

CAHIER DU LAMSADE

Laboratoire d'Analyse et Modélisation de Systèmes pour l'Aide à la Décision

(Université Paris-Dauphine)

Equipe de Recherche Associée au C.N.R.S. N° 656

AIDE A LA DECISION MULTICRITERE ET SYSTEMES RELATIONNELS DE PREFERENCES (*)

N° 34-1980

E. JACQUET-LAGREZE
B. ROY

juillet 1980

(*) Ce cahier doit paraître prochainement sous forme d'un chapitre du livre : Monjardet, Batteau, Jacquet-Lagrèze (eds.), Analyse et Agrégation des Préférences, Economica, 1980.

SOMMAIRE

	<u>Pages</u>
<u>RESUME</u>	1
<u>ABSTRACT</u>	1
1. INTRODUCTION	2
1.1 La théorie de l'utilité	2
1.2 La programmation mathématique multicritère	3
1.3 L'agrégation en relations de surclassement	5
2. QUATRE SITUATIONS FONDAMENTALES POUR MODELISER DES PREFERENCES	6
2.1 Définitions	6
2.2 Illustration : évaluations imprécises sur une seule dimension	9
2.3 La prise en compte de seuils : le concept de pseudo-critère	10
2.3.1 Définition du pseudo-critère	10
2.3.2 Exemple	11
3. SITUATIONS ET RELATIONS REGROUPEES	12
3.1 Définition	12
3.2 Illustration : seuils et évaluations unidimensionnelles imprécises	15
4. APPLICATIONS A LA MODELISATION DE PREFERENCES MULTIDIMENSIONNELLES	16
4.1 Elargissement du concept de dominance : système relationnel de quasi-dominance	17
4.1.1 Définition	17
4.1.2 Exemples illustratifs	18

4.2 Somme pondérée : quelques variantes du modèle conduisant à utiliser les situations fondamentales et regroupées	20
--	----

REFERENCES	22
------------	----

AIDE A LA DECISION MULTICRITERE ET SYSTEMES RELATIONNELS DE PREFERENCES

Résumé

Le développement des méthodes multicritères d'aide à la décision a permis de prendre conscience de l'importance de la modélisation des préférences. Traditionnellement, le modèle du préordre total permettant la construction et l'utilisation de fonctions d'utilité ordinales ou cardinales est le seul modèle retenu. Cependant, les méthodes de surclassement s'appuient sur des modèles plus souples autorisant l'incomparabilité et même l'intransitivité. Après une introduction détaillée présentant les divers courants de modélisation des préférences en aide à la décision multicritère, on donne les définitions de modèles de préférence plus souples permettant de représenter ces phénomènes d'incomparabilité et de seuils. On examine par exemple comment élargir la relation de dominance lorsqu'on est en présence de pseudo-critères (critères à seuils). Des exemples numériques simples illustrent toutes les définitions.

MULTICRITERIA DECISION-AID AND RELATIONAL SYSTEMS OF PREFERENCES

Abstract

Recent developments in multicriteria decision-making models lead to insist on the importance of preference modelling. Traditionally, the weak-order model which allows the assessment of ordinal or cardinal utility functions is the only one which is used. Though, the outranking models are based on notions such as incomparability or even intransitivity. After a detailed introduction of different areas in multicriteria decision making, definitions of other models allowing incomparability and thresholds phenomena are given. We show for instance how to define other dominance relation when using pseudocriteria (criteria with thresholds). Numerical examples are given for all the definitions.

1. INTRODUCTION

C'est certainement dans l'activité d'aide à la décision qu'une modélisation des préférences à la fois réaliste, prudente, fine revêt un aspect crucial. Une conclusion un peu trop rapide en faveur d'un projet établie sur la base d'un modèle peu fiable quant à la saisie et la modélisation des préférences et objectifs d'un décideur et c'est toute l'étude d'aide à la décision qui perd crédit auprès de ce même décideur et cela quelles que soient l'élégance de la modélisation du système de décision ou d'action à entreprendre et la performance des algorithmes mis en oeuvre. C'est en raison de ces difficultés que des chercheurs opérationnels, des économistes, des statisticiens se sont tournés vers l'élaboration de modèles d'aide à la décision accordant une place importante à la phase de modélisation des préférences, privilégiant la prise en compte d'aspects qualitatifs et de critères et objectifs multiples difficilement commensurables.

