

CAHIER DU LAMSADE

Laboratoire d'Analyse et Modélisation de Systèmes pour l'Aide à la Décision

(Université Paris-Dauphine)

Equipe de Recherche Associée au C.N.R.S. N° 656

PSEUDO-CRITERES ET SYSTEMES RELATIONNELS DE PREFERENCE :
NOUVEAUX CONCEPTS ET NOUVEAUX RESULTATS
EN VUE DE L'AIDE A LA DECISION

N° 28-1980

B. ROY
Ph. VINCKE

Mars 1980

SOMMAIRE

	<u>Pages</u>
<u>ABSTRACT</u>	I
<u>RESUME</u>	II
<u>INTRODUCTION</u>	1
I - <u>QUATRE SITUATIONS FONDAMENTALES DE PREFERENCE</u>	3
II - <u>COMMENTAIRES</u>	7
1. A propos des relations d'incomparabilité et de préférence faible	7
2. A propos de la transitivité des relations binaires fondamentales	7
3. A propos des regroupements de situations fondamentales	8
III - <u>SYSTEMES RELATIONNELS DE PREFERENCE</u>	11
IV - <u>PSEUDO-CRITERES ET SYSTEMES RELATIONNELS DE PREFERENCE</u>	14
V - <u>SYSTEME RELATIONNEL FONDAMENTAL DE SURCLASSEMENT ASSOCIE A UNE FAMILLE F DE PSEUDO-CRITERES</u>	22
VI - <u>CONCLUSION</u>	24
<u>BIBLIOGRAPHIE</u>	25

PSEUDO-CRITERIA AND RELATIONAL SYSTEMS OF PREFERENCE :
NEW CONCEPTS AND NEW RESULTS FOR DECISION-AID

ABSTRACT

This paper proposes new concepts and new results which could lead to a more realistic preference modelling than in classical decision theory.

The pseudo-order allows to represent an individual's preferences following one point of view. We present here its properties, particularly concerning its functional representation : the obtained results generalize the properties of such well-known structures as complete preorders and semiorders.

The relational systems of preferences then defined allow to take into account the imprecisions, irresolutions and incomparabilities appearing in every concrete problem where several criteria must be considered.

PSEUDO-CRITERES ET SYSTEMES RELATIONNELS DE PREFERENCE :
NOUVEAUX CONCEPTS ET NOUVEAUX RESULTATS EN VUE DE L'AIDE A LA DECISION

RESUME

Ce cahier propose de nouveaux concepts et de nouveaux résultats qui devraient conduire à une modélisation des préférences plus réaliste que celle de la théorie classique de la décision.

Le pseudo-ordre est une structure permettant de représenter les préférences d'un individu suivant un seul point de vue. Nous présentons ici ses propriétés concernant notamment sa représentation fonctionnelle : les résultats obtenus généralisent les propriétés de structures bien connues dans la littérature telles que le préordre complet et le quasi-ordre.

Les systèmes relationnels de préférence qui en résultent permettent de prendre en compte les phénomènes d'imprécision, d'hésitation et d'incomparabilité présents dans tout problème concret où plusieurs points de vue doivent être considérés.

INTRODUCTION

Bien qu'elle soit rarement mise en évidence dans les applications, la modélisation des préférences constitue un aspect fondamental d'un grand nombre de disciplines telles que la recherche opérationnelle, la psychologie mathématique, le calcul économique, la théorie de la décision. Les théories et les méthodes issues de ces domaines ne peuvent présenter un intérêt pratique que si la modélisation des préférences sur laquelle ils s'appuient inévitablement est réalisée correctement, c'est-à-dire de façon réaliste eu égard aux informations que l'on peut obtenir. Il faut bien reconnaître que cette étape est en général complètement négligée. Les modèles utilisés habituellement sont choisis essentiellement en fonction de leurs qualités mathématiques. Les hypothèses simplificatrices sont nombreuses, importantes et, ce qui est plus grave, le plus souvent passées sous silence.

Nous voudrions dans cet article attirer l'attention sur les conditions restrictives que suppose la théorie classique de la décision et proposer une démarche qui tende vers plus de réalisme dans la modélisation des préférences. En fait, rares sont les applications où les préférences à prendre en compte sont celles d'un seul individu. De plus, les points de vue des différents acteurs sont souvent discordants. Il est donc important que se développent des modèles de choix collectif et de négociation en vue de traiter ces situations.

Nous nous limiterons ici à la modélisation des préférences d'un acteur unique qui tient compte éventuellement de points de vue différents. Nous appelons acteur tout individu, toute collectivité ou tout organisme jouant ou non un rôle de décideur dans le problème considéré.

Le but de cet article est donc de présenter quelques concepts de base qui, utilisés à bon escient par l'homme d'étude, lui permettront d'intégrer dans son modèle une représentation aussi réaliste que possible des préférences de l'acteur considéré.

La section I présente les 4 situations fondamentales de préférence sur lesquelles la modélisation prend appui. Aux situations habituelles d'indifférence et de préférence stricte ont été ajoutées l'incomparabilité et la préférence faible. De plus, nous avons exclu toute hypothèse de transitivité sur les relations qui leur sont associées. Ces points sont commentés et justifiés dans la section II où sont également introduites les situations regroupées de préférence qui nous paraissent intéressantes. Prenant appui sur les concepts précédents, la troisième section introduit les modèles de préférence proprement dits encore appelés systèmes relationnels de préférence. Nous en distinguons de différents types suivant les situations de préférence qu'ils utilisent. La section suivante est consacrée au problème important de la modélisation des préférences d'un acteur suivant un seul point de vue. A partir de la notion de pseudo-critère, nous présentons quelques systèmes relationnels de préférence qui semblent dignes d'intérêt. La structure fondamentale qui apparaît dans cette section est celle de pseudo-ordre. Elle permet d'ailleurs de retrouver comme cas particuliers les structures de la théorie classique de la décision. Enfin la section V présente un exemple de modèle de préférence d'un acteur confronté à plusieurs points de vue différents. Ce modèle prend en compte d'une part les inévitables phénomènes d'imprécision et d'hésitation relatifs à chaque point de vue, d'autre part les incomparabilités qui résultent obligatoirement de l'agrégation des points de vue.

I - QUATRE SITUATIONS FONDAMENTALES DE PREFERENCE

Considérons donc un acteur qui doit émettre un jugement de préférence relativement à deux actions potentielles (solutions admissibles, décisions possibles). Supposons-le informé des conséquences de ces actions sans que cette information soit nécessairement exhaustive et précise. La théorie classique de la décision ([1], [2], [7]) n'introduit que deux situations fondamentales habituellement appelées indifférence ($\sim$) et préférence stricte ($\succ$). De plus, les deux relations ainsi obtenues sont systématiquement supposées transitives (c'est notamment le cas dans tous les travaux où interviennent des fonctions d'utilité, des fonctions de valeur ou des fonctions économiques). Autrement dit, cette théorie repose sur l'axiome suivant que nous appellerons axiome de parfaite comparabilité transitive.

Axiome I.1 : Les deux situations incompatibles d'indifférence et de préférence conviennent pour asseoir une représentation réaliste des préférences d'un acteur ; quels que soient les actions potentielles en cause, le point de vue adopté pour les comparer et l'information disponible, cet acteur peut élaborer un modèle satisfaisant qui fait correspondre à chaque paire d'actions potentielles une et une seule de ces deux situations ; les deux relations binaires $\sim$ et $\succ$ ainsi définies sur l'ensemble des actions considérées sont toutes les deux transitives.

En fait, confronté à la comparaison de deux actions a et b , l'acteur a de multiples raisons de chercher à échapper au dilemme indifférence ou stricte préférence. Il peut en effet :

a) Ne pas pouvoir trancher : les informations nécessaires peuvent avoir un caractère subjectif ou encore être recueillies hâtivement. Elles risquent donc d'être impropres à un jugement sans nuances ne tolérant que

l'indifférence et la préférence stricte. Forcer la signification de quelques indices pour consolider une préférence ou arguer de lacunes dans l'information pour conclure à une indifférence recèlent des risques d'arbitraire et d'incohérence.

b) Ne pas savoir trancher : devant certaines paires d'actions, l'homme d'étude peut être démuni pour appréhender les préférences du décideur. En effet, celui-ci peut être une entité lointaine inaccessible (chef d'état, directeur d'une grande firme) ou encore une entité floue (opinion publique) dont les préférences sont mal définies et partiellement contradictoires.

c) Ne pas vouloir trancher : comparer a et b signifie que l'on met en balance d'une part les avantages de a sur b et d'autre part ceux de b sur a et ce sans négliger les éventuels éléments communs. Prendre un parti tranché implique que l'on dispose de suffisamment d'informations sur les préférences du décideur ou que l'on introduit des hypothèses volontaristes visant à arbitrer entre des tendances antagonistes. L'homme d'étude peut ne pas vouloir prendre parti au moment considéré et attendre une phase ultérieure du processus de décision ou un complément d'informations.

Pour toutes ces raisons, nous considérerons que la comparaison de deux actions potentielles quelconques a et b place l'acteur face à quatre situations élémentaires fondamentales : l'indifférence, la préférence stricte, la préférence faible et l'incomparabilité qui sont définies dans le tableau 1.

Dans cette optique, l'axiome de parfaite comparabilité transitive sera remplacé par le suivant que nous appellerons axiome de comparabilité limitée.

Axiome I.2 : Les quatre situations fondamentales incompatibles d'indifférence, de préférence stricte, de préférence faible et d'incomparabilité définies au tableau 1 conviennent pour asseoir une représentation réaliste des préférences d'un acteur ; quels que soient

TABEAU 1 : MODELISATION DES QUATRE SITUATIONS FONDAMENTALES DE PREFERENCES
DANS LA COMPARAISON DE DEUX ACTIONS POTENTIELLES

SITUATION	DEFINITION	RELATION BINAIRE
Indifférence	Elle correspond à l'existence de raisons claires et positives qui justifient une équivalence entre les deux actions	I : relation symétrique réflexive
Préférence stricte	Elle correspond à l'existence de raisons claires et positives qui justifient une préférence significative en faveur de l'une (identifiée) des deux actions	P : relation asymétrique (irréflexive)
Préférence faible	Elle correspond à l'existence de raisons claires et positives qui infirment une préférence stricte en faveur de l'une (identifiée) des deux actions mais ces raisons sont insuffisantes pour en déduire soit une préférence significative en faveur de l'autre, soit une indifférence entre ces deux actions (ces raisons ne permettent donc pas d'isoler l'une des deux situations précédentes comme étant la seule appropriée)	Q : relation asymétrique (irréflexive)
Incomparabilité	Elle correspond à l'absence de raisons claires et positives justifiant l'une des trois situations précédentes	R : relation symétrique irréflexive

les actions potentielles en cause, le point de vue adopté pour les comparer et l'information disponible, cet acteur peut élaborer un modèle satisfaisant qui fait correspondre à chaque paire d'actions potentielles soit une seule, soit un regroupement de deux ou trois des quatre situations fondamentales. L'expression "regroupement de deux ou trois situations fondamentales" sera précisée et justifiée dans la section suivante.

Symbolisme et terminologie

Etant donné deux actions a et b en situation d'indifférence, on écrira indifféremment :

$$a I b \text{ ou } b I a$$

la relation I étant évidemment symétrique. Elle est également réflexive : toute action sera considérée comme indifférente à elle-même. Vis-à-vis de la situation de préférence stricte, deux possibilités se présentent : a est strictement préféré à b ($a P b$) ou b est strictement préféré à a ($b P a$). La relation P est supposée asymétrique, c'est-à-dire que :

$$a P b \Rightarrow \text{non } b P a ;$$

il en résulte que P est irréflexive :

$$\forall a \in A, \text{ non } a P a.$$

Le même symbolisme et les mêmes propriétés valent pour la relation de préférence faible, la lettre Q remplaçant la lettre P . Enfin, la relation R d'incomparabilité sera naturellement symétrique et irréflexive.

II - COMMENTAIRES

1. A propos des relations d'incomparabilité et de préférence faible

On est parfois tenté de contester l'intérêt de l'incomparabilité en faisant valoir qu'elle est nécessairement évacuée par toute décision. Cette contestation repose sur un malentendu. L'affirmation $a R b$ traduit simplement un refus de prendre position au niveau de la modélisation des préférences sur la comparaison des valeurs de a et b . Cette attitude ne peut pas toujours être regardée comme une preuve d'indifférence entre a et b . C'est le cas par exemple lorsqu'on se trouve en présence de critères multiples. L'affirmation $a Q b$ traduit le fait que l'acteur peut affirmer $\text{non } b P a$ tout en hésitant entre $a P b$ et $a I b$. Les éléments dont il dispose pour trancher entre ces deux dernières possibilités ne lui paraissent pas suffisamment probants. D'un point de vue théorique, on aurait pu limiter à trois le nombre des situations fondamentales et introduire ensuite la préférence faible en tant que regroupement des relations P et I . Nous n'avons pas adopté cette présentation car la préférence faible reflète dans certains cas une situation irréductible qui mérite d'être mise au même niveau que l'indifférence et la préférence stricte. Autrement dit, il n'est pas du tout certain qu'un complément d'informations, aussi important soit-il, soit de nature à permettre à l'acteur de remplacer Q par P ou I .

2. A propos de la transitivité des relations binaires fondamentales

Excepté les propriétés de symétrie ou d'asymétrie indiquées dans le paragraphe précédent, les quatre relations I, P, Q, R ne jouissent d'aucune propriété remarquable. Il est pourtant d'usage d'imposer à I et P d'être transitives, c'est-à-dire que $a I b$ et $b I c \Rightarrow a I c$ et $a P b$ et $b P c \Rightarrow a P c$. Pour ce qui concerne l'indifférence, l'exemple classique de la tasse de café de Luce ([8]) illustre à merveille

comment l'intransitivité de l'indifférence peut se présenter de façon naturelle. Nous n'imposerons donc pas à la relation I d'être transitive. Nous n'exigerons pas non plus la transitivité de Q puisque rien ne s'oppose à ce que l'on ait $a Q b$, $b Q c$ et $a P c$. Une transitivité que l'on pourrait envisager est celle de la préférence stricte. Bien qu'elle soit communément admise, elle peut cependant être mise en défaut par la situation suivante : $a P b$, $b P c$ et $a R c$. Un tel cas peut se produire lorsque a et c ont avec b suffisamment de traits communs pour autoriser les jugements de préférence stricte mais n'en ont fort peu l'un avec l'autre, ce qui conduit l'acteur à réserver son jugement. P ne sera donc pas supposée transitive. Enfin, il est clair que la relation d'incomparabilité n'a aucune raison d'être transitive.

3. A propos des regroupements de situations fondamentales

Il est parfois utile de pouvoir faire intervenir dans la modélisation des préférences, à côté des relations I , P , Q , R , quelques nouvelles relations binaires regroupant deux ou trois des situations fondamentales. Le fait que pour une paire a, b deux situations au moins soient retenues traduit le fait que l'acteur ne peut pas, ne sait pas ou ne veut pas trancher entre elles (du moins dans cet état d'avancement du processus de décision). Le fait de retenir deux ou trois des six possibilités $a I b$, $a P b$, $b P a$, $a Q b$, $b Q a$, $a R b$ ne signifie donc pas qu'elles sont simultanément vraies. Simplement, l'acteur considère qu'il est impossible, prématuré ou inutile d'isoler celle des deux ou trois qui est vraie. Bien entendu, il est nécessaire de caractériser, parmi tous les regroupements a priori possibles, ceux qui sont dignes d'intérêt. Le tableau 2 en définit cinq. Il découle des définitions de ce tableau que la relation $\sim$ est symétrique et réflexive, que la relation $\succ$ est asymétrique et que, pour tout a, b , une et une seule des trois affirmations suivantes est vraie :

$$a \sim b, a \succ b, b \succ a.$$

Ces deux relations $\sim$ et $\succ$ sont en fait les deux seules à partir desquelles la théorie classique est construite et sont de plus habituellement supposées transitives. La relation J ne doit pas être confondue avec

TABLEAU 2 : SITUATIONS ET RELATIONS REGROUPEES INTERVENANT DANS LA MODELISATION DES PREFERENCES
RELATIVEMENT A DEUX ACTIONS POTENTIELLES a, b

SITUATION	DEFINITION	RELATION BINAIRE
Non préférence	Elle correspond à l'absence de raisons claires et positives qui justifient une préférence stricte ou une préférence faible en faveur de l'une quelconque des deux actions et regroupe par conséquent, sans possibilité de les différencier, les situations d'indifférence et d'incomparabilité.	$\sim$: a $\sim$ b si et seulement si a I b ou a R b
Préférence (au sens large)	Elle correspond à l'existence de raisons claires et positives qui justifient une préférence stricte ou faible en faveur de l'une (identifiée) des deux actions et regroupe par conséquent, sans possibilité de les différencier, les situations de préférence stricte et de préférence faible.	$\succ$: a $\succ$ b si et seulement si a P b ou a Q b
Présomption de préférence	Elle correspond à l'existence de raisons claires et positives qui justifient la préférence faible (si faible soit-elle) en faveur de l'une (identifiée) des deux actions ou tout simplement l'indifférence entre elles deux mais sans qu'aucune séparation significative ne soit établie entre les situations de préférence faible et d'indifférence.	J : a J b seulement si a Q b ou a I b : a Q b $\Rightarrow$ a J b a I b $\Rightarrow$ a J b ou (1) b J a
K-préférence	Elle correspond soit à l'existence de raisons claires et positives qui justifient la préférence stricte en faveur de l'une (identifiée) des deux actions, soit à l'incomparabilité de ces deux actions mais sans qu'aucune séparation significative ne soit établie entre cette dernière situation et celle de préférence stricte.	K : a K b seulement si a P b ou a R b : a P b $\Rightarrow$ a K b a R b $\Rightarrow$ a K b ou (1) b K a
Surclassement	Elle correspond à l'existence de raisons claires et positives qui justifient soit une préférence, soit une présomption de préférence en faveur de l'une (identifiée) des deux actions mais sans qu'aucune séparation significative ne soit établie entre les situations de préférence stricte, de préférence faible et d'indifférence.	S : a S b si et seulement si a $\succ$ b ou a J b donc seulement si : a P b ou a Q b ou a I b a I b $\Rightarrow$ a S b ou (1) b S a

1) ou non exclusif.

la relation J^1 qui serait définie comme suit :

$$a J^1 b \text{ ssi } a Q b \text{ ou } a I b.$$

La relation J modélise des situations où la séparation entre la préférence faible et l'indifférence est (éventuellement momentanément) impossible. Par contre, il résulte des propriétés de symétrie de I et d'asymétrie de Q que la connaissance de J^1 entraîne automatiquement celle de I et Q . En effet, I et Q ne sont rien d'autre que les parties respectivement symétriques et antisymétriques de la relation J^1 . L'introduction de J^1 serait donc, dans le cadre envisagé ici, complètement redondante.

Remarquons encore que :

$$\begin{aligned} a J b \text{ et } b J a &\Rightarrow a I b, \\ a J b \text{ et non } b J a &\Rightarrow a I b \text{ ou } a Q b. \end{aligned}$$

De la même façon, la connaissance de K^1 définie par

$$a K^1 b \text{ ssi } a P b \text{ ou } a R b$$

suffit pour reconstituer P et R . Il en va différemment pour K . En fait, K et J sont complémentaires. C'est essentiellement par ce biais que K peut s'introduire dans la modélisation. La relation S jouit d'une interprétation particulièrement simple : a surclasse b signifie que a est jugé au moins aussi bon que b . On a encore

$$\begin{aligned} a S b \text{ et } b S a &\Rightarrow a I b, \\ a S b \text{ et non } b S a &\Rightarrow a P b \text{ ou } a Q b \text{ ou } a I b. \end{aligned}$$

III - SYSTEMES RELATIONNELS DE PREFERENCE

Examinons maintenant comment les relations binaires précédentes peuvent être utilisées en conformité avec l'axiome de comparabilité limitée pour modéliser des préférences d'un acteur sur un ensemble A .

Une première façon de procéder consiste à retenir pour chaque paire d'actions a et b une et une seule des quatre situations fondamentales. Cela équivaut à regarder comme vraie une et une seule des six affirmations suivantes : $a I b$, $a P b$, $b P a$, $a Q b$, $b Q a$, $a R b$. Le modèle de préférence obtenu sera appelé dans ce cas système relationnel fondamental de préférence (s.r.f.p.).

Définition III.1 : Etant donné quatre relations binaires I , P , Q , R définies sur un ensemble A d'actions potentielles, elles constituent un système relationnel fondamental de préférence d'un acteur si :

- 1°) En accord avec le tableau 1 elles peuvent être prises comme représentation des préférences de cet acteur vis-à-vis des actions de A .
- 2°) Elles sont exhaustives : pour une paire quelconque d'actions, une au moins est vérifiée.
- 3°) Elles sont mutuellement exclusives : pour une paire quelconque d'actions, une au plus est vérifiée.

Une seconde façon de procéder consiste à retenir pour chaque paire d'actions non plus obligatoirement une seule mais éventuellement deux ou trois des situations fondamentales. On utilisera dans ce cas les relations regroupées définies dans la section précédente et on parlera de système relationnel regroupé de préférence (s.r.r.p.).

Définition III.2 : Etant donné neuf relations binaires $I, R, \nu, P, Q, \preceq, J, K, S$ définies sur un ensemble A d'actions potentielles, nous dirons qu'elles constituent un système relationnel regroupé de préférence d'un acteur si :

- 1°) En accord avec les tableaux 1 et 2 elles peuvent être prises comme représentation des préférences de cet acteur vis-à-vis des actions de A .
- 2°) Elles sont exhaustives : pour une paire quelconque d'actions, une au moins est vérifiée.
- 3°) Elles sont mutuellement exclusives : pour une paire quelconque d'actions, une au plus est vérifiée (cf. remarque 1).
- 4°) L'une au moins des cinq relations $\nu, \preceq, J, K, S$ est non vide.

Définition III.3 : Un système relationnel de préférence (s.r.p.) est un modèle de préférence qui est soit un s.r.f.p., soit un s.r.r.p.

Parmi les nombreux types de s.r.p. que l'on peut définir, nous distinguerons encore les deux suivants :

Définition III.4 : Un système relationnel parfait de préférence (s.r.p.p.) est un s.r.p. constitué de deux relations binaires transitives obligatoirement choisies pour la première entre I et ν et pour la deuxième entre P et $\preceq$.

Définition III.5 : Un système relationnel fondamental de surclassement (s.r.f.s.) est un système relationnel regroupé de préférence dans lequel S est non vide et qui est soit réduit à S (s.r.f.s. complet ou total), soit de la forme (S, R) , (S, ν) ou (S, ν, R) (s.r.f.s. incomplet ou partiel).

Remarques

1. Un s.r.r.p. n'est pas une juxtaposition de neuf relations binaires satisfaisant les tableaux 1 et 2. Une telle définition conduirait à un modèle peu maniable et le plus souvent redondant. L'axiome 3 évite ces inconvénients en imposant les deux conditions suivantes :

$$\begin{aligned} a H_1 b &\Rightarrow \text{non } b H_2 a \\ a H_1 b &\Rightarrow \text{non } a H_2 b \end{aligned}$$

où nous désignons par H_1 et H_2 deux relations distinctes parmi les neuf.

Le lecteur vérifiera sans peine que la première condition est impliquée par les tableaux 1 et 2, sauf pour quelques cas exceptionnels qu'il n'est pas restrictif d'exclure.

La deuxième condition n'apporte en fait aucune restriction. En effet :

$$\forall H_1, H_2 \in \{I, R, \nu, P, Q, \succ, J, K, S\}, \exists H_3 \text{ telle que } a H_1 b \text{ et } a H_2 b \Leftrightarrow a H_3 b.$$

La réalisation simultanée des deux relations distinctes pour un couple a, b peut toujours être exprimée à l'aide d'une relation unique. Ainsi par exemple :

$$\begin{aligned} a P b \text{ et } a \succ b &\Leftrightarrow a P b, \\ a \succ b \text{ et } a J b &\Leftrightarrow a Q b, \\ a I b \text{ et } a S b &\Leftrightarrow a I b. \end{aligned}$$

2. En général, un s.r.r.p. ne fera pas intervenir effectivement les neuf relations, plusieurs d'entre elles étant vides.

3. Les relations J, K, S peuvent être vérifiées par un seul ou par les deux couples d'une même paire. Les relations I, R, ν sont symétriques. Les relations $P, Q, \succ$ sont asymétriques.

4. Le système relationnel parfait de préférence correspond à la théorie classique de la décision. Il peut être vu soit comme un s.r.f.p. de la forme (I, P) , soit comme un s.r.r.p. de la forme $(\nu, \succ)$, (ν, P) ou $(I, \succ)$.

IV - PSEUDO-CRITERES ET SYSTEMES RELATIONNELS DE PREFERENCE

Dans cette section, nous proposons un modèle de préférence d'un acteur qui se place suivant un seul point de vue. Cela nous permet d'éliminer les incomparabilités et d'imposer à I, P, Q quelques propriétés supplémentaires. A partir de ce modèle nous définirons, dans la section suivante, un exemple de système relationnel fondamental de surclassement prenant en compte plusieurs points de vue simultanément.

Définition IV.1 : Un pseudo-critère est une fonction g dont le pouvoir discriminant est caractérisé par un seuil d'indifférence $q(g)$ et un seuil de préférence $p(g)$ de la façon suivante :

$\forall a, b \in A :$

$$a I b \iff -q(g(a)) \leq g(a) - g(b) \leq q(g(b))$$

$$a Q b \iff q(g(b)) < g(a) - g(b) \leq p(g(b))$$

$$a P b \iff p(g(b)) < g(a) - g(b).$$

Cela signifie que l'écart $g(a) - g(b)$ ne devient véritablement probant d'une préférence stricte de a par rapport à b que s'il est supérieur strictement à $p(g(b))$. Tant que cet écart (supposons-le positif) ne dépasse pas $q(g(b))$, il n'est pas considéré comme significatif et b doit être considéré comme indifférent à a . Lorsque l'écart est compris entre $q(g(b))$ et $p(g(b))$, il reflète une préférence faible de a sur b . Les seuils $q(g)$ et $p(g)$ peuvent être des constantes ou varier avec $g(a)$. Dans ce dernier cas, on leur demandera de vérifier les conditions suivantes :

$$\frac{q(g(b)) - q(g(a))}{g(b) - g(a)} \geq -1$$

et

$$\frac{p(g(b)) - p(g(a))}{g(b) - g(a)} \geq -1.$$

Ces conditions supposent un minimum de cohérence dans les jugements du décideur. Elles excluent les situations telles que :

$$\begin{aligned} g(a) < g(b) < g(b) + q(g(b)) < g(a) + q(g(a)) \\ g(a) < g(b) < g(b) + p(g(b)) < g(a) + p(g(a)) \end{aligned}$$

Avant d'étudier la structure I, Q, P qui résulte de la définition du pseudo-critère, examinons quelques cas particuliers.

- Préordres complets et systèmes relationnels de préférence

Dans le cas particulier où

$$q(g) \equiv p(g) \equiv 0,$$

on obtient le modèle de préférence suivant :

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \forall a, b \in A : \\ a I b \Leftrightarrow g(a) = g(b) \\ a P b \Leftrightarrow g(a) > g(b) \end{array} \right.$$

Théorème IV.1 ([2], [14]) : Etant donné un ensemble A fini ou infini dénombrable, la condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe sur A une fonction g à valeurs réelles satisfaisant les conditions (1) est que I, P soit un préordre complet, c'est-à-dire que I soit symétrique et transitive, P asymétrique et transitive et que toute paire a, b vérifie une et une seule des deux relations.

Le pseudo-critère avec des seuils d'indifférence et de préférence nuls correspond donc au modèle habituel de la théorie classique de la décision. Les relations I, P définissent dans ce cas un système relationnel parfait de préférence.

Un préordre complet peut aussi être caractérisé par une seule relation binaire S transitive et complète. Ainsi un s.r.f.s. total induit une structure de préordre complet si et seulement si S est transitive.

Un s.r.f.s. de la forme (I, S) induit une structure de préordre complet ssi la partie antisymétrique de S est transitive et la relation $I \cup S$ est transitive (S étant la partie symétrique de S).

- Quasi-ordres et systèmes relationnels de préférence

Dans le cas particulier où

$$q(g) \equiv p(g),$$

on obtient le modèle de préférence suivant :

$$(2) \left\{ \begin{array}{l} \forall a, b \in A : \\ a I b \Leftrightarrow - q(g(a)) \leq g(a) - g(b) \leq q(g(b)) \\ a P b \Leftrightarrow g(a) > g(b) + q(g(b)) \\ \frac{q(g(b)) - q(g(a))}{g(b) - g(a)} \geq -1 \end{array} \right.$$

Théorème IV.2 ([2], [14]) : Etant donné un ensemble A fini ou infini dénombrable, la condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe deux fonctions g et q satisfaisant les conditions (2) est que (I, P) soit un quasi-ordre, c'est-à-dire que :

$$\left\{ \begin{array}{l} - \forall a, b \in A : a I b \text{ ou } a P b \text{ ou } b P a \text{ (ou exclusifs),} \\ - I \text{ est réflexive,} \\ - \forall a, b, c, d \in A : a P b, b I c, c P d \Rightarrow a P d, \\ - \forall a, b, c, d \in A : a P b, b P c, a I d \Rightarrow \text{non } c I d. \end{array} \right.$$

La structure de quasi-ordre fut introduite par Luce ([8]) pour modéliser les situations où l'indifférence n'est pas nécessairement transitive (voir aussi [3], [4], [5], [10], [11], [13]). Lorsque A est fini, la fonction q(g(a)) peut toujours être prise constante (on trouvera un algorithme dans [14]). Des exemples intéressants de structure de quasi-ordre peuvent être obtenus avec des s.r.p. de la forme (I, P), (v, P), (v, f), (I, f), (R, S), (v, S).

- Pseudo-ordres et systèmes relationnels de préférence

Théorème IV.3 ([14]) : Etant donné un ensemble A fini ou infini dénombrable, la condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe trois fonctions g, q, p telles que

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall a, b \in A : \\ a I b \Leftrightarrow -q(g(a)) \leq g(a) - g(b) \leq q(g(b)), \\ a Q b \Leftrightarrow q(g(b)) < g(a) - g(b) \leq p(g(b)), \\ a P b \Leftrightarrow p(g(b)) < g(a) - g(b), \\ \frac{q(g(b)) - q(g(a))}{g(b) - g(a)} \geq -1, \\ \frac{p(g(b)) - p(g(a))}{g(b) - g(a)} \geq -1 \end{array} \right.$$

est que (I, Q, P) soit un pseudo-ordre, c'est-à-dire que :

- $$\left\{ \begin{array}{l} - \forall a, b \in A : a I b \text{ ou } a P b \text{ ou } a Q b \text{ ou } b Q a \text{ ou } b P a \\ \text{(ou exclusifs)}, \\ - I \text{ est symétrique, } Q \text{ et } P \text{ sont asymétriques,} \\ - (I, Q \cup P) \text{ est un quasi-ordre sur } A, \\ - (P, P) \text{ est un quasi-ordre sur } A \text{ où } a \hat{P} b \text{ ssi non } a P b \text{ et} \\ \text{non } b P a \\ - \forall a, b, c, d \in A : \left\{ \begin{array}{l} a P b, b I c, c Q d \Rightarrow a P d, (P I Q \subset P), \\ a Q b, b I c, c P d \Rightarrow a P d, (Q I P \subset P), \\ a P b, b Q c, c I d \Rightarrow a P d, (P Q I \subset P), \\ a I b, b Q c, c P d \Rightarrow a P d, (I Q P \subset P). \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Lorsque A est fini, l'une des deux fonctions seuils (mais non les deux simultanément) peut toujours être rendue constante (cf. l'exemple ci-dessous). Nous donnons ci-dessous une condition nécessaire et suffisante pour avoir deux seuils constants. Les démonstrations et algorithmes relatifs à ces résultats sont développés dans [14].

Des exemples intéressants de pseudo-ordres sont fréquemment obtenus avec des s.r.p. de la forme (I, Q, P) , $(\wedge, Q, P)$, (I, J, γ) , $(\wedge, J, \gamma)$.

Exemple de pseudo-ordre

Soit $A = \{a, b, c, d, e\}$ et le pseudo-ordre (I, Q, P) défini comme suit :

$$\begin{array}{l} b Q a, c Q a, d Q a, e P a, \\ c I b, d Q b, e P b, \\ d I c, e I c, \\ e I d. \end{array}$$

Nous laissons au lecteur le soin de vérifier les axiomes du pseudo-ordre. Les tableaux 3 et 4 définissent respectivement sur A un pseudo-critère à seuil d'indifférence constant et un pseudo-critère à seuil de préférence constant.

Tableau 3

	a	b	c	d	e
g	0	9	13	19	20
q	8	8	8	8	8
p	19,5	10,5	9	9	9

Tableau 4

	a	b	c	d	e
g	0	4	6	7	13
q	2	2,5	7,5	7	4
p	8	8	8	8	8

Il est impossible de représenter ce pseudo-ordre au moyen d'un pseudo-critère à 2 seuils constants q et p. En effet, $d I e$, $e P b$ et $b Q a$ impliqueraient respectivement

$$\begin{cases} |g(d) - g(e)| < q, \\ g(e) > g(b) + p, \\ g(b) > g(a) + q, \end{cases}$$

d'où

$$g(d) + q > g(e) > g(b) + p > g(a) + p + q$$

et donc

$$g(d) > g(a) + p,$$

ce qui est en contradiction avec $d Q a$.

Remarquons encore qu'à tout pseudo-ordre, on peut associer un préordre complet M de la façon suivante :

$$a M b \quad \text{ssi} \quad \forall c \in A : \begin{cases} c Q a \Rightarrow c \not\prec b, \\ c P a \Rightarrow c P b, \\ b Q c \Rightarrow a \not\prec c, \\ b P c \Rightarrow a P c. \end{cases}$$

Dans notre exemple, on obtient :

$$e M d M c M b M a.$$

Remarque : Dans cet exemple, le pseudo-ordre (I, Q, P) ne vérifie pas les conditions $Q P I \subset P$ et $I P Q \subset P$; celles-ci sont nécessaires pour avoir 2 seuils constants mais ne sont pas encore suffisantes (cf. [14]).

Condition pour avoir un pseudo-critère à deux seuils constants

Soit I, Q, P un triplet de relations dans un ensemble A fini telles que $I \cup Q \cup P$ soit une relation complète et I soit symétrique.

Notons

$$a Q^{-1} b \quad \text{ssi} \quad b Q a.$$

Appelons circuit dans (I, Q, P) une suite du type

$$a_1 R_1 a_2 R_2 a_3 \dots R_l a_1,$$

où

$$\begin{aligned} a_1, a_2, \dots, a_l &\in A, \\ R_1, R_2, \dots, R_l &\in \{I, Q, Q^{-1}, P\}. \end{aligned}$$

La k-valeur de ce circuit sera par définition la somme

$$v_k(R_1) + v_k(R_2) + \dots + v_k(R_l),$$

$$\text{où } v_k(R_i) = \begin{cases} -1 & \text{ssi } R_i = I, \\ +1 & \text{ssi } R_i = Q, \\ -k & \text{ssi } R_i = Q^{-1}, \\ +k & \text{ssi } R_i = P. \end{cases}$$

Théorème IV.4 ([14]) : Soit (I, Q, P) un triplet de relations sur un ensemble A fini telles que $I \cup Q \cup P$ soit complète et que I soit symétrique ; la condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une fonction g et 2 constantes q et p telles que $\forall a, b \in A$:

$$\begin{cases} a I b \Leftrightarrow |g(a) - g(b)| \leq q, \\ a Q b \Leftrightarrow g(b) + q < g(a) \leq g(b) + p, \\ a P b \Leftrightarrow g(b) + p < g(a) \end{cases}$$

est qu'il existe $k > 1$ tel que tout circuit dans (I, Q, P) ait une k -valeur strictement négative.

- Quasi-ordre orienté et système relationnel de préférence

Lorsque $q(g) \equiv 0$, le pseudo-critère devient tel que :

$$(3) \quad \begin{cases} \forall a, b \in A : \\ a I b \Leftrightarrow g(a) = g(b), \\ a Q b \Leftrightarrow g(b) < g(a) \leq g(b) + p(g(b)), \\ a P b \Leftrightarrow p(g(b)) < g(a) - g(b), \\ \frac{p(g(b)) - p(g(a))}{g(b) - g(a)} \geq -1 \end{cases}$$

Théorème IV.5 ([14]) : Etant donné un ensemble A fini ou infini dénombrable, la condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe deux fonctions g et p satisfaisant les conditions (3) est que (I, Q, P) soit un quasi-ordre orienté, c'est-à-dire que :

$$\left\{ \begin{array}{l} - \forall a, b \in A : a I b \text{ ou } a Q b \text{ ou } a P b \text{ ou } b P a \text{ ou } b Q a \\ \quad \text{(ou exclusifs)} \\ - I \text{ est symétrique, } Q \text{ et } P \text{ sont asymétriques,} \\ - (I, Q \cup P) \text{ est un préordre complet,} \\ - (\hat{P}, P) \text{ est un quasi-ordre où } a \hat{P} b \text{ ssi non } a P b \text{ et non } b P a \\ - \forall a, b, c \in A : \begin{cases} a P b, b Q c \Rightarrow a P c, \\ a Q b, b P c \Rightarrow a P c, \end{cases} \\ - \forall a, b, c, d \in A : a I b, b P c, c I d \Rightarrow a P d. \end{array} \right.$$

Lorsque A est fini, la fonction $p(g(a))$ peut être rendue constante ($\bar{14}$). Tout quasi-ordre orienté est un pseudo-ordre dans lequel I est transitive mais la réciproque n'est pas vraie.

V - SYSTEME RELATIONNEL FONDAMENTAL DE SURCLASSEMENT ASSOCIE A UNE FAMILLE F DE PSEUDO-CRITERES

Cette section présente un exemple de modèle de préférence d'un acteur qui prend en compte plusieurs points de vue. Il illustre, au moyen des concepts introduits dans les sections précédentes, comment il est possible de traiter simultanément les phénomènes d'imprécision ou d'hésitation sur chaque point de vue (pseudo-critère) et les difficultés d'agrégation des différents points de vue (incomparabilités).

Soit $F = \{g_1, g_2, \dots, g_n\}$ la famille de pseudo-critères caractérisant les préférences d'un acteur suivant n points de vue. Nous notons P_j, Q_j et I_j ($j = 1, 2, \dots, n$) les relations de préférences forte et faible et les relations d'indifférence correspondantes et Δ_j ($j = 1, 2, \dots, n$) les relations telles que

$$b \Delta_j a \text{ ssi } g_j(b) > g_j(a).$$

Un système relationnel de surclassement (S, R) peut être défini à partir de F de la façon suivante :

$$\begin{aligned} b S a \text{ si } & \begin{cases} - a P_j b \text{ est faux, } \forall j, \\ - ||\{j : a Q_j b\}|| \leq ||\{j : b P_j a\}||, \\ - ||\{j : a \Delta_j b\}|| \leq 1 + ||\{j : b \Delta_j a\}||, \end{cases} \\ b R a & \text{ sinon.} \end{aligned}$$

où, pour tout ensemble E , $||E||$ désigne le cardinal de E .

Cette relation S , qui n'est pas nécessairement transitive, généralise la dominance classique (c'est-à-dire en l'absence de seuils) où

$$b S a \text{ ssi } g_j(b) \geq g_j(a), \forall j.$$

Elle jouit également des propriétés suivantes :

1°) $b \text{ S } a$ et $a \text{ S } b$ ssi $a \text{ I}_j b$, $\forall j$

et

$$-1 \leq \|\{j : a \Delta_j b\}\| - \|\{j : b \Delta_j a\}\| \leq 1 ;$$

2°) $b \text{ S } a$ et $b' \Delta_j b$, $\forall j \Rightarrow b' \text{ S } a$;

3°) $g_j(b) = g_j(a)$, $\forall j \neq k$ et $b \text{ I}_k a \Rightarrow b \text{ S } a$.

VI - CONCLUSION

Les modèles habituellement utilisés en recherche opérationnelle et en théorie de la décision constituent souvent des idéalizations abusives de la réalité. La simplification à outrance d'un modèle permet de lui donner des propriétés mathématiques intéressantes en vue de son traitement. La question est de savoir si le modèle obtenu est encore suffisamment proche de la réalité.

Nous pensons que les approches classiques de la théorie de la décision sont applicables à un domaine de problèmes concrets qui, sans être vide, reste néanmoins très restreint. Cet aspect n'est d'ailleurs probablement pas étranger à la crise actuelle des sciences de la décision et à la méfiance des praticiens vis-à-vis des modèles théoriques. Redresser la situation signifie qu'il faut faire l'effort de sortir des sentiers battus. De nouveaux concepts doivent être mis en place en vue de modélisations plus réalistes des phénomènes. La grande diversité des modèles que l'on peut déduire des notions introduites ici (et qui comprennent les modèles classiques comme cas particuliers) constitue peut-être un pas en avant dans cette voie.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] ARROW, K.J. : Social Choice and Individual Values, Wiley and Sons, New York, 1963.
- [2] FISHBURN, P.C. : Utility Theory for decision making, Wiley and Sons, New York, 1970.
- [3] FISHBURN, P.C. : "Utility Theory with inexact preferences and degrees of preference", Synthese, Vol. 21, 1970.
- [4] JACQUET-LAGREZE, E. : "How we can use the notion of Semiorders to build Outranking Relations in Multicriteria Decision Making", dans Utility, Subjective Probability and Human Decision Making, D. WENDT and C. VLEK (eds.), 1975.
- [5] JAMISON, D.T. and LAU, L.J. : "Semiorders and the theory of choice", *Econometrica*, Vol. 41, n° 5, 1973.
- [6] KAHNEMANN, D. and TVERSKY, A. : "Prospect Theory : An Analysis of Decision Under Risk", *Econometrica*, 47, 1979.
- [7] KEENEY, R. and RAIFFA, H. : Decisions with Multiple Objectives : Preferences and Value Tradeoffs, Wiley and Sons, 1976.
- [8] LUCE, D. : "Semiorders and a theory of utility discrimination", *Econometrica*, 24, 1956.
- [9] ROY, B. : "Problems and methods with multiple objective functions", *Mathematical Programming*, Vol. 1, 1971.
- [10] ROY, B. : "Partial Preference Analysis and Decision-Aid : The Fuzzy Outranking Relation Concept", dans D. BELL, R. KEENEY and H. RAIFFA (eds.) : Conflicting Objectives in Decisions, Wiley and Sons, New-York, 1977.

- [11] ROY, B. : L'aide à la décision : Critères multiples et optimisation pour choisir, trier, ranger, livre en préparation.

- [12] VINCKE, Ph. : "A New Approach to Multiple Criteria Decision-Making", dans Multiple Criteria Decision Making, H. THIRIEZ and S. ZIONTS (eds.), Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, Springer Verlag n° 130, 1976.

- [13] VINCKE, Ph. : "Semiorordered Mixture Spaces", *Econometrica*, à paraître.

- [14] VINCKE, Ph. : "Vrais, quasi, pseudo et précritères dans un ensemble fini : propriétés et algorithmes", *Cahier du LAMSADE*, à paraître.