

CAHIER DU LAMSADE

Laboratoire d'Analyse et Modélisation de Systèmes pour l'Aide à la Décision

(Université Paris-Dauphine)

Equipe de Recherche Associée au C.N.R.S. N° 656

DISCRETISATION D'UN PAVE DE $\mathbb{R}^n$

SOU MIS A DES CONTRAINTES LINEAIRES

ET ENUMERATION DES ACTIONS EFFICACES :

LE PROGRAMME ENUMEF

CAHIER N° 30
juillet 1980

Y.A. BERNABEU
B. ROY

ABSTRACT

The main purpose of this paper is to present an algorithm whose function is as follows :

Given a finite set A of actions valuated on a family of quantitative and qualitative criteria, the problem is to determine the subset A^{Eff} of the efficient actions. That is to say, we try to find the actions which cannot be dominated by any other else action. The dominance relation is given by the next definition : the action a dominates the action a' if and only if a is at least as good as a' on every criteria, and strictly better than a' on at least one of these.

This algorithm allows the reduction of the actions set size and determines the subset A^{Eff} . Then, the use of classification algorithms, which work only on small sized sets, becomes possible.

In the same way, we propose a preliminary method which makes the use of discrete algorithms possible, when the actions set A is considered as a bounded polyhedron of $\mathbb{R}^n$. This method allows the reduction of such a polyhedron to a finite set of actions which are sufficiently differentiated.

Thus, these two algorithms are complementary and are included in a unique computer program which is called ENUMEF.

RESUME

L'objectif principal de ce cahier est de présenter un algorithme rapide dont la fonction est la suivante :

Etant donné un ensemble A fini d'actions évaluées sur une famille G de critères quantitatifs et qualitatifs, exhiber le sous-ensemble $A^{Eff} \subset A$ des actions efficaces, c'est-à-dire des actions qui ne sont dominées par aucune autre. La relation de dominance est définie par :

L'action a domine l'action a' si et seulement si a est au moins aussi bonne que a' sur tous les critères de la famille G et strictement meilleure que a' sur au moins l'un d'entre eux.

Cet algorithme permet de réduire la taille de l'ensemble des actions potentielles en se ramenant à un sous-ensemble contenant les meilleures actions. Il facilite donc l'utilisation d'algorithmes de tri ou de classement qui ne fonctionnent que pour des ensembles de taille modeste.

Dans le même esprit est proposé un outil préliminaire rendant possible l'utilisation d'algorithmes discrets lorsque l'ensemble des actions potentielles est défini en continu comme pavé de $\mathbb{R}^n$ sous contraintes linéaires. Il s'agit d'un algorithme permettant, par discrétisation, de réduire un tel polyèdre à un ensemble fini d'actions suffisamment contrastées.

Ces deux algorithmes sont donc complémentaires et s'intègrent dans un même programme informatique : ENUMEF.

SOMMAIRE

	<u>Pages</u>
<u>ABSTRACT</u>	I
<u>RESUME</u>	II
0 - <u>INTRODUCTION</u>	1
I - <u>METHODE</u>	4
1. Présentation générale	4
2. Cas d'un ensemble A défini en continu	6
2.1 Définition de l'espace des actions	6
2.2 Discrétisation de l'ensemble X	8
2.2.1 Introduction	8
2.2.2 Fonctionnement de l'algorithme de discrétisation	9
2.3 Espace des critères pour l'ensemble des actions X^{dis}	11
2.3.1 Famille de critères	11
2.3.2 Calcul des évaluations	12
3. Sélection des actions efficaces	15
3.1 Action efficace	15
3.2 Sélection	16
3.2.1 Description de l'algorithme	17
3.2.2 Preuve de l'algorithme	18
II - <u>LE PROGRAMME ET SON UTILISATION</u>	20
1. Nature des données	20
2. Lecture des données	22
3. Impression des résultats	27
<u>BIBLIOGRAPHIE</u>	35

0 - INTRODUCTION

=====

On peut différencier l'ensemble des méthodes d'aide à la décision multicritère en les examinant sous l'angle du choix qui est fait pour modéliser l'ensemble des actions potentielles. Deux grandes catégories sont alors mises en évidence :

1. - L'ensemble des actions est infini continu, défini comme sous-ensemble de l'espace $\mathbb{R}^n$ sous contraintes.

2. - L'ensemble des actions est fini et défini le plus souvent en extension par la donnée dans l'espace des critères des évaluations de chacune d'elles.

Dans le premier cas, on tente le plus souvent de se ramener à des contraintes et des critères linéaires et dès lors, la programmation linéaire fournit des outils appropriés qui peuvent répondre plus ou moins facilement aux différentes problématiques en vigueur dans le domaine de l'aide à la décision : choix de la meilleure action, choix de plusieurs meilleures, ... (H.M. WINKELS [6]).

Parmi les secondes méthodes, on trouve principalement les méthodes de surclassement (B. ROY [2] [3] [4]) qui, par leur technique de résolution, jettent un regard différent sur le problème de l'aide à la décision.

Le problème que nous nous posons, dans un premier temps, est le suivant :

Comment passer des méthodes de type 1 aux méthodes de type 2. Autrement dit, si l'ensemble des actions est défini

en continu comme polyèdre de l'espace $\mathbb{R}^n$, comment réduire cet ensemble pour qu'il soit possible d'utiliser des algorithmes tels que, par exemple, les ELECTRE [2] [4] [5]. Plusieurs raisons militent en faveur de cette réduction :

- Tout d'abord, les méthodes de programmation linéaire limitent d'elles-mêmes leur utilisation aux cas rares où les "critères" sont tous linéaires. La présence de critères qualitatifs interdit toute application de ce type de méthodes.

- En second lieu, même si ce choix de modélisation de l'ensemble des actions comme polyèdre de l'espace $\mathbb{R}^n$ est tout à fait justifié globalement, il n'en découle pas forcément que chaque point du domaine ainsi défini puisse représenter une action potentiellement différente des autres points (ou actions) appartenant à son voisinage. Autrement dit, deux actions proches ne peuvent souvent pas être identifiées à des politiques (ou stratégies) différentes.

- Enfin, plus généralement, l'ensemble de toutes ces méthodes constitue une gamme d'outils plus ou moins adaptés aux différentes formalisations usitées des problèmes de décision. Pourtant, bien souvent, l'homme d'étude tend à mettre sous silence quelques-unes de ces formalisations au profit de l'une d'entre elles qui a sa préférence. Or, ce qu'il faudrait exiger d'une méthodologie d'aide à la décision, c'est, avant tout, une plus grande souplesse, voire maléabilité, qui permettrait à l'utilisateur (décideur ou homme d'étude) de choisir plus librement le modèle le plus adapté à son problème.

Dans cette optique, nous présenterons tout d'abord un outil préliminaire qui permet, étant donné un ensemble d'actions défini comme polyèdre de $\mathbb{R}^n$, de discrétiser cet

ensemble afin d'en obtenir un ensemble fini d'actions suffisamment contrastées ou pouvant être identifiées à des politiques (stratégies) bien distinctes.

En second lieu, nous proposerons un algorithme qui permet d'extraire d'un ensemble fini discret d'actions évaluées sur une famille de critères quantitatifs ou qualitatifs, le sous-ensemble des actions efficaces.

Pour présenter ces deux algorithmes qui s'intègrent dans un même programme informatique (ENUMEF), nous procéderons en deux temps :

- dans une première partie nous développerons l'aspect purement algorithmique de ces méthodes ;
- puis, dans une deuxième partie, sera présenté le programme informatique proprement dit ainsi que son mode d'utilisation.

Dans l'une et l'autre parties, nous nous appuierons sur un exemple concret qui fut à l'origine de la conception et de la mise au point du programme ENUMEF : il s'agit du problème de la tarification de la route en Tunisie (KHOUADJA [1 bis]).

I. - METHODE

=====

1. - PRESENTATION GENERALE -

Le souci de souplesse que nous avons mentionné nous conduit à vouloir prendre en compte tant un ensemble d'actions A fini, discret défini en extension, qu'un ensemble défini comme pavé de l'espace $\mathbb{R}^n$ sous contraintes.

Le but ultime de cet algorithme est le suivant : Etant donné un ensemble d'actions A fini, discret, chaque action étant évaluée sur un ensemble de critères quantitatifs ou qualitatifs, extraire l'ensemble des actions efficaces.

Soit A l'ensemble des actions candidates :
Pour tout $a \in A$, on dispose d'un vecteur évaluation
 $g(a) = (g_1(a), g_2(a), \dots, g_p(a))$
 $G = (g_1, g_2, \dots, g_p)$ étant l'ensemble des critères.

Soit a et a' deux actions candidates, on dira que a domine a' si et seulement si :