On peut distinguer trois courants dans le développement des méthodes d'aide à la décision multicritère : l'école américaine de la théorie de l'utilité, la programmation mathématique à plusieurs fonctions objectifs développée simultanément aux Etats-Unis et dans divers pays européens, les méthodes d'agrégation en relations de surclassement qui ont vu le jour en France et ont connu un certain essor en Europe.

1.1 La théorie de l'utilité

La théorie de l'utilité unidimensionnelle a trouvé une base axiomatique dans les travaux de Von Neumann et Morgenstern (1947) puis de Savage (1954). Les premiers se sont intéressés aux axiomes justifiant un calcul d'espérance mathématique d'utilité dans la modélisation de préférences envers des actions dont les conséquences sont aléatoires et le second a étendu cette théorie au cas incertain lorsqu'on suppose que l'incertitude peut être appréhendée au moyen de probabilités subjectives (*). L'utilisation de ces travaux dans une démarche normative d'aide à la décision a été largement développée par H. Raiffa (1968 et traduction française 1968).

(*) De très nombreux travaux existent sur ce sujet. La synthèse de Dillon (1971) comporte plus de 300 références.

L'extension de la théorie de l'utilité au cas de dimensions ou critères multiples s'est faite dans deux directions complémentaires. Dans la première, les conséquences sont multiples mais certaines, et les auteurs ont développé des axiomes d'indépendance au sens des préférences, permettent de construire des fonctions d'utilité (de valeur) additives (Debreu (1969), Fishburn (1970), Ting (1971)), la somme pondérée dont l'usage est extrêmement répandu en étant un cas très particulier (fonctions d'utilité partielles linéaires et taux de substitution constants). Dans la seconde direction, les conséquences sont multiples et aléatoires ou incertaines avec des probabilités subjectives. Des axiomes d'indépendance en utilité (conditions portant sur des loteries) sont alors nécessaires pour avoir recours au modèle de l'espérance mathématique de fonctions d'utilité additives ou multiplicatives (cf. Keeney, Raïffa (1976), Fishburn (1970-1979)). Le lecteur trouvera une présentation de ces travaux à des fins d'aide à la décision dans Drake, Keeney, Morse (1972).

A titre d'exemple et d'illustration de cette méthodologie, on pourra lire l'étude de Keeney et Nair (1976) qui présente un problème de localisation d'une centrale nucléaire et pour lequel toutes les données relatives aux évaluations (distribution de probabilité dans l'espace des attributs) et à la fonction d'utilité multiattribut sont disponibles.

Parallèlement, des psychologues ont étudié la cohérence de cette approche avec la décision de l'individu. Citons entre autres le récent papier de Kahneman et Tversky (1979).

Dans cette première approche, on postule bien évidemment la complète comparabilité transitive puisqu'on cherche à construire d'emblée une fonction critère : la fonction d'utilité. La problématique d'aide à la décision est celle de l'optimisation.

1.2 La programmation mathématique multicritère

La programmation mathématique s'est vite heurtée au difficile problème de la construction d'une fonction économique satisfaisante pour modéliser correctement les préférences du décideur. Le chercheur opérationnel était conduit à agréger les critères en une somme pondérée ou encore à introduire certains d'entre eux sous forme de contraintes. C'est la pratique de cet

art difficile dans la modélisation de problèmes concrets qui a conduit Charnes et Cooper (1961) à développer le Goal Programming, première tentative en programmation mathématique multiobjectif (voir également Johnsen (1968)). Comme l'a remarqué Dyer (1977), le Goal Programming suppose bien évidemment l'existence d'une fonction d'utilité additive dans la quasi-totalité des cas. Mais le réalisme de l'approche, l'existence d'algorithmes du simplexe performants a permis le développement d'un nombre important d'applications, la plupart des utilisateurs n'étant d'ailleurs pas conscients qu'ils manipulaient des fonctions d'utilité additives explicites.

Des méthodes voisines ont été développées à partir du concept de solutions efficaces (optimum de Pareto, solutions non dominées, ...) pour sélectionner l'une d'entre elles. Ceci a conduit à de nombreux travaux pour caractériser et énumérer les solutions efficaces (cf. Zeleny (1974), Cochrane and Zeleny (1973), Gal (1977), Bragard (1976), Isermann (1976)).

Parallèlement, des méthodes interactives ont vu le jour avec pour objectif de sélectionner une solution efficace qui apparaissent comme bon compromis. Parmi les pionniers en cette matière, citons Benayoun (cf. Benayoun et al (1971)), Boyd (1970), Goeffrion et al (1972). Sont ensuite venus Zeleny (1974), Zionts (cf. Zionts and Wallenius (1976)), Wallenius (1975), Bragard (1975), Vincke (1976) et beaucoup d'autres (le livre de Hwang et Masud (1979) comporte plus de 400 références).

La plupart de ces travaux exploitent l'idée de point de mire ou point idéal. C'est un point de l'espace des critères pour lequel les coordonnées sont égales à la valeur maximum que chaque critère peut prendre lorsqu'on l'optimise sans tenir compte des autres.

Dans la quasi-totalité de ces méthodes, on postule la complète comparabilité transitive au niveau de chaque critère. Ce sont des critères vrais et non pas des pseudo-critères (forme plus générale présentée au § 2.3). Par contre, au niveau global, on ne postule qu'une préférence partielle puisque locale même si, dans quelques méthodes, leurs auteurs supposent qu'il existe une fonction d'utilité sous-jacente pour assurer la convergence de leur procédure itérative, objectif par ailleurs discutable.

La problématique d'aide à la décision reste celle de la recherche de la ou de quelques meilleures actions : optimisation dans le cas du Goal Programming et des méthodes dérivées et recherche du meilleur compromis dans les méthodes interactives (cf. Roy (1977)).

1.3 L'agrégation en relations de surclassement

On peut dire que c'est avec la méthode ELECTRE I (Roy (1968)) que s'est amorcée une réflexion plus profonde sur la modélisation des préférences multicritères par agrégation en relations de surclassement. En refusant la transitivité et surtout la complète comparabilité, c'est une voie féconde pour le praticien qui s'ouvrait mais difficile pour le théoricien et il n'existe pas, à l'heure actuelle, de théorie axiomatique du surclassement comparable à celle qui existe pour l'utilité (cf. Hirsch (1976)).

On a pu en d'autres occasions souligner la nécessité d'introduire l'incomparabilité dans un modèle de préférence globale (Roy (1976)) et l'intérêt du concept correspondant de relation de surclassement qui a donné lieu à un grand nombre de méthodes (ELECTRE II, ELECTRE III, méthodes trichotomiques, ...) et d'applications réelles (Bertier, de Montgolfier (1978)). Beaucoup d'entre elles cependant étant réalisées directement en entreprises n'ont pas donné lieu à publication dans des revues scientifiques.

Des recherches ont été entreprises tant sur les procédés de construction de relation de surclassement (Jacquet-Lagrèze (1973), Roy (1974)) que sur leur exploitation (Hansen et al (1976), Moscarola (1977), Roy (1979)).

Ainsi, le concept de relation de surclassement a permis de s'affranchir de la problématique de l'optimisation et plusieurs problématiques plus réalistes dans bien des applications ont été mises en oeuvre : tri, segmentation, classement.

On a pris le parti de présenter dans les pages qui suivent quelques points de recherches qui seront plus longuement développés et argumentés par ailleurs (Roy, livre en préparation). On tentera de montrer l'intérêt, voire la nécessité, d'affiner nos modèles de préférence d'un décideur quelle que soit d'ailleurs la voie choisie : utilité, programmation mathématique, surclassement.

Classiquement, deux situations fondamentales sont retenues pour modéliser des préférences : la préférence et l'indifférence. On montrera dans la section 2 qu'il est utile d'en introduire deux autres : l'incomparabilité, absolument nécessaire, et la préférence faible, intéressante pour distinguer entre préférence stricte et indifférence (cf. concept de pseudo-critère). Dans la section 3, on montre comment affiner la représentation des préférences en envisageant des relations de préférences regroupées (surclassement par exemple). La section 4 est consacrée d'une part à un élargissement du concept de dominance lorsqu'on veut prendre en compte des seuils (dominance définie sur des pseudo-critères) et d'autre part à une sensibilisation du lecteur à l'intérêt de ces diverses relations en regardant d'une autre façon un modèle qu'il connaît bien : la somme pondérée.

