h_1} \leq A_i$ et $\exists h_2 : A_{h_2} \leq A_j$.

Comme $i < j$, on a

$$l_i \leq l_j,$$

d'où

$$\begin{aligned} g(A_i) + q(A_i) &= \frac{1}{2} [g(A_{l_i}) + g(A_{l_{i+1}})] \\ &\leq \frac{1}{2} [g(A_{l_j}) + g(A_{l_{j+1}})] = g(A_j) + q(A_j). \end{aligned}$$

2e cas : $\exists h_1 : A_{h_1} \leq A_i$ et $\nexists h_2 : A_{h_2} \leq A_j$.

Il est impossible d'avoir

$$g(A_{l_{i+1}}) > g(A_j) + p$$

car cela impliquerait

$$A_{l_{i+1}} \leq A_j$$

et donc

$$A_{l_{i+1}} \leq A_i,$$

ce qui est en contradiction avec l'existence de h_1 .

D'autre part, comme dans le cas précédent :

$$l_i \leq l_j,$$

d'où

$$\begin{aligned} g(A_i) + q(A_i) &= \frac{1}{2} [g(A_{l_i}) + g(A_{l_i+1})] \\ &\leq \frac{1}{2} [g(A_{l_j}) + g(A_j) + p] = g(A_j) + q(A_j). \end{aligned}$$

3e cas : $\nexists h_1 : A_{h_1} Q A_i$ et $\nexists h_2 : A_{h_2} Q A_j$.

Il vient

$$\begin{aligned} g(A_i) + q(A_i) &= \frac{1}{2} [g(A_{l_i}) + g(A_i) + p] \\ &\leq \frac{1}{2} [g(A_{l_j}) + g(A_j) + p] = g(A_j) + q(A_j). \end{aligned}$$

4e cas : $\nexists h_1 : A_{h_1} Q A_i$ et $\exists h_2 : A_{h_2} Q A_j$.

Il est impossible d'avoir

$$g(A_i) + p > g(A_{l_j+1})$$

car cela impliquerait

$$A_{l_j+1} J^S A_i$$

et donc

$$A_{l_j+1} I A_i \quad (\text{car } i < j \text{ et } \nexists h_1 : A_{h_1} Q A_i),$$

d'où

$$A_{l_j+1} I A_j,$$

ce qui est en contradiction avec la définition de l_j . Par conséquent,

$$\begin{aligned} g(A_i) + q(A_i) &= \frac{1}{2} [g(A_{l_i}) + g(A_i) + p] \\ &\leq \frac{1}{2} [g(A_{l_j}) + g(A_{l_j+1})] = g(A_j) + q(A_j). \end{aligned}$$

CQFD

IV - PSEUDO-CRITERES A DEUX SEUILS CONSTANTS

1. Exemple montrant que la structure de pseudo-ordre n'est pas suffisante pour avoir un pseudo-critère à 2 seuils constants

Considérons $A = \{a, b, c, d, e\}$ et le pseudo-ordre défini comme suit :

$b \ Q \ a, \ c \ Q \ a, \ d \ Q \ a, \ e \ P \ a,$
 $c \ I \ b, \ d \ Q \ b, \ e \ P \ b,$
 $d \ I \ c, \ e \ I \ c,$
 $e \ I \ d.$

Le tableau ci-dessous donne un pseudo-critère en accord avec ces relations et montre donc qu'elles constituent bien un pseudo-ordre sur A .

	a	b	c	d	e
g	1	3	4	6	9
q	1	2	6	5	3
p	6	5	9	8	6

Supposons que ce pseudo-ordre soit représentable par un pseudo-critère à 2 seuils constants q et p . On aurait alors :

$|g(d) - g(e)| < q$ car $d \ I \ e,$
 $g(e) > g(b) + p$ car $e \ P \ b,$
 $g(b) > g(a) + q$ car $b \ Q \ a,$

d'où

$g(d) + q > g(e) > g(b) + p > g(a) + p + q$

et donc

$g(d) > g(a) + p,$

ce qui est en contradiction avec $d \ Q \ a.$

Cet exemple montre d'ailleurs qu'une condition nécessaire pour avoir 2 seuils constants est que $I P Q \subset P$, propriété qui, comme nous l'avons vu, n'était pas toujours vérifiée par un pseudo-ordre quelconque.

Nous nous proposons maintenant d'établir la condition nécessaire et suffisante pour pouvoir représenter un pseudo-ordre au moyen d'un pseudo-critère à 2 seuils constants.

2. Définitions préliminaires

Soit (I, Q, P) un triplet de relations dans un ensemble fini A . Nous noterons

$$a Q^{-1} b \text{ ssi } b Q a.$$

Nous appellerons chemin dans (I, Q, P) une suite du type

$$a_1 R_1 a_2 R_2 a_3 \dots R_l a_{l+1}$$

où

$$a_1, a_2, \dots, a_{l+1} \in A,$$

(a_1 et a_{l+1} seront les extrémités du chemin)

$$R_1, R_2, \dots, R_l \in \{I, Q, Q^{-1}, P\};$$

$R_1, R_2, \dots, R_l$ seront appelés les arcs de ce chemin ; l sera la longueur du chemin.

La n-valeur de ce chemin sera par définition la somme

$$v_n(R_1) + v_n(R_2) + \dots + v_n(R_l)$$

où

$$v_n(R_i) = \begin{cases} -1 & \text{ssi } R_i = I, \\ +1 & \text{ssi } R_i = Q, \\ -n & \text{ssi } R_i = Q^{-1}, \\ +n & \text{ssi } R_i = P. \end{cases}$$

Ce chemin est un circuit ssi $a_{l+1} \equiv a_1$.

Nous dirons que la condition C_n est satisfaite dans (I, Q, P) si tout circuit dans (I, Q, P) a une n -valeur strictement négative.

N.B. Il est entendu que dans la suite de ce chapitre $I \cup Q \cup P$ est une relation complète (pas d'incomparabilité) et que I est symétrique.

3. Théorème

La condition nécessaire et suffisante pour avoir un pseudo-critère à 2 seuils constants sur un ensemble fini A est qu'il existe un nombre réel n supérieur à 1 tel que la condition C_n soit satisfaite dans (I, Q, P) .

Démonstration de la condition nécessaire

Soit q et p respectivement les seuils d'indifférence et de préférence, supposés constants, et soit $n = \frac{p}{q}$.

Considérons un circuit

$$a_1 R_1 a_2 R_2 a_3 \dots a_l R_l a_1$$

composé de m_1 arcs " Q ", m_2 arcs " P ", m_3 arcs " I " et m_4 arcs " Q^{-1} ".

Si (I, Q, P) est représentable par un pseudo-critère à 2 seuils constants q et p , on a :

$$\begin{aligned} a_i Q a_{i+1} &\Rightarrow g(a_i) > g(a_{i+1}) + q & (m_1 \text{ relations de ce type}) \\ a_i P a_{i+1} &\Rightarrow g(a_i) > g(a_{i+1}) + p & (m_2 \text{ relations de ce type}) \\ a_i I a_{i+1} &\Rightarrow g(a_i) + q > g(a_{i+1}) & (m_3 \text{ relations de ce type}) \\ a_i Q^{-1} a_{i+1} &\Rightarrow g(a_i) + p > g(a_{i+1}) & (m_4 \text{ relations de ce type}). \end{aligned}$$

La somme de toutes ces relations donne

$$m_3 q + m_4 p > m_1 q + m_2 p$$

ou encore

$$m_1 - m_3 + m_2 n - m_4 n < 0,$$

ce qu'il fallait démontrer.

La démonstration de la condition suffisante résultera de l'algorithme de la section 5.

4. Condition C_n et pseudo-critère

Nous nous proposons ici d'étudier les liens qui existent entre la condition C_n et les propriétés auxquelles nous avons été habitués dans les chapitres précédents. En particulier, nous allons voir que l'existence d'un n tel que C_n soit satisfaite dans (I, Q, P) implique que (I, Q, P) est un pseudo-ordre.

Considérons donc un triplet (I, Q, P) dans un ensemble fini A tel que la condition C_n soit satisfaite pour au moins un n .

Le lecteur vérifiera aisément qu'il en résulte que I est réflexive, Q et P sont asymétriques et I, Q, P sont mutuellement exclusives.

$$(i) \quad \underline{\succ I \succ C \succ}$$

Soit $a \succ b$, $b I c$ et $c \succ d$. La n -valeur de ce chemin est donc au moins égale à 1.

Si $d I a$ ou $d \succ a$, on obtient donc un circuit de n -valeur ≥ 0 . Par conséquent, $a \succ d$.

$$(ii) \quad \underline{I^2 \cap I^2 = \emptyset}$$

En effet, si $a \succ b$, $b \succ c$, $a \preceq d$, $d \preceq c$, le circuit $a \succ b \succ c \preceq d \preceq a$ a une n-valeur ≥ 0 .

$$(iii) \quad \underline{P \preceq J^S P \subset P}$$

Soit $a \preceq b$, $b \preceq J^S c$, $c \preceq d$. La n-valeur de ce chemin est donc au moins égale à n .

Si $a \preceq d$ ou $a \preceq d$ ou $d \succ a$, on obtient donc un circuit de n-valeur ≥ 0 . Par conséquent, $a \preceq d$.

$$(iv) \quad \underline{P^2 \cap J^{S^2} = \emptyset}$$

En effet, si $a \preceq b$, $b \preceq c$, $a \preceq J^S d$, $d \preceq J^S c$, le circuit $a \preceq b \preceq c \preceq J^S d \preceq J^S a$ a une n-valeur ≥ 0 .

$$(v) \quad \underline{P \preceq I Q \subset P ; Q \preceq I P \subset P ; P \preceq Q I \subset P ; I \preceq Q P \subset P}$$

Soit $a \preceq R_1 b$, $b \preceq R_2 c$, $c \preceq R_3 d$ où $\{R_1, R_2, R_3\} = \{I, Q, P\}$. La n-valeur de ce chemin est donc au moins égale à n .

Si $a \preceq d$, $a \preceq d$ ou $d \succ a$, on obtient donc un circuit de n-valeur ≥ 0 . Par conséquent, $a \preceq d$.

Il résulte des 5 propriétés précédentes que (I, Q, P) est un pseudo-ordre.

$$(vi) \quad \underline{I \preceq P Q \subset P ; Q \preceq P I \subset P}$$

Résultent immédiatement de la démonstration précédente.

$$(vii) \quad \begin{cases} \underline{Q^k \cap Q = \emptyset, \forall \text{ entier } k \geq n,} \\ \underline{P \cap I^k = \emptyset, \forall \text{ entier } k \leq n} \end{cases}$$

Démonstrations immédiates.

5. Représentation d'un triplet (I, Q, P) satisfaisant la condition C_n au moyen d'un pseudo-critère à 2 seuils constants : algorithme IV.1

Cet algorithme constitue la démonstration de la condition suffisante du théorème de la section 3.

Soit (I, Q, P) un triplet de relations satisfaisant la condition C_n ($n > 1$). Nous savons (cf. section 4) que (I, Q, P) est alors un pseudo-ordre.

Comme dans le chapitre III, nous allons travailler dans l'ensemble des classes A_j obtenues à partir du préordre complet associé à (I, Q, P) .

Nous notons

$$A_i \succ_r^n A_j \quad (r = \text{entier quelconque})$$

s'il existe un chemin dans (I, Q, P) , d'extrémités A_i et A_j et de n -valeur supérieure ou égale à r (voir dans le chapitre VI la manière de trouver ces chemins).

Les 2 propriétés suivantes se démontrent aisément :

$$1^\circ) \quad A_i \succ_r^n A_j \quad \text{et} \quad r \geq n \Rightarrow A_i P A_j,$$

$$2^\circ) \quad A_i \succ_r^n A_j \quad \text{et} \quad j \geq k \Rightarrow A_i \succ_r^n A_k.$$

On donne à q une valeur constante positive arbitraire et on pose $p = nq$.

Etape 1 : $g(A_1) = 0$.

Etape k :

$$- \text{ si } A_k I A_1, \quad g(A_k) = \frac{1}{2} [g(A_{k-1}) + q]$$

- si $A_k \text{ P } A_{k-1}$, $g(A_k) = g(A_{k-1}) + p + 1$

- dans les autres cas

$$g(A_k) = \frac{1}{2} \left\{ \max_{1 \leq r \leq n} \left[\max_{1 \leq s \leq n} \left[g(A_{k_r}) + r\bar{q} \right], g(A_{k-1}) \right] + \min_{1 \leq s \leq n} \left[g(A_{s^k}) + s\bar{q} \right] \right\},$$

où

$$k_r = \max_{i \geq k} \{i : A_k \succ_r^n A_i\},$$

$$s^k = \min_{i < k} \{i : A_i \succ_{-s}^n A_k\},$$

$g(A_{k_r}) = -\infty$ lorsque k_r n'existe pas,

$g(A_{s^k}) = +\infty$ lorsque s^k n'existe pas.

Remarque : Les quantités apparaissant dans la définition de $g(A_k)$ existent toujours puisque $A_k \succ_1^n A_1$ et $A_{k-1} \succ_{-n}^n A_k$.

Justification (par récurrence)

Supposons les conditions suivantes satisfaites $\forall i, j \leq k-1$:

$$\left\{ \begin{array}{l} A_i \text{ I } A_j \iff |g(A_i) - g(A_j)| < q, \\ A_i \text{ Q } A_j \iff g(A_j) + p > g(A_i) > g(A_j) + q, \\ A_i \text{ P } A_j \iff g(A_i) > g(A_j) + p, \\ i \gg j \implies g(A_i) > g(A_j), \\ A_i \succ_r^n A_j \implies g(A_i) > g(A_j) + r\bar{q}. \end{array} \right.$$

(il résulte immédiatement de l'algorithme qu'elles sont satisfaites pour $k-1=1$ et 2).

Nous devons démontrer que ces conditions sont remplies $\forall i, j \leq k$.

1er cas : $A_k \text{ I } A_1$

Dans ce cas, on a nécessairement $A_i \text{ I } A_j$, $\forall i, j \leq k$. D'autre part, comme $g(A_{k-1}) < q$ (puisque $A_{k-1} \text{ I } A_1$), il vient

$$g(A_k) = \frac{1}{2} [g(A_{k-1}) + q] < q < g(A_j) + q, \quad \forall j < k$$

et

$$g(A_k) > g(A_{k-1}) > g(A_{k-2}) > \dots > g(A_1).$$

2e cas : $A_k P A_{k-1}$

Dans ce cas, on a nécessairement $A_k P A_j, \forall j \leq k$. D'autre part,

$$g(A_k) = g(A_{k-1}) + p + 1 > g(A_j) + p, \quad \forall j \leq k.$$

3e cas : de la définition de k_r et s_k , il résulte que :

$$\begin{aligned} A_k P A_j & \text{ssi } j \leq k_n, \\ A_k I A_j & \text{ssi } j \geq 1^k. \end{aligned}$$

Nous allons démontrer ci-dessous que

$$\begin{aligned} 1^\circ) \quad \max_{1 \leq r \leq n} [g(A_{k_r}) + rq] & < \min_{1 \leq s \leq n} [g(A_{s^k}) + sq], \\ 2^\circ) \quad g(A_{k-1}) & < \min_{1 \leq s \leq n} [g(A_{s^k}) + sq]. \end{aligned}$$

Il en résultera :

$$\begin{aligned} g(A_k) & > g(A_{k_n}) + p > g(A_j) + p, \quad \forall j \leq k_n, \\ g(A_k) & < g(A_{1^k}) + q < g(A_j) + q, \quad \forall j \geq 1^k, \\ g(A_k) & > g(A_{k-1}), \\ A_k \succ_r^n A_j & \Rightarrow g(A_k) > g(A_{k_r}) + rq > g(A_j) + rq, \\ A_k Q A_j & \Rightarrow A_k \succ_1^n A_j \text{ et } A_j \succ_{-n}^n A_k, \\ & \Rightarrow g(A_k) > g(A_j) + q \text{ et } g(A_j) > g(A_k) - p, \end{aligned}$$

ce qu'il fallait démontrer.

1°) Comme $A_k \succ_r^n A_{k_r}$ et $A_s \succ_{-s}^n A_k$, $\forall r, s$, on a
 $A_s \succ_{r-s}^n A_{k_r}$
 et donc

$$g(A_s) > g(A_{k_r}) + (r - s)q, \forall r, s.$$

2°) Comme $A_s \succ_{-s}^n A_k$, $\forall s$, on a $A_s \succ_{-s}^n A_{k-1}$, $\forall s$ et donc
 $g(A_s) > g(A_{k-1}) - sq, \forall s.$

6. La condition C_2

Théorème : la condition C_2 est satisfaite dans (I, Q, P) ssi (I, Q, P) est un pseudo-ordre tel que $Q^2 \cap Q = \emptyset$ et $P \cap I^2 = \emptyset$.

La condition nécessaire résulte de la section 4.

Démonstration de la condition suffisante

Soit (I, Q, P) un pseudo-ordre tel que $Q^2 \cap Q = \emptyset$ et $P \cap I^2 = \emptyset$.
 Nous devons démontrer que tout circuit dans (I, Q, P) a une 2-valeur négative.

α) Nous laissons au lecteur le soin de démontrer que cette propriété est vraie pour tous les circuits de longueur 2 et 3. On remarquera, à ce propos, que les conditions $Q^2 \cap Q = \emptyset$ et $P \cap I^2 = \emptyset$ impliquent les propriétés (vi) de la section 4.

β) Supposons la propriété vraie pour tout circuit de longueur $\leq k$ ($k \geq 3$).

Soit

$$a_1 R_1 a_2 R_2 a_3 \dots R_{k+1} a_1$$

un circuit de (I, Q, P) de longueur $k + 1$ et de 2-valeur positive ou nulle.

Ce circuit doit nécessairement contenir au moins un des chemins suivants :

- 1°) $a_i P a_{i+1} I a_{i+2}$,
- 2°) $a_i P a_{i+1} Q^{-1} a_{i+2}$,
- 3°) $a_i Q a_{i+1} I a_{i+2}$,
- 4°) $a_i Q a_{i+1} Q^{-1} a_{i+2}$,

sinon on aurait soit

$$R_i \in \{I, Q^{-1}\}, i = 1, 2, \dots, k + 1,$$

ce qui donnerait un circuit de 2-valeur négative, soit

$$R_i \in \{Q, P\}, i = 1, 2, \dots, k + 1,$$

ce qui donnerait $a_1 P a_1$.

Nous allons montrer que, dans chacun des 4 cas, on peut trouver un circuit de longueur $\leq k$ et de 2-valeur positive ou nulle, ce qui sera en contradiction avec l'hypothèse.

1°) Si $a_i P a_{i+1} I a_{i+2}$, alors $a_i \succ a_{i+2}$ et le circuit

$$a_1 R_1 a_2 \dots R_{i-1} a_i \succ a_{i+2} R_{i+2} \dots$$

a une longueur k et une 2-valeur supérieure ou égale au circuit initial puisque $v_2(P) = 2$, $v_2(I) = -1$ et $v_2(\succ) = 1$ ou 2 suivant que $\succ = Q$ ou P .

2°) Si $a_i P a_{i+1} Q^{-1} a_{i+2}$, alors $a_i S a_{i+2}$ (définition de S : voir chapitre III).

- Si $a_i \succ a_{i+2}$, le circuit

$$a_1 R_1 a_2 \dots R_{i-1} a_i \succ a_{i+2} \dots$$

a une longueur k et une 2-valeur supérieure au circuit initial.

- Si $a_i I a_{i+2} \succ a_{i+3}$, alors $a_i \succ a_{i+3}$ et le circuit

$$a_1 R_1 a_2 \dots R_{i-1} a_i \succ a_{i+3} \dots$$

a une longueur $k - 1$ et une 2-valeur supérieure ou égale au circuit initial.

- Si $a_i I a_{i+2} I a_{i+3}$, alors $a_i R a_{i+3}$ avec $R \in \{I, \succ\}$. En effet, $a_{i+3} \succ a_i$, combiné avec $a_{i+2} I a_{i+3}$ et $a_i P a_{i+1}$, donnerait $a_{i+2} P a_{i+1}$. Le circuit

$$a_1 R_1 a_2 \dots R_{i-1} a_i R a_{i+3} \dots$$

a une longueur $k - 1$ et une 2-valeur supérieure ou égale au circuit initial.

- Si $a_i I a_{i+2} Q^{-1} a_{i+3}$, alors $a_i R a_{i+3}$ avec $R \in \{Q^{-1}, I, \succ\}$. En effet, $a_{i+3} P a_i$, combiné avec $a_i P a_{i+1}$, $a_{i+3} Q a_{i+2}$ et $a_{i+2} Q a_{i+1}$, contredirait $P^2 \cap J^{S^2} = \emptyset$. Le circuit

$$a_1 R_1 a_2 \dots R_{i-1} a_i R a_{i+3} \dots$$

a une longueur $k - 1$ et une 2 valeur supérieure ou égale au circuit initial.

- 3°) Si $a_i Q a_{i+1} I a_{i+2}$, alors $a_i S a_{i+2}$.

- Si $a_i \succ a_{i+2}$, le circuit

$$a_1 R_1 a_2 \dots R_{i-1} a_i \succ a_{i+2} \dots$$

a une longueur k et une 2-valeur supérieure au circuit initial.

- Si $a_i I a_{i+2} \succ a_{i+3}$, alors $a_i \succ a_{i+3}$ et le circuit

$$a_1 R_1 a_2 \dots R_{i-1} a_i \succ a_{i+3} \dots$$

a une longueur $k - 1$ et une 2-valeur supérieure ou égale au circuit initial.

- Si $a_i I a_{i+2} I a_{i+3}$, alors $a_i R a_{i+3}$ avec $R \in \{I, \succ\}$. En effet, $a_{i+3} \succ a_i$, combiné avec $a_i Q a_{i+1}$, $a_{i+3} I a_{i+2}$ et $a_{i+2} I a_{i+1}$, contredirait $\succ^2 \cap I^2 = \emptyset$. Le circuit

$$a_1 R_1 a_2 \dots R_{i-1} a_i R a_{i+3} \dots$$

a une longueur $k - 1$ et une 2-valeur supérieure ou égale au circuit initial.

- Si $a_i I a_{i+2} Q^{-1} a_{i+3}$, alors $a_i R a_{i+3}$ avec $R \in \{Q^{-1}, I, \succ\}$. En effet, $a_{i+3} P a_i$, combiné avec $a_i Q a_{i+1}$ et $a_{i+1} I a_{i+2}$, donnerait $a_{i+3} P a_{i+2}$. Le circuit

$$a_1 R_1 a_2 \dots R_{i-1} a_i R a_{i+3} \dots$$

a une longueur $k - 1$ et une 2-valeur supérieure ou égale au circuit initial.

- 4°) Si $a_i Q a_{i+1} Q^{-1} a_{i+2}$, alors $a_i I a_{i+2}$ (puisque $\succ Q \subset P$) et le circuit

$$a_1 R a_2 \dots R_{i-1} a_i I a_{i+2} \dots$$

a une longueur k et une 2-valeur égale au circuit initial.

Corollaire : (I, Q, P) est représentable par un pseudo-critère à 2 seuils constants où $p = 2q$ ssi c'est un pseudo-ordre tel que $Q^2 \cap Q = \emptyset$ et $P \cap I^2 = \emptyset$.

Nous verrons dans le chapitre VI que ce résultat ne peut pas être généralisé à $n \neq 2$.

7. Le théorème de l'alternative ($[1]$)

Nous donnons ici une démonstration de la condition suffisante du théorème section 3 basée sur un théorème de l'alternative pour les systèmes d'inéquations. Cette approche aurait pu également être utilisée pour les théorèmes des chapitres précédents mais nous avons préféré l'approche algorithmique qui a l'avantage d'avoir un intérêt pratique. Nous donnons ici cette démonstration plus abstraite à titre d'exemple.

Théorème de l'alternative pour les systèmes d'inéquations (la démonstration de ce théorème se trouve dans $[1]$, p. 46).

Si $x^1, x^2, \dots, x^L \in \mathbb{R}^J$ (espace réel à J dimensions), alors ou bien il existe $c \in \mathbb{R}^J$ tel que

$$c \cdot x^l > 0, l = 1, \dots, L$$

où $c \cdot x^l$ est le produit scalaire de c par x^l , ou bien il existe $r_1, r_2, \dots, r_L \in \mathbb{R}^+$ non simultanément nuls tels que

$$\sum_{l=1}^L r_l x_j^l = 0, j = 1, 2, \dots, J$$

où x_j^l est la j^e composante de x^l .

Considérons donc un triplet (I, Q, P) satisfaisant la condition C_n ($n > 1$):

A chaque relation du type $a I b$, nous associons les inéquations :

$$\begin{cases} g(a) + q - g(b) > 0, \\ g(b) + q - g(a) > 0. \end{cases}$$

A chaque relation du type $a Q b$, nous associons les inéquations :

$$\begin{cases} g(a) - g(b) - q > 0, \\ g(b) + p - g(a) > 0. \end{cases}$$

A chaque relation du type $a P b$, nous associons l'inéquation :

$$g(a) - p - g(b) > 0.$$

Soit L le nombre d'inéquations obtenues et $J = |A| + 2$. Si

$$A = \{a^1, a^2, \dots, a^{J-2}\},$$

le problème est de trouver un vecteur c de $\mathbb{R}^J$

$$c = (g(a^1), \dots, g(a^{J-2}), q, p)$$

qui satisfasse au système d'inéquations obtenu (ce système impliquant d'ailleurs que $p > q$).

Soit x_j^l le coefficient de la j^e composante de c dans la l^e inéquation :

$$x_j^l \in \{-1, 0, 1\}, j = 1, \dots, J, l = 1, \dots, L$$

et soit

$$x^l = \begin{pmatrix} x_1^l \\ \vdots \\ x_j^l \end{pmatrix}, \quad l = 1, \dots, L.$$

Le système d'inéquations de départ peut encore s'écrire :

$$(1) \quad c \cdot x^l > 0, \quad l = 1, 2, \dots, L.$$

D'après le théorème de l'alternative, si ce système n'admet pas de solution c , alors $\exists r_1, r_2, \dots, r_L \in \mathbb{R}^+$, non tous nuls, tels que

$$(2) \quad \sum_{l=1}^L r_l x_j^l = 0, \quad j = 1, 2, \dots, J.$$

et il résulte du fait que les x_j^l sont rationnels que $r_1, r_2, \dots, r_L$ peuvent être trouvés dans $\mathbb{N}$.

Cela signifie que si nous traduisons le système

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} c x^1 > 0, \\ c x^1 > 0, \\ \vdots \\ c x^1 > 0, \end{array} \right\} r_1$$

$$\left\{ \begin{array}{l} c x^2 > 0, \\ c x^2 > 0, \\ \vdots \\ c x^2 > 0, \end{array} \right\} r_2$$

$$\vdots$$

au moyen des relations I, Q, P, nous obtenons 2 suites finies

$$S_1 = (a_1^1 \dots a_1^{T_1}, a_2^1 \dots a_2^{T_1}, a_3^1 \dots a_3^{T_2}, a_4^1 \dots a_4^{T_2})$$

et

$$S_2 = (b_1^1 \dots b_1^{T_1}, b_2^1 \dots b_2^{T_1}, b_3^1 \dots b_3^{T_2}, b_4^1 \dots b_4^{T_2})$$

telles que

- $$\left\{ \begin{array}{l} - \text{leurs éléments appartiennent à } A ; \\ - \text{elles sont identiques à une permutation près ;} \\ - b_1^i \succ a_1^i, i = 1, \dots, T_1 ; \\ - b_2^i I \text{ ou } \prec a_2^i, i = 1, \dots, T_1 ; \\ - b_3^i P a_3^i, i = 1, \dots, T_2 ; \\ - b_4^i J^S \text{ ou } P a_4^i, i = 1, \dots, T_2 ; \\ - 2 T_1 + 2 T_2 = r_1 + r_2 + \dots + r_L. \end{array} \right.$$

En effet, les suites S_1 et S_2 sont construites de la manière suivante : selon que la 1^e inéquation du système (3) est du type

- $$\begin{array}{l} g(b) - g(a) - q > 0 \\ \text{ou} \\ g(b) - g(a) + q > 0 \\ \text{ou} \\ g(b) - g(a) - p > 0 \\ \text{ou} \\ g(b) - g(a) + p > 0, \end{array}$$

a sera le 1^e élément de S_1 , b sera le 1^e élément de S_2 et on aura respectivement

- $$\begin{array}{l} b \succ a \\ \text{ou} \\ b I \text{ ou } \prec a \\ \text{ou} \\ b P a \\ \text{ou} \\ b J^S \text{ ou } P a. \end{array}$$

Le système (2) indique que :

- $\forall a \in A$, le nombre d'inéquations du système (3) contenant $g(a)$ est identique au nombre d'inéquations contenant $-g(a)$; par conséquent, S_1 contiendra autant de fois a que S_2 et ce, $\forall a \in A$; il en résulte que S_1 et S_2 sont identiques à une permutation près ;

- le nombre d'inéquations contenant $-q$ est égal au nombre d'inéquations contenant $+q$; par conséquent, le nombre de relations du type $b \succ a$ est égal au nombre de relations du type $b \prec a$, nombre que nous avons appelé T_1 ;

- le nombre d'inéquations contenant $-p$ est égal au nombre d'inéquations contenant $+p$; par conséquent, le nombre de relations du type $b \prec a$ est égal au nombre de relations du type $b \succ a$, nombre que nous avons appelé T_2 .

Nous nous proposons de démontrer que la condition C_n (que nous avons supposée satisfaite pour au moins un $n > 1$), implique que deux telles suites ne peuvent exister : il en résultera que le système (1) admet une solution c .

Soit x_1 un élément quelconque de S_1 et y_1 l'élément correspondant dans S_2 (c'est-à-dire occupant dans S_2 la même position que x_1 dans S_1). Soit x_2 un élément de S_1 tel que $x_2 = y_1$ et y_2 l'élément correspondant dans S_2 .

Nous construisons ainsi un circuit γ :

$$x_1 R_1 y_1 R_2 y_2 \dots R_t x_1$$

tel que :

$$R_i \in \{\prec, \succ, I \text{ ou } \succ, P, J^S \text{ ou } P\}.$$

Appelons $m_1^\gamma, m_2^\gamma, m_3^\gamma$ et m_4^γ respectivement les nombres d'arcs γ , I ou γ , P, J^S ou P de ce circuit.

Si le circuit γ ne contient pas tous les éléments de S_1 , nous pouvons construire un ou plusieurs autres circuits du même type (en fait, cela revient à décomposer en permutations minimales la permutation qui permet de passer de S_1 à S_2).

Considérons un tel circuit γ .

Les m_1^γ arcs " γ " se décomposent en m_{11}^γ arcs Q et m_{12}^γ arcs P ; les m_2^γ arcs "I ou γ " se décomposent en m_{21}^γ arcs Q, m_{22}^γ arcs P et m_{23}^γ arcs I ; les m_4^γ arcs " J^S ou P" se décomposent en m_{41}^γ arcs Q, m_{42}^γ arcs P, m_{43}^γ arcs I et m_{44}^γ arcs Q^{-1} .

Si nous appelons $n_1^\gamma, n_2^\gamma, n_3^\gamma$ et n_4^γ respectivement les nombres d'arcs Q, P, I et Q^{-1} de γ , nous avons par hypothèse (condition C_n)

$$(4) \quad n_1^\gamma + n_2^\gamma - n_3^\gamma - n_4^\gamma < 0.$$

Or

$$\begin{cases} n_1^\gamma = m_{11}^\gamma + m_{21}^\gamma + m_{41}^\gamma, \\ n_2^\gamma = m_{12}^\gamma + m_{22}^\gamma + m_{42}^\gamma, \\ n_3^\gamma = m_{23}^\gamma + m_{43}^\gamma, \\ n_4^\gamma = m_{44}^\gamma, \end{cases}$$

d'où

$$\begin{aligned} n_1^\gamma + n_2^\gamma &\geq m_{11}^\gamma + n m_{12}^\gamma + n m_{23}^\gamma \geq m_{11}^\gamma + n m_{23}^\gamma, \\ n_3^\gamma + n_4^\gamma &= m_{23}^\gamma + m_{43}^\gamma + n m_{44}^\gamma \leq m_{23}^\gamma + n m_{44}^\gamma. \end{aligned}$$

Ces dernières relations, combinées avec (4), donnent :

$$m_1^\gamma - m_2^\gamma + n m_3^\gamma - n m_4^\gamma < 0.$$

En sommant sur γ , nous obtenons finalement

$$T_1 - T_1 + n T_2 - n T_2 < 0,$$

ce qui est évidemment impossible.

Les deux suites S_1 et S_2 ne peuvent donc pas exister.

CQFD

V - QUASI-ORDRES ORIENTES ET PRECRITERES

1. Quasi-ordre orienté

Définition : un triplet (I, Q, P) de relations dans un ensemble A est un quasi-ordre orienté ssi (mêmes notations que pour le pseudo-ordre) :

$$\left\{ \begin{array}{l} - I \cup \{ \} \text{ est un préordre complet ;} \\ - (J^S, P) \text{ est un quasi-ordre ;} \\ - \forall a, b, c \in A : \begin{cases} a P b, b Q c \Rightarrow a P c & (P Q \subset P), \\ a Q b, b P c \Rightarrow a P c & (Q P \subset P) ; \end{cases} \\ - \forall a, b, c, d \in A : a I b, b P c, c I d \Rightarrow a P d. & (I P I \subset P). \end{array} \right.$$

Propriétés (démonstrations simples)

- Un quasi-ordre orienté est un pseudo-ordre.
- Un pseudo-ordre (I, Q, P) est un quasi-ordre orienté ssi I est transitive et $I P I \subset P$.
- Le préordre complet S associé à un quasi-ordre orienté et défini comme pour les pseudo-ordres (chapitre III) coïncide avec $I \cup \{ \}$.

2. Précritère

Définition : un précritère sur un ensemble A est un couple (g, p) de fonctions à valeurs réelles telles que $\forall a, b \in A$:

$$\left\{ \begin{array}{l} a I b \Leftrightarrow (g(a) = g(b)), \\ a Q b \Leftrightarrow g(b) + p(b) \geq g(a) > g(b), \\ a P b \Leftrightarrow g(a) > g(b) + p(b), \\ p(a) \geq 0, \\ \frac{p(a) - p(b)}{g(a) - g(b)} \geq -1. \end{array} \right.$$

(un pré-critère est un pseudo-critère dans lequel $q \equiv 0$).

3. Théorème

La condition nécessaire et suffisante pour avoir un précritère sur un ensemble fini A est que le triplet (I, Q, P) soit un quasi-ordre orienté.

La démonstration de la condition nécessaire est laissée au lecteur. L'algorithme ci-dessous montre que la condition est suffisante et que le seuil de préférence p peut être rendu constant (la construction d'un précritère à seuil variable est analogue à celle d'un quasi-critère à seuil variable : voir algorithme II.1).

4. Représentation d'un quasi-ordre orienté par un précritère à seuil constant : algorithme V.1

Comme dans les algorithmes précédents, il suffit de construire un précritère à seuils constant sur l'ensemble $\{A_1, \dots, A_m\}$ des classes d'équivalence du préordre complet associé au quasi-ordre orienté, c'est-à-dire du préordre complet $I \cup \prec$.

On donne à p une valeur constante positive arbitraire.

Etape 1 : $g(A_1) = 0$;

Etape k : ($k = 2, 3, \dots, m$)

- si $A_k Q A_1$, $g(A_k) = \frac{1}{2} [g(A_{k-1}) + \bar{p}]$;
- si $A_k P A_{k-1}$, $g(A_k) = g(A_{k-1}) + p + 1$;
- dans les autres cas :

$$g(A_k) = \frac{1}{2} \{ \max [g(A_{k-1}), g(A_{j_k}) + \bar{p}] + g(A_{j_k+1}) + p \}$$

où

$$j_k = \max \{j : A_k P A_j\}.$$

La justification de cet algorithme, qui est un cas particulier de l'algorithme III.3, résulte immédiatement de la justification de ce dernier.

VI - EXEMPLE

Soit $A = \{a, b, c, d, e, x, y, z, t, u, v, w\}$ et le pseudo-ordre (I, Q, P) défini sur A par le tableau suivant :

$\nearrow$	w	v	u	x	t	z	y	a	b	c	d	e
w	I	I	Q	P	P	P	P	P	P	P	P	P
v		I	I	Q	P	P	P	P	P	P	P	P
u			I	Q	Q	P	P	P	P	P	P	P
x				I	Q	Q	P	P	P	P	P	P
t					I	I	Q	P	P	P	P	P
z						I	I	P	P	P	P	P
y							I	P	P	P	P	P
a								I	Q	Q	Q	Q
b									I	Q	Q	Q
c										I	Q	Q
d											I	Q
e												I

Dans ce tableau, les éléments sont ordonnés de façon compatible avec (I, Q, P) , c'est-à-dire que

$w \ S \ v \ S \ u \ S \ x \ S \ t \ S \ z \ S \ y \ S \ a \ S \ b \ S \ c \ S \ d \ S \ e$.

Pour vérifier que (I, Q, P) est un pseudo-critère, on peut par exemple construire les matrices booléennes associées à chacune des relations

I, Q, P, γ, J^S et les multiplier entre elles de manière à vérifier les axiomes définissant un pseudo-ordre.

Nous nous proposons :

- A) d'appliquer l'algorithme III.2 dans A (ce qui prouvera que (I, Q, P) est bien un pseudo-ordre) ;
- B) d'appliquer l'algorithme III.3 dans A ;
- C) de montrer que ce pseudo-ordre ne peut pas être représenté par un pseudo-critère à 2 seuils constants ;
- D) de montrer que le pseudo-ordre induit dans $\{x, y, z, t, u, v, w\}$ est représentable par un pseudo-critère à 2 seuils constants en y appliquant l'algorithme IV.1 ;
- E) de montrer que le pseudo-ordre induit dans $\{a, b, c, d, e\}$ est représentable par un pseudo-critère à 2 seuils constants en y appliquant l'algorithme IV.1.

Cet exemple montre également que le théorème de la section 6 du chapitre IV ne peut pas être généralisé à $n \neq 2$. En effet, le pseudo-ordre présenté ici ne peut pas être représenté par un pseudo-critère à 2 seuils constants bien que l'on ait $Q^5 \cap Q = \emptyset$ et $P \cap I^5 = \emptyset$.

Remarquons encore que, dans ce pseudo-ordre, on a $Q P I \subset P$ et $I P Q \subset P$: ces conditions, nécessaires pour avoir 2 seuils constants, ne sont donc pas suffisantes.

A) Application de l'algorithme III.2 dans A

Les classes d'équivalence A_j sont ici des singletons puisque S est un ordre total :

$$A_1 = \{e\}, A_2 = \{d\}, A_3 = \{c\}, \dots, A_{12} = \{w\}.$$

Il vient ($q =$ constante positive arbitraire) :

$$\begin{aligned}g(e) &= 0 ; \\g(d) &= g(e) + q + 1 = q + 1 ; \\g(c) &= g(d) + q + 1 = 2q + 2 ; \\g(b) &= g(c) + q + 1 = 3q + 3 ; \\g(a) &= g(b) + q + 1 = 4q + 4 ; \\g(y) &= g(a) + q + 1 = 5q + 5 ; \\g(z) &= \frac{1}{2} \{ \max [g(y), g(a) + q] + g(y) + q \} = \frac{11}{2} q + 5 ; \\g(t) &= \frac{1}{2} \{ \max [g(z), g(y) + q] + g(z) + q \} = \frac{25}{4} q + 5 ; \\g(x) &= g(t) + q + 1 = \frac{29}{4} q + 6 ; \\g(u) &= g(x) + q + 1 = \frac{33}{4} q + 7 ; \\g(v) &= \frac{1}{2} \{ \max [g(u), g(x) + q] + g(u) + q \} = \frac{35}{4} q + 7 ; \\g(w) &= \frac{1}{2} \{ \max [g(v), g(u) + q] + g(v) + q \} = \frac{19}{2} q + 7 ; \\p(e) &= \frac{1}{2} [g(a) + g(y)] - g(e) = \frac{9}{2} q + \frac{9}{2} ; \\p(d) &= \frac{1}{2} [g(a) + g(y)] - g(d) = \frac{7}{2} q + \frac{7}{2} ; \\p(c) &= \frac{1}{2} [g(a) + g(y)] - g(c) = \frac{5}{2} q + \frac{5}{2} ; \\p(b) &= \frac{1}{2} [g(a) + g(y)] - g(b) = \frac{3}{2} q + \frac{3}{2} ; \\p(a) &= \frac{1}{2} [g(a) + q + g(y)] - g(a) = q + \frac{1}{2} ; \\p(y) &= \frac{1}{2} [g(t) + g(x)] - g(y) = \frac{7}{4} q + \frac{1}{2} ; \\p(z) &= \frac{1}{2} [g(x) + g(u)] - g(z) = \frac{9}{4} q + \frac{3}{2} ; \\p(t) &= \frac{1}{2} [g(u) + g(v)] - g(t) = \frac{9}{4} q + 2 ; \\p(x) &= \frac{1}{2} [g(v) + g(w)] - g(x) = \frac{15}{8} q + 1 ; \\p(u) &= g(w) + 1 - g(u) = \frac{5}{4} q + 1 ; \\p(v) &= q + 1 ; \\p(w) &= q + 1.\end{aligned}$$

En posant $q = 8$, on obtient donc le pseudo-critère suivant :

	w	v	u	x	t	z	y	a	b	c	d	e
g	83	77	73	64	55	49	45	36	27	18	9	0
q	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8
p	9	9	11	16	20	19,5	14,5	8,5	13,5	22,5	31,5	40,5

B) Application de l'algorithme III.3 dans A

p est une constante arbitraire.

$$g(e) = 0 ;$$

$$g(d) = \frac{1}{2} [g(e) + \bar{p}] = p/2 ;$$

$$g(c) = \frac{1}{2} [g(d) + \bar{p}] = 3p/4 ;$$

$$g(b) = \frac{1}{2} [g(c) + \bar{p}] = 7p/8 ;$$

$$g(a) = \frac{1}{2} [g(b) + \bar{p}] = 15p/16 ;$$

$$g(y) = g(a) + p + 1 = 31p/16 + 1 ;$$

$$g(z) = \frac{1}{2} \{ \max [g(y), g(a) + \bar{p}] + g(y) + p \} = 39p/16 + 1 ;$$

$$g(t) = \frac{1}{2} \{ \max [g(z), g(a) + \bar{p}] + g(y) + p \} = 43p/16 + 1 ;$$

$$g(x) = \frac{1}{2} \{ \max [g(t), g(y) + \bar{p}] + g(z) + p \} = 51p/16 + 1 ;$$

$$g(u) = \frac{1}{2} \{ \max [g(x), g(z) + \bar{p}] + g(t) + p \} = 57p/16 + 1 ;$$

$$g(v) = \frac{1}{2} \{ \max [g(u), g(t) + \bar{p}] + g(x) + p \} = 63p/16 + 1 ;$$

$$g(w) = \frac{1}{2} \{ \max [g(v), g(x) + \bar{p}] + g(u) + p \} = 70p/16 + 1 ;$$

$$q(e) = \frac{1}{2} [g(e) + g(d)] - g(e) = p/4 ;$$

$$q(d) = \frac{1}{2} [g(d) + g(c)] - g(d) = p/8 ;$$

$$q(c) = \frac{1}{2} [g(c) + g(b)] - g(c) = p/16 ;$$

$$q(b) = \frac{1}{2} [g(b) + g(a)] - g(b) = p/32 ;$$

$$q(a) = \frac{1}{2} [g(a) + g(a) + \bar{p}] - g(a) = p/2 ;$$

$$q(y) = \frac{1}{2} [g(z) + g(t)] - g(y) : 10p/16 ;$$

$$\begin{aligned} q(z) &= \frac{1}{2} [g(t) + g(x)] - g(z) = p/2 ; \\ q(t) &= \frac{1}{2} [g(t) + g(x)] - g(t) = p/4 ; \\ q(x) &= \frac{1}{2} [g(x) + g(u)] - g(x) = 3p/16 ; \\ q(u) &= \frac{1}{2} [g(v) + g(w)] - g(u) = 19p/32 ; \\ q(v) &= \frac{1}{2} [g(w) + g(v) + \bar{p}] - g(v) = 23p/32 ; \\ q(w) &= \frac{1}{2} [g(w) + g(w) + \bar{p}] - g(w) = p/2. \end{aligned}$$

En posant $p = 16$, on obtient le pseudo-critère suivant :

	w	v	u	x	t	z	y	a	b	c	d	e
g	71	64	58	52	44	40	32	15	14	12	8	0
q	8	11,5	9,5	3	4	8	10	8	0,5	1	2	4
p	16	16	16	16	16	16	16	16	16	16	16	16

C) Ce pseudo-ordre ne peut pas être représenté par un pseudo-critère à 2 seuils constants

En effet, le circuit

$$w \cdot P \cdot x \cdot P \cdot y \cdot I \cdot z \cdot I \cdot t \cdot Q^{-1} \cdot u \cdot I \cdot v \cdot I \cdot w$$

aura une n-valeur strictement négative ssi $n < 4$ alors que le circuit

$$a \cdot Q \cdot b \cdot Q \cdot c \cdot Q \cdot d \cdot Q \cdot e \cdot Q^{-1} \cdot a$$

aura une n-valeur strictement négative ssi $n > 4$. La condition C_n ne sera donc jamais satisfaite.

Une autre façon de montrer l'impossibilité d'avoir 2 seuils constants est d'écrire les inégalités impliquées par les relations constituant les 2 circuits ci-dessus. Ainsi,

$$\begin{aligned}w P x &\Rightarrow g(w) > g(x) + p, \\x P y &\Rightarrow g(x) > g(y) + p, \\y I z &\Rightarrow g(y) + q > g(z), \\z I t &\Rightarrow g(z) + q > g(t), \\t Q^{-1} u &\Rightarrow g(t) + p > g(u), \\u I v &\Rightarrow g(u) + q > g(v), \\v I w &\Rightarrow g(v) + q > g(w)\end{aligned}$$

d'où, en sommant : $4q > p$.

Par contre,

$$\begin{aligned}a Q b &\Rightarrow g(a) > g(b) + q, \\b Q c &\Rightarrow g(b) > g(c) + q, \\c Q d &\Rightarrow g(c) > g(d) + q, \\d Q e &\Rightarrow g(d) > g(e) + q, \\e Q^{-1} a &\Rightarrow g(e) + p > g(a)\end{aligned}$$

d'où, en sommant : $p > 4q$.

D) Application de l'algorithme IV.1 dans $\{x, y, z, t, u, v, w\}$

La détermination de tous les circuits dans (I, Q, P) est un problème résolu (recherche des circuits dans un graphe). Il reste alors à fixer une valeur n telle que tous ces circuits aient une n -valeur négative. Dans l'exemple considéré, $n = 3$ est une valeur qui convient (vu la taille de l'exemple, il est encore possible de le "voir" sur le graphe correspondant).

L'application de l'algorithme IV.1 nécessite aussi la connaissance de la n -valeur maximum des chemins entre les couples d'éléments de $B = \{x, y, z, t, u, v, w\}$. La n -valeur maximum des chemins de x à y (par exemple) est donnée par :

$$v_n(x, y) = \max_h v_n^h(x, y)$$

où

$$v_n^h(x, y) = \max_{\alpha \in B} [v_n^{h-1}(x, \alpha) + v_n^1(\alpha, y)], \quad h = 2, 3, \dots, |B|$$

et v_n^1 est donnée par le tableau suivant :

$\nearrow$	w	v	u	x	t	z	y
w	- 1	- 1	1	n	n	n	n
v	- 1	- 1	- 1	1	n	n	n
u	- n	- 1	- 1	1	1	n	n
x	- ∞	- n	- n	- 1	1	1	n
t	- ∞	- ∞	- n	- n	- 1	- 1	1
z	- ∞	- ∞	- ∞	- n	- 1	- 1	- 1
y	- ∞	- ∞	- ∞	- ∞	- n	- 1	- 1

Ce tableau est obtenu en remplaçant les arcs I, Q, P, Q^{-1} du pseudo-ordre initial par leur n -valeur. Nous donnons la valeur $-\infty$ aux arcs P^{-1} puisque les chemins qui nous intéressent ne contiennent pas de tels arcs.

$v_n^h(x, y)$ est la n -valeur maximum des chemins de longueur h de x à y . Les chemins de longueur supérieure à $|B|$ sont sans intérêt puisqu'ils contiennent nécessairement au moins un circuit et que les circuits ont une n -valeur < 0 . Dans l'exemple considéré, v_n est donnée par le tableau suivant ($n = 3$) :

$\nearrow$	w	v	u	x	t	z	y
w	- 1	0	1	3	4	5	6
v	- 1	- 1	0	2	3	4	5
u	- 2	- 1	- 1	1	2	3	4
x	- 4	- 3	- 2	- 1	1	2	3
t	- 5	- 4	- 3	- 2	- 1	0	1
z	- 6	- 5	- 4	- 3	- 1	- 1	0
y	- 7	- 6	- 5	- 4	- 2	- 1	- 1

Choisissant q arbitrairement et posant $p = 3q$, on obtient :

$$g(y) = 0 ;$$

$$g(z) = \frac{1}{2} [g(y) + \bar{q}] = q/2 ;$$

$$g(t) = \frac{1}{2} \{ \max [g(z), g(y) + \bar{q}] + \min [g(z) + q, g(y) + 2\bar{q}] \} = \frac{5q}{4}$$

$$g(x) = \frac{1}{2} \{ \max [g(t), g(t) + q, g(z) + 2q, g(y) + 3\bar{q}] + \min [g(t) + 2q, g(z) + 3\bar{q}] \} = \frac{25q}{8}$$

$$g(u) = \frac{1}{2} \{ \max [g(x), g(x) + q, g(t) + 2q, g(z) + 3\bar{q}] + \min [g(x) + 2q, g(t) + 3\bar{q}] \} = \frac{67q}{16}$$

$$g(v) = \frac{1}{2} \{ \max [g(u), g(x) + 2q, g(t) + 3\bar{q}] + \min [g(u) + q, g(x) + 3\bar{q}] \} = \frac{165q}{32}$$

$$g(w) = \frac{1}{2} \{ \max [g(v), g(u) + q, g(x) + 3\bar{q}] + \min [g(v) + q, g(u) + 2\bar{q}] \} = \frac{393q}{64}$$

En posant $q = 64$, on obtient le pseudo-critère suivant :

	w	v	u	x	t	z	y
g	393	330	268	200	80	32	0
q	64	64	64	64	64	64	64
p	192	192	192	192	192	192	192

E) Application de l'algorithme IV.1 dans $\{a, b, c, d, e\}$

Pour $n = 5$, tous les circuits ont une n-valeur négative et v_n est donnée par le tableau suivant :

	a	b	c	d	e
a	- 1	+ 1	+ 2	+ 3	+ 4
b	- 2	- 1	+ 1	+ 2	+ 3
c	- 3	- 2	- 1	+ 1	+ 2
d	- 4	- 3	- 2	- 1	+ 1
e	- 5	- 4	- 3	- 2	- 1

L'algorithme donne :

$$g(e) = 0 ;$$

$$g(d) = \frac{1}{2} \{ \max [g(e), g(e) + q] + g(e) + 2q \} = 3q/2 ;$$

$$g(c) = \frac{1}{2} \{ \max [g(d), g(d) + q, g(e) + 2q] + \min [g(d) + 2q, g(e) + 3q] \} = 11q/4 ;$$

$$g(b) = \frac{1}{2} \{ \max [g(c), g(c) + q, g(d) + 2q, g(e) + 3q] + \min [g(c) + 2q, g(d) + 3q, g(e) + 4q] \} = 31q/8 ;$$

$$g(a) = \frac{1}{2} \{ \max [g(b), g(b) + q, g(c) + 2q, g(d) + 3q, g(e) + 4q] + \min [g(b) + 2q, g(c) + 3q, g(d) + 4q, g(e) + 5q] \} = 79q/16.$$

En posant $q = 16$, on obtient le pseudo-critère suivant :

	a	b	c	d	e
g	79	62	44	24	0
q	16	16	16	16	16
p	80	80	80	80	80

BIBLIOGRAPHIE

- [1] FISHBURN, P.C. : Utility theory for decision-making, J. Wiley and Sons, New York, 1970.
- [2] LUCE, R.D. : "Semiordeurs and a theory of utility discrimination", *Econometrica*, Vol. 24, 1956.
- [3] MONJARDET, B. : "Axiomatiques et propriétés des quasi-ordres", *Mathématiques et Sciences Humaines*, 63, 1978.
- [4] ROY, B. : Aide à la décision : critères multiples et optimisation pour choisir, trier, ranger. Livre en préparation.
- [5] ROY B. et VINCKE, Ph. : "Systèmes relationnels de préférences en présence de critères multiples avec seuils", à paraître dans les Cahiers du CERO.
- [6] ROY, B. : "A conceptual framework for a normative theory of decision-aid", *Management Science*, Special Issue on Multiple Criteria Decision Making, 1976.
- [7] VINCKE, Ph. : "Quasi-ordres généralisés et modélisation des préférences", Université Paris-Dauphine, Cahier LAMSADE n° 9, avril 1977.