$$g_j(a) \geq g_j(a') \quad \forall j = 1, 2, \dots, p$$

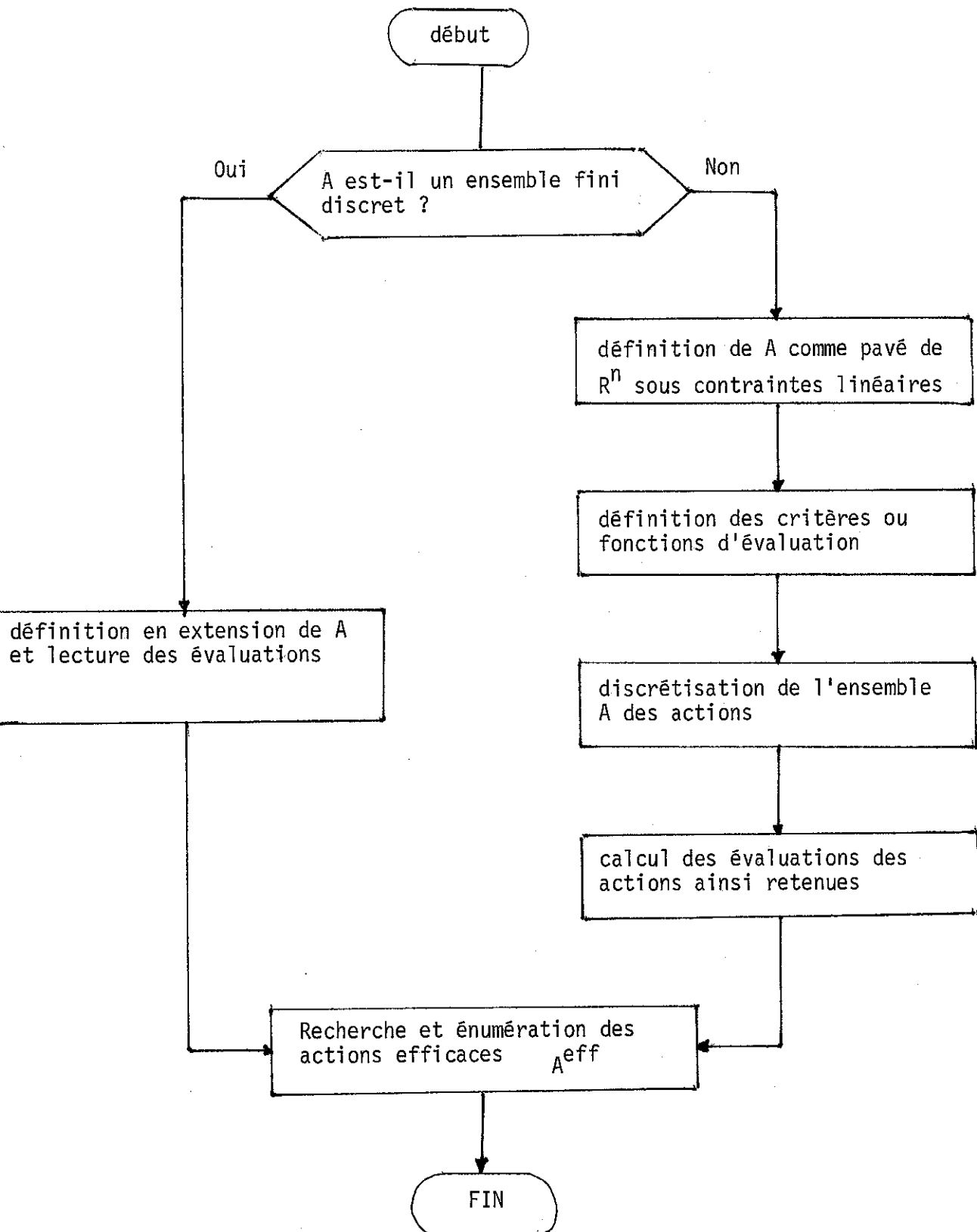
$$\text{et } \exists j_0 / g_{j_0}(a) > g_{j_0}(a')$$

On dira que a est efficace si elle n'est dominée par aucune autre action.

On voit bien que dans le cas d'un ensemble d'actions défini en continu, l'ensemble des actions efficaces est lui aussi infini et interdit l'utilisation de méthodes multi-critères discrètes.

On peut donc être amené à discrétiser l'ensemble des actions afin de n'en obtenir qu'un ensemble fini d'actions potentielles contrastées.

L'organigramme suivant décrit le fonctionnement global de l'algorithme.



2. - CAS D'UN ENSEMBLE A DEFINI EN CONTINU -

2.1. - Définition de l'espace des actions -

Soit $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$
deux points de l'espace $\mathbb{R}^n$

On écrira que :

- $x = y$ si et seulement si $x_j = y_j$ pour tout $j = 1, 2, \dots, n$
- $x \geq y$ si et seulement si $x_j \geq y_j$ pour tout $j = 1, 2, \dots, n$
- $x > y$ si et seulement si $x_j \geq y_j$ pour tout $j = 1, 2, \dots, n$
et $x \neq y$

A, l'ensemble des actions réalisables est défini
comme pavé de $\mathbb{R}^n$ sous contraintes.

Soit X l'image dans $\mathbb{R}^n$ de l'ensemble des actions,
on a :

$$X = \{x / C.x \leq B \text{ et } m \leq x \leq M, m, M \in \mathbb{R}^n\}$$

où C est la matrice des contraintes linéaires

B le vecteur second membre

m, M définissent les bornes inférieures et supérieures
du vecteur x .

Exemple de référence - (*)

Dans un problème concernant l'étude de la tarifi-

(*) Cet exemple est tiré de la thèse de 3e Cycle de H. KHOUADJA "Vers
une méthodologie d'aide à la décision en matière de tarification
de la route" ([1 bis]).

cation, chaque action peut être représentée, après analyse, comme un point de l'ensemble à six dimensions suivant :

- x_1 : taxe spécifique sur l'essence
- x_2 : taxe sur le gas oil
- x_3 : taxe annuelle sur les voitures particulières
- x_4 : taxe annuelle sur les petits tonnages
- x_5 : taxe annuelle sur les moyens tonnages
- x_6 : taxe annuelle sur les gros tonnages.

On comprend aisément que toutes les tarifications ne sont pas envisageables. On peut difficilement imaginer par exemple en France que la taxe sur l'essence soit nulle ou bien supérieure à, par exemple, 4 francs. D'où la définition du pavé à l'aide de bornes inférieures et supérieures

$$\forall x \in X \quad m \leq x \leq M. \quad m, M \in \mathbb{R}^n$$

Enfin, les contraintes peuvent porter sur des combinaisons linéaires de ces dimensions : par exemple les taxes spécifiques sur l'essence et sur le gas oil peuvent être liées par une expression du type :

$$\alpha x_1 + \beta x_2 \geq \gamma$$

qui signifierait :

- le total des deux taxes ne peut être inférieur à un certain seuil ;
- le rapport des deux taxes ne doit pas dépasser un autre seuil donné.

2.2. - Discrétisation de l'ensemble X -

2.2.1. - Introduction -

On a vu que la volonté d'une part d'éviter de raisonner en terme d'optimisation ("choix de la meilleure action") et, d'autre part, d'exhiber et de n'étudier que des actions contrastées - deux actions trop "proches" pouvant souvent être peu différenciées par rapport aux conséquences qu'elles impliquent - conduit à discrétiser l'ensemble des actions réalisables.

Il s'agit donc d'isoler des actions qui représentent des stratégies ou des politiques bien identifiées et bien distinctes.

Cela peut être compris si l'on dit que, étant donné deux actions

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \text{ et } y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$$

$$\text{si } \forall i \neq i_0 \quad x_i = y_i$$

$$\text{et } x_{i_0} \neq y_{i_0}$$

les actions x et y ne peuvent clairement être perçues comme représentant des stratégies différentes que si

$$|x_{i_0} - y_{i_0}| \geq \rho_{i_0} \quad \rho_{i_0} \in \mathbb{R} \text{ fixé}$$

Autrement dit, sur chacune des dimensions définissant l'espace des actions, on cherchera à mettre en évidence un intervalle limite à partir duquel, toutes choses égales par ailleurs, deux actions pourront être considérées comme suffisamment contrastées.

Plus généralement, on cherchera un vecteur $\rho = (\rho_1, \dots, \rho_n)$ qui permettra d'exhiber une discrétisation de l'ensemble X :

$$\begin{aligned} x \in X \quad & x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \text{et} \quad & \forall i \quad x_i = m_i + p_i \cdot \rho_i \quad p_i = 1, 2, \dots, p_i \in \mathbb{N} \\ \text{avec} \quad & x_i \leq M_i \end{aligned}$$

Exemple de référence -

Dans le cas de la tarification de la route en Tunisie, donnons un exemple :

$$\begin{aligned} x_1 \quad & \text{taxe sur l'essence était tel que} \\ 10 \leq x_1 \leq 40 \quad & \text{(exprimée en millimes)} \end{aligned}$$

et qu'une augmentation de cette taxe ne pouvait raisonnablement influencer le comportement de l'utilisateur que si elle était au moins égale à 10 millimes.

Autrement dit, $\rho_1 = 10$ et l'on ne met en évidence que quatre points sur cet axe x_1 .

2.2.2. - Fonctionnement de l'algorithme de discrétisation -

On dispose d'un ensemble X défini par :

$$X = \{x \in \mathbb{R}^n, \quad C \cdot x \leq B \quad \text{et} \quad m \leq x \leq M, \quad (m, M) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n\}$$

On supposera que X est de dimension n (*)

L'algorithme très rudimentaire que nous proposons est fondé sur les règles de fonctionnement suivantes :

* Se reporter à la page 10.

α) partir du point $x^0 = m + p^0 p$ $p^0 = (0, 0, \dots, 0)$

β) explorer le pavé défini par $m \leq x \leq M$ en posant $x = m + p p$ et en faisant progresser p par ordre lexicographique jusqu'à obtention d'une solution réalisable (1) c'est-à-dire vérifiant :

$$C. x^0 \leq B \quad \text{et} \quad x^0 \leq M.$$

γ) Dès lors, continuer l'exploration (par ordre lexicographique) et enregistrer toutes les solutions jusqu'à obtention d'un point qui ne vérifie pas une des contraintes (2).

* Si X est inclus dans un sous-espace de dimension inférieure à n , il est possible de se ramener à un sous espace de dimension appropriée pour appliquer cet algorithme (WINKELS [7]).

(1) Ce qui signifie que "l'on est entré" dans le polyèdre convexe.

(2) "On est sorti" du polyèdre : il est inutile de continuer l'exploration sur la dimension courante.

δ) augmenter d'une unité la dimension suivante de p (ordre lexicographique). Aller en β .

ε) L'algorithme s'arrête lorsqu'on atteint le point $x = M$ après obtention de x^{dis} , l'ensemble des points obtenus grâce à cette discrétisation.

2.3. - Espace des critères pour l'ensemble d'actions x^{dis} -

2.3.1. - Famille de critères -

Dans ce cas précis où l'ensemble des actions est défini comme polyèdre convexe de l'espace $\mathbb{R}^n$, la donnée de fonctions ou, du moins, de règles d'évaluations est nécessaire.

Ici, nous considérons deux types de fonctions d'évaluation.

Soit, en effet, $G = \{g_1, g_2, \dots, g_p\}$ l'ensemble des critères sur lesquels seront évaluées les actions obtenues précédemment lors de la discrétisation,

On a $G = G_1 \cup G_2$ où

$G_1 = \{g_1, g_2, \dots, g_\ell\}$ est l'ensemble des critères linéaires,

et $G_2 = \{g_{\ell+1}, \dots, g_p\}$ l'ensemble des critères qualitatifs.

Exemple de référence -

Dans l'exemple précité, l'analyse du problème a conduit à l'élaboration d'une famille cohérente de critères définie de la façon suivante :

a) 5 critères linéaires : par exemple,

- g_1 incidence sur l'équilibre des finances publiques

$$g_1(x) = \frac{R(x) - D}{D} \quad \begin{array}{l} R : \text{recettes} \\ D : \text{dépenses} \end{array}$$

ce qui s'exprime bien comme combinaison linéaire des x_i ;

- g_2 montant des taxes dans le coût de voyageur-km par voiture particulière ;

- etc.

b) 4 critères qualitatifs exprimant la cohérence des actions avec une politique :

- de limitation des voitures particulières,
- en faveur des petits tonnages,
- etc.

2.3.2. - Calcul des évaluations -

a) Critères linéaires -

Ce cas ne pose évidemment aucun problème. La donnée de la matrice des critères étant suffisante.

Soit Γ cette matrice (l, n)

$$\forall x \in X^{\text{dis}} \subset X, \begin{bmatrix} g_1(x) \\ g_2(x) \\ \vdots \\ g_l(x) \end{bmatrix} = \Gamma \cdot x$$

b) Critères qualitatifs -

Nous avons vu qu'outre les critères linéaires, il pouvait être intéressant, voire même indispensable, de tenir compte de ce que nous avons appelé les critères "qualitatifs". Cependant, l'introduction de tels critères pose ici certains problèmes.

En effet, la discrétisation automatique de l'ensemble A des actions permet difficilement de faire appel au décideur pour qu'il fournisse, pour chaque action sélectionnée lors de ce crible de X, une évaluation sur chaque critère qualitatif.

Pour résoudre ce problème, nous avons choisi de calculer les évaluations sur les critères qualitatifs des actions sélectionnées à partir de tables d'agrégation.

Pour ce faire, il faut tenir compte, sur chaque dimension i , des valeurs m_i , M_i , ρ_i .

Reprenons notre exemple.

Exemple de référence -

Pour ce cas de la tarification de la route, avaient été définies :

x_1 : taxe spécifique sur l'essence avec
 $10 \leq x_1 \leq 40$, $\rho_1 = 10$;

x_3 : taxe annuelle sur les voitures particulières
avec $17 \leq x_3 \leq 32$, $\rho_3 = 5$.

Le critère qualitatif g_6 permettait d'évaluer la cohérence de chaque action avec une politique de limitation des voitures particulières.

A ce titre, l'analyse a conduit à considérer que les deux seules dimensions x_1 et x_3 permettaient de définir l'évaluation d'une action sur ce critère g_6 .

C'est ainsi qu'on aboutit à une échelle qualitative à 13 échelons définie par la table d'agrégation suivante :

$x_1 \backslash x_3$	17	22	27	32
10	e_1	e_2	e_3	e_4
20	e_4	e_5	e_6	e_7
30	e_7	e_8	e_9	e_{10}
40	e_{10}	e_{11}	e_{12}	e_{13}

e_{13} : correspond à l'évaluation la plus élevée sur cette échelle,

e_1 : correspond à l'évaluation la plus mauvaise

$$e_1 < e_2 < e_3 < \dots < e_{13}$$

Cette procédure permet donc, à partir des "coordonnées entières" de chaque action dans l'espace X^{dis} (compte tenu des paramètres m_i , M_i , ρ_i) de calculer leurs évaluations sur les critères qualitatifs.

Elle est cependant assez restrictive puisqu'elle suppose précisément, a priori, que chaque critère qualitatif peut être défini uniquement à partir des dimensions x_1 , x_2 , ..., x_n .

On pourrait concevoir une solution plus générale qui consisterait en :

1. Sélectionner les actions à "coordonnées entières" et calculer leurs évaluations sur les critères linéaires

2. Interroger le ou les décideurs pour obtenir, pour les actions ainsi mises en évidence, les évaluations sur les critères qualitatifs.

Il reste cependant que cette solution pourrait s'avérer fastidieuse ou difficile à mettre en oeuvre si le nombre des actions sélectionnées est trop grand, ce qui semble être généralement le cas.

3. - SELECTION DES ACTIONS EFFICACES -

Désormais, quel que soit le type de formalisation utilisée pour définir l'ensemble des actions candidates, nous disposons d'un ensemble d'actions A , fini (obtenu ou non par discrétisation) ainsi que du tableau des évaluations soit

$$\forall a \in A \quad g(a) = (g_1(a), g_2(a), \dots, g_p(a))$$

3.1. - Action efficace -

Reprenons la définition :

Soit $a \in A$ et $a' \in A$

a domine a' si et seulement si :

$$\begin{cases} g_j(a) \geq g_j(a') & \forall j = 1, 2, \dots, p \\ \exists j_0 / g_{j_0}(a) > g_{j_0}(a') \end{cases}$$

On dira qu'une action est efficace si elle n'est dominée par aucune autre.

3.2. - Sélection -

On voit bien que l'introduction des critères qualitatifs conduit, dans l'espace des critères, à un domaine qui n'est pas convexe.

Il s'avère alors impossible d'adopter, pour la sélection des actions efficaces, une procédure du type :

$$\text{Max}_{a \in A} \left\{ \sum_{j=1}^p \mu_j g_j(a) \right\} \quad \mu_j > 0 \quad \forall j$$

car alors il existe ici des solutions efficaces qui ne sont pas maximales.

Pour éviter d'avoir recours à de trop nombreuses comparaisons d'actions deux à deux, nous avons retenu la procédure suivante :

Soit $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p)$ un jeu de coefficients réels avec :

$$\lambda_j > 0 \quad \forall j = 1, 2, \dots, p$$

Pour chaque action $a \in A$, on calcule

$$\mu(a) = \sum_{j=1}^p \lambda_j g_j(a)$$

puis on classe les actions par ordre de $\mu(a)$ décroissant.
On obtient donc un classement C_1 :

$$C_1 = (a_1^1, a_2^1, a_3^1, \dots, a_{r_1}^1) \quad r_1 = |A|$$

Il est trivial que l'action a_1^1 classée en tête est efficace. C'est sur cette idée qu'est fondé l'algorithme.

3.2.1. - Description de l'algorithme -

$\alpha)$ $s = 1$

$\beta)$ Dans l'espace des critères, comparer l'action située en tête du classement C^s , a_1^s avec toutes les suivantes, c'est-à-dire comparer $g(a_1^s)$ avec successivement $g(a_2^s)$, $g(a_3^s)$, ..., $g(a_{r_s}^s)$.

$\gamma)$ Eliminer du classement toutes les actions dominées par a_1^s

$\delta)$ Soit E_s l'ensemble des actions efficaces sélectionnées à cette étape.

$$E_s = a_1^s \cup \{a_i^s \in C_s / g(a_i^s) = g(a_1^s)\}$$

$\epsilon)$ Eliminer aussi du classement toutes les actions appartenant à E_s .

$\zeta)$ L'ensemble E de toutes les actions efficaces sélectionnées au cours des étapes exécutées est donc :

$$E = \bigcup_{i=1}^s E_i$$

η) On obtient une liste ordonnée par ordre de $\mu(a)$ décroissant :

$$C_{s+1} = (a_1^{s+1}, a_2^{s+1}, \dots, a_{r_{s+1}}^{s+1}) \quad |C_{s+1}| = r_{s+1}$$

test d'arrêt : l'algorithme est fini lorsque C_{s+1} est vide.
Sinon $s = s + 1$, aller en β .

3.2.2. - Preuve de l'algorithme -

Il est évident que a_1^1 est efficace par rapport à A.

Il reste à montrer que :

a_1^s étant sélectionnée ainsi que toutes les actions a_i^s telles que $g(a_i^s) = g(a_1^s)$

Dans le classement suivant C_{s+1} l'action en tête a_1^{s+1} est bien efficace par rapport à A

Supposons qu'elle ne le soit pas. Alors :

$$\exists a \in A / g_j(a) \geq g_j(a_1^{s+1}) \quad \forall j = 1, 2, \dots, p$$

et

$$\exists j_0 / g_{j_0}(a) > g_{j_0}(a_1^{s+1})$$

D'où l'on aurait :

$$\mu(a) > \mu(a_1^{s+1})$$

Deux cas peuvent se présenter :

1) L'action a a été éliminée du classement au cours d'une étape i . Cela signifie :

- Soit que $a \in E_i$. Or, a domine a_1^{s+1} . L'action a_1^{s+1} ne peut donc figurer dans le classement C_{s+1} car elle a été éliminée par comparaison avec a (ou toute autre action de même vecteur évaluation que a). Contradiction.

- Soit que $\exists a' \in E_i$ / a' domine a . Alors a et a_1^{s+1} ont été éliminées du classement par comparaison avec a' qui les domine toutes deux. a_1^{s+1} ne peut donc pas figurer en tête du classement C_{s+1} . Contradiction.

2) L'action a n'a pas encore été éliminée du classement. Comme $\mu(a) > \mu(a_1^{s+1})$, on doit avoir :

$C_{s+1} = (a, a_1^{s+1}, \dots, a_{r_{s+1}}^{s+1})$ et non pas

$C_{s+1} = (a_1^{s+1}, a_2^{s+1}, \dots, a_{r_{s+1}}^{s+1}).$

Contradiction.

Conclusion

Ainsi extraites, les actions retenues constituent bien l'ensemble des actions efficaces de A .

II - LE PROGRAMME ET SON UTILISATION

=====

1. NATURE DES DONNEES -

Ce programme permet de traiter deux types de données :

- 1) Des données discrètes, sous la forme d'une matrice d'évaluation des actions sur l'ensemble des critères

matrice $G(A) = [g_j(a_i)] \quad i = 1, \dots, r ;$
 $j = 1, \dots, p$

a \ g	1	2	...	j		p
1	$g_1(a_1)$	$g_2(a_1)$	...	$g_j(a_1)$	...	$g_p(a_1)$
2						
...						
i				$g_j(a_i)$		
...						
r	$g_1(a_r)$					$g_p(a_r)$

$g_j(a_i)$ est l'évaluation de l'action a_i sur le critère g_j .

- 2) Des données définissant un pavé de $\mathbb{R}^n$ sous contraintes

c'est à dire :

* les triplets (m_i, M_i, ρ_i) définissant les données sur la variable x_i et le pas utilisé pour cette variable lors de la discrétisation ;

* les contraintes sous la forme :

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i \leq \beta_j \quad \forall j = 1, \dots, L ; L : \text{nombre de contraintes}$$

* les critères linéaires sous la forme

$$g_j(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i$$

* les critères qualitatifs sous la forme de table d'agrégation. Pour cela, il faut définir :

- . la dimension de la table
- . les variables entrantes
- . les évaluations.

Exemple - Soit la table d'agrégation définissant le critère G_6 "cohérence avec une politique de limitation des véhicules particuliers" (cf. I, par. 2.3.2.)

- . dimension : $d_1 = 2$;
- . variables : x_1 et x_3 ;
- . évaluations sous la forme d'une matrice :

$$M \left(\frac{M_1 - m_1}{\rho_1}, \frac{M_3 - m_3}{\rho_3} \right)$$

$M(i, j) = g_6(x)$ x étant une action telle que :

$$x_1 = m_1 + i \rho_1$$

$$x_3 = m_3 + j \rho_3$$

* De plus, il est possible de rejeter les actions qu'on juge trop faibles pour certains critères en fixant des niveaux d'aspiration.

Ainsi on pourra n'extraire les actions efficaces que parmi un ensemble $X^{\text{red}} \subset X^{\text{dis}} \subset X$ tel que :

$$X^{\text{red}} = \{x \in X^{\text{dis}} \mid g_j(x) \geq s_j \quad \forall j = 1, \dots, p\}$$

2. LECTURE DES DONNEES -

Lire :

Carte No 1 : CODLEC

- 1 données discrètes
- 2 données sous forme d'un polyèdre de $\mathbb{R}^n$

Carte No 2 : Lire le nombre de critères format libre. Sur une carte.

Bloc No 3 : Lire le nom des critères, une carte par critère, sur 32 caractères cadrés à gauche.

Si CODLEC = 2, nommer d'abord les critères linéaires.

Carte No 4 : Si CODLEC = 1, lire sur une carte le nombre d'actions en format libre, puis :

Bloc No 5 : pour chaque action, lire au moins deux cartes

Carte 1 : nom de l'action sur trente-deux caractères cadrés à gauche,

Carte 2 et suiv. : les évaluations de l'action sur une ou plusieurs cartes en respectant l'ordre dans lequel ont été nommés les critères.

Bloc No 6 : Lire sur une ou plusieurs cartes, en format libre :

- . la dimension M de l'espace des actions X
- . le nombre de critères linéaires NLIN
- . le nombre de critères qualitatifs NCAL
- . le nombre de contraintes L

Bloc No 7 : Si $L > 0$, lire la matrice des contraintes et le second membre en format libre sous la forme

$$\begin{array}{ccccccc} & 1 & & 1 & & 1 & \\ \alpha & & \alpha & & \dots & \alpha & \beta \\ & 1 & & 2 & & M & 1 \end{array}$$

au moins L cartes

$$\begin{array}{ccccccc} & L & & L & & L & \\ \alpha & & \alpha & & \alpha & & \beta \\ & 1 & & 2 & & M & L \end{array}$$

Bloc No 8 : Lire les bornes inférieures et supérieures des variables x_i , le pas ρ_i utilisé pour la discrétisation et le point de départ de l'exploration du polyèdre.

$$\begin{array}{cccc} m_1 & M_1 & \rho_1 & x_1^0 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} m_2 & M_2 & \rho_2 & x_2^0 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} m_M & M_M & \rho_M & x_M^0 \end{array}$$

M cartes

Bloc No 9 : Lire la matrice des critères linéaires ainsi que les niveaux d'aspiration sur chaque critère.

$$\alpha_1^1, \alpha_2^1, \dots, \alpha_M^1, s_1$$

$$\alpha_1^2, \alpha_2^2, \dots, \alpha_M^2, s_2 \quad \text{nombre de cartes} = \text{NLIN}$$

$$\alpha_1^{\text{NLIN}}, \alpha_2^{\text{NLIN}}, \dots, \alpha_M^{\text{NLIN}}, s^{\text{NLIN}}$$

Bloc No 10 : Lire pour chaque critère qualitatif :

. la dimension d de la table d'agrégation (pour l'instant elle ne peut être supérieure à 2)

. les variables entrantes (leur numéro) i, j, sous la forme

d, i, j

Bloc No 11 : Pour chaque critère qualitatif, lire la table d'agrégation sous la forme :

autant de cartes
que de lignes dans
la table d'agrégation

α	β	γ					

- . Chaque case contient une valeur d'échelon,
- . Sur une ligne figurent $\frac{M_i - m_i}{\rho_i}$ valeurs
- . sur une colonne figurent $\frac{M_j - m_j}{\rho_j}$ valeurs.

DONNEES : EXEMPLE DE LA TARIFICATION ROUTIERE -
=====

PAGE 1		PAGE 2	
carte 1			
carte 2			
Q F I N		1 2 3 4	
V / K M		4 5 6 7	
T / P		7 8 9 1 0	
T / M		1 0 1 1 2	1 3
T / G			
T / V	Bloc n° 3	1 0 9 8 7	
P T		8 7 6 5	
T T		6 5 4 3	
A V M		4 3 2 1	
I M G			
5 4 0	Bloc n° 6	1 0 9 8 7	
0 4 0		8 7 6 5	
4 4 1 0		6 5 4 3	
7 3 2 1 7	Bloc n° 8	4 3 2 1	
0 0 0 0 0			
0 0 4 2 0		1 2 3 4	
0 0 8 5 0		5 6 7 8	
0 0 3 0 0		9 1 0 1 1	1 2
0 0 7 0 0		1 3 1 4 1 5	1 6
	Bloc n° 9		
	Bloc n° 10		
1 3 4 5 6			
2 2 2 2			

3. IMPRESSION DES RESULTATS -

```
* DEFINITION DE L'ESPACE DES ACTIONS *
*****
      NCMERE DE CIPENSICNS:  6

LA CCPOSANTE 1 VARIE DE      10.00 A      40.00 PAS      10.00
LA CCPOSANTE 2 VARIE DE      14.00 A      44.00 PAS      10.00
LA CCPOSANTE 3 VARIE DE    17000.00 A    32000.00 PAS     5000.00
LA CCPOSANTE 4 VARIE DE       0.0 A    90000.00 PAS    30000.00
LA CCPOSANTE 5 VARIE DE   300000.00 A  420000.00 PAS    40000.00
LA CCPOSANTE 6 VARIE DE   700000.00 A  850000.00 PAS    50000.00
```

NCMERE DE CONTRAINTES: 1

TABEAU DES CONTRAINTES

DE LA FORME: ALL*X1+...+AIN*XN.LE.ALPHA I

```
  X 1  X 2  X 3  X 4  X 5  X 6  X 7  X 8  X 9  X
--1.4 1.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0
```

[illegible]

[illegible]

ENTIERES		C		I		R		D		E		O		L		N		E		S	
C	I	R	D	E	O	L	N	E	S	C	I	R	D	E	O	L	N	E	S	C	I
1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1	2
1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1	2
1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1	2
1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1	2
1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1	2
1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1	2
1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1	2
1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1	2
1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1	2
1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1	2
1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1	2
1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1	2
1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1	2
1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1	2
1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1	2
1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1	2
1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1	2
1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1	2
1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1	2
1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1	2
1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1	2
1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1	2
1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1	2
1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1	2
1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1	2
1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1	2
1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1	2
1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1	2
1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1	2
1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1	2
1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1	2
1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1	2
1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1	2
1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1	2
1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1	2
1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1	2
1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1	2
1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1	2
1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1	2
1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1	2
1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1	2
1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1	2
1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1	2
1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1	2
1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1	2
1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1	2
1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1	2
1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1	2
1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1	2
1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1	2
1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1	2
1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1	2	3									

[illegible]

BIBLIOGRAPHIE

- [1] BERNABEU Y.A. - "Manuel d'utilisation du programme ELECTRE III". Université de Paris-Dauphine, Cahier du LAMSADE n° 35, juillet 1980.

- [1 bis] KHOUADJA H. - "Une méthodologie d'aide à la décision en matière de tarification routière : application au cas de la Tunisie". Université de Paris-Dauphine, Thèse de 3ème Cycle en Gestion, 1979.

- [2] ROY B. - "Classement et choix en présence de points de vue multiples" (la méthode ELECTRE I)". RIRO, n° 8, 1968.

- [3] ROY B. - "Vers une méthodologie générale d'aide à la décision". Revue METRA, Vol. XIV, n° 3, 1975.

- [4] ROY B. - "ELECTRE III - Un algorithme de classements fondé sur une représentation floue des préférences en présence de critères multiples". Cahiers du Centre d'Etudes de Recherche Opérationnelle (Belgique), Vol. 20, n° 1, 1978.

- [5] ROY B., BERTIER P. - "La méthode ELECTRE II - Une application au média-planning". Sixième Conférence Internationale de Recherche Opérationnelle, Dublin, août 1972. M. Ross Editor, OR 72, North-Holland Publishing Company, 1973.

- [6] WINKELS H.-M. - "MULTIPAR : A Flexible Interactive Decision Aid Method for Linear Vector Maximum Systems". Université de Paris-Dauphine, Cahier du LAMSADE à paraître.

- [7] WINKELS H.-M. - "Complete efficiency analysis for linear vector maximum systems : Theoretical background and an algorithm". Université de Paris-Dauphine, Document du LAMSADE n° 13, juillet 1980.