2. QUATRE SITUATIONS FONDAMENTALES POUR MODELISER DES PREFERENCES

2.1 Définitions

On s'intéresse ici à la modélisation des préférences d'un seul acteur Z relativement à un ensemble A d'actions. On suppose Z informé des conséquences des actions a de A sans que cette information soit nécessairement exhaustive et précise.

a) Axiome de comparabilité limitée

Nous définissons tout d'abord les différentes situations fondamentales auxquelles il peut être naturellement confronté. Celles-ci sont au nombre de

quatre et leur définition figure au tableau 1.

En matière d'aide à la décision, il est rare que Z exprime personnellement, pour les diverses paires d'actions concernées, celles des situations qu'il leur affecte. C'est le plus souvent l'homme d'étude qui réalise cette affectation compte tenu des informations dont il dispose et de ce qu'il postule du système de valeurs de l'acteur Z . Dans ce cas, on dira que l'homme d'étude juge au nom de Z . Si l'on retient les 4 situations du tableau 1, on peut énoncer l'axiome suivant, beaucoup moins contraignant que l'axiome classique de complète comparabilité transitive :

Axiome de comparabilité limitée : Les 4 situations fondamentales incompatibles d'indifférence, de préférence stricte, de préférence faible et d'incomparabilité conviennent pour asseoir une représentation réaliste des préférences d'un acteur Z ; quels que soient les actions en cause, le point de vue adopté pour les comparer et l'information disponible, Z ou l'homme d'étude jugeant au nom de Z peut élaborer un modèle satisfaisant qui fasse correspondre à chaque paire d'actions potentielles soit une seule, soit un regroupement de deux ou trois des 4 situations fondamentales.

b) Système relationnel fondamental de préférence (s.r.f.p.)

Etant donné 4 relations binaires I, P, Q, R définies sur un ensemble A d'actions, nous dirons que, relativement à un acteur Z , elles constituent un système relationnel fondamental de préférence (s.r.f.p.) de Z sur A si :

1°) En accord avec les notations et définitions du tableau 1, elles peuvent être prises comme représentation des préférences de Z vis-à-vis des actions de A .

2°) Elles sont exhaustives : pour une paire quelconque d'actions, une au moins est vérifiée.

3°) Elles sont mutuellement exclusives : pour une paire d'actions quelconques, une au plus est vérifiée.

Tableau 1. Modélisation des situations fondamentales caractéristiques des préférences dans la comparaison de deux actions

SITUATION	DEFINITION	RELATION BINAIRE
Indifférence	Elle correspond à l'existence de raisons claires et positives qui justifient une équivalence entre les deux actions.	I : relation symétrique réflexive
Préférence stricte	Elle correspond à l'existence de raisons claires et positives qui justifient une préférence significative en faveur de l'une (identifiée) des deux actions.	P : relation asymétrique (irréflexive)
Préférence faible	Elle correspond à l'existence de raisons claires et positives qui infirment une préférence stricte en faveur de l'une (identifiée) des deux actions mais ces raisons sont insuffisantes pour en déduire soit une préférence stricte en faveur de l'autre, soit une indifférence entre ces deux actions (ces raisons ne permettent donc pas d'isoler l'une des deux situations précédentes comme étant la seule appropriée).	Q : relation asymétrique (irréflexive)
Incomparabilité	Elle correspond à l'absence de raisons claires et positives justifiant l'une des trois situations précédentes.	R : relation symétrique irréflexive

2.2 Illustration : évaluations imprécises sur une seule dimension

Soit un ensemble A d'actions évaluées sur une seule dimension de préférence (un taux de rentabilité d'un projet par exemple), E l'échelle associée à la dimension, $\gamma(a)$ l'évaluation d'une action a .

L'évaluation $\gamma(a)$ peut être imprécise en raison des données de base utilisées dans le calcul de $\gamma(a)$ (des prévisions de trafic par exemple) mais également en raison des hypothèses structurelles et souvent simplificatrices faites lors de l'élaboration de γ (hypothèse sur la durée de vie de certains équipements, hypothèse de linéarité de la valeur des gains de temps, ...). Examinons quelques (s.r.f.p.) suivant la nature des imprécisions.

1) Les évaluations sont précises : $\gamma(a) \in E$ pour tout $a \in A$. On suppose qu'une différence sur E , aussi petite soit-elle, est significative d'une préférence stricte. Le modèle de préférence est un critère vrai ($\gamma(a)$) et le s.r.f.p. se réduit à une structure de préordre total sur A ne contenant que les relations P et I .

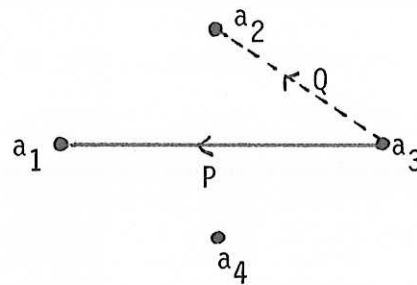
2) Les évaluations sont imprécises : $\exists a \in A$ tel que $\gamma(a) \subset E$. Souvent il n'est pas possible, ou guère réaliste, d'espérer obtenir une distribution de probabilité sur $\gamma(a)$. Un cas fréquent obtenu en pratique est une évaluation sous la forme d'intervalle $\gamma(a) = [\gamma^-(a), \gamma^+(a)]$.

- Si les intervalles sont de faible amplitude et s'ils se chevauchent sans que l'un soit inclus dans l'autre, c'est-à-dire si $\gamma^-(a) \leq \gamma^-(a')$ implique $\gamma^+(a) \leq \gamma^+(a')$, alors il est utile d'introduire la relation Q en plus des relations P et I .

- Si l'un des intervalles est inclus dans l'autre, il peut être légitime d'opter, en cet état de connaissance et d'information, pour l'incomparabilité R . Un cas particulier étant une action non encore évaluée pour laquelle l'intervalle $\gamma(a)$ peut être étendu à toute l'échelle E ; cette action est incomparable à toutes les autres.

Exemple : taux de rentabilité de 4 projets et s.r.f.p. associé :

Projets	Taux
a_1	10 %
a_2	8-12 %
a_3	11-13 %
a_4	?



Le (s.r.f.p.) sur l'ensemble $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ est le suivant :

a_3 P a_1	a_1 R a_4
a_3 Q a_2	a_2 R a_4
a_2 R a_1	a_3 R a_4

2.3 La prise en compte de seuils : le concept de pseudo-critère

On sait, depuis les travaux de Luce (1956), que la prise en compte d'un seuil d'indifférence conduit à une relation de préférence pour laquelle l'indifférence n'est plus transitive. C'est la structure de quasi-ordre (P, I) (Chandon, Vincke (1980)) pourvu que le seuil soit constant ou varie en respectant une condition précisée ci-après. Un critère muni d'une telle fonction seuil est appelé quasi-critère. Mais plus généralement, si on définit un deuxième seuil distinct du premier, on introduit naturellement la situation de préférence faible Q .

2.3.1 Définition du pseudo-critère

Un pseudo-critère $g_j(a)$ est un critère dont le pouvoir discriminant est caractérisé par deux seuils :

- un seuil d'indifférence $q_j[g_j(a)] \geq 0$;
- un seuil de préférence $p_j[g_j(a)] \geq q_j[g_j(a)]$.

Ces seuils interviennent comme suit dans la modélisation des préférences.

Considérons l'écart $u = g_j(a') - g_j(a)$ avec u positif ou nul :

- tant que $u \leq q_j[g_j(a)]$, l'écart $u > 0$ n'est pas significatif et a' doit être considéré comme indifférent à a ;
- u ne devient véritablement probant d'une préférence stricte de a' par rapport à a que si $u > p_j[g_j(a)]$;
- lorsque l'écart vérifie $q_j[g_j(a)] < u \leq p_j[g_j(a)]$, il reflète une préférence faible de a' par rapport à a .

Les seuils q_j et p_j peuvent être des constantes ou au contraire varier avec $g_j(a)$. Dans ce cas, les fonctions seuils doivent vérifier les deux inégalités suivantes :

$$\frac{q_j[g_j(a')] - q_j[g_j(a)]}{g_j(a') - g_j(a)} \geq -1 \quad \frac{p_j[g_j(a')] - p_j[g_j(a)]}{g_j(a') - g_j(a)} \geq -1$$

Propriété caractéristique d'un pseudo-critère :

$$\begin{aligned} - q_j[g_j(a')] \leq U \leq q_j[g_j(a)] &\Leftrightarrow a' I_j a \\ q_j[g_j(a)] < U \leq p_j[g_j(a)] &\Leftrightarrow a' Q_j a \\ p_j[g_j(a)] < U &\Leftrightarrow a' P_j a \end{aligned}$$

2.3.2 Exemple

Même lorsque les évaluations sont précises, la prise en compte de seuils d'indifférence et de préférence conduit à des modèles de préférence différents du préordre total. Lorsque les deux seuils q et p sont égaux, on retrouve le quasi-critère pour lequel le s.r.f.p. associé est une relation de quasi-ordre sur A .

Considérons en effet une évaluation précise sur une dimension de préférence $\gamma(a) \in E$ mais pour laquelle il existe des seuils q et p . Si ces seuils vérifient les conditions ci-dessus, le modèle de préférence est un pseudo-critère et le (s.r.f.p.) contient les relations (I, P, Q) . Soit par exemple 5 voitures à vendre sur un marché d'occasion. Doit-on prendre $q = p = 0$? Le choix peut paraître bien arbitraire. Les valeurs $q = 100$ F et $p = 500$ F pour des occasions comprises entre 8 000 et 10 000 F ne seraient-elles pas plus réalistes pour bien des consommateurs ? Les préférences ainsi modélisées seraient un (s.r.f.p.) ne contenant pas la relation R (incomparabilité) mais les relations (I, P, Q) structurées en pseudo-ordre (cf. Vincke (1980)).

3. SITUATIONS ET RELATIONS REGROUPEES

3.1 Définition

a) Situations regroupées de préférence

On peut vouloir affiner davantage la modélisation des préférences en explicitant de façon formelle une relative ambiguïté quant au choix de l'une des 4 situations fondamentales I, P, Q, R. Tout en considérant toujours ces 4 situations comme exclusives, l'homme d'étude peut très bien, dans une phase de l'étude et de modélisation des préférences d'un acteur Z, ne pas savoir, ne pas pouvoir ou ne pas vouloir trancher entre deux ou même trois (le surclassement S) de ces situations. En retenir plusieurs ne signifie donc pas qu'elles sont simultanément vraies mais seulement qu'elles ne sont pas isolables ou qu'il ne veut pas payer le prix pour les isoler.

La définition des regroupements les plus intéressants est donnée au tableau 2.

b) Système relationnel regroupé de préférence (s.r.r.p.) et système relationnel de préférence (s.r.p.)

Etant donné 9 relations binaires I, R, ω , P, Q, $\prec$, J, K, S définies sur un ensemble A d'actions potentielles, nous dirons qu'elles constituent un système relationnel regroupé de préférence (s.r.r.p.) d'un acteur Z sur A si :

1°) En accord avec les notations et définitions des tableaux 1 et 2, elles peuvent être prises comme représentation des préférences de Z vis-à-vis des actions de A.

2°) Elles sont exhaustives : pour une paire quelconque d'actions, l'une au moins est vérifiée.

3°) Elles sont mutuellement exclusives : pour une paire d'actions quelconques, une au plus est vérifiée.

4°) L'une au moins des 5 relations ω , $\prec$, J, K, S est non vide.

SITUATION	DEFINITION	RELATION BINAIRE
Non préférence	Elle correspond à l'absence de raisons claires et positives qui justifieraient une préférence stricte ou une préférence faible en faveur de l'une quelconque des deux actions et regroupe par conséquent, sans possibilité de les différencier, les situations d'indifférence et d'incomparabilité.	$\sim$: $a \sim a'$ si et seulement si $a I a'$ ou $a R a'$
Préférence (au sens large)	Elle correspond à l'existence de raisons claires et positives qui justifient une préférence stricte ou faible en faveur de l'une (identifiée) des deux actions et regroupe par conséquent, sans possibilité de les différencier, les situations de préférence stricte et de préférence faible.	$\succ$: $a \succ a'$ si et seulement si $a P a'$ ou $a Q a'$
Présomption de préférence	Elle correspond à l'existence de raisons claires et positives qui justifient la préférence faible (si faible soit-elle) en faveur de l'une (identifiée) des deux actions ou tout simplement l'indifférence entre elles deux mais sans qu'aucune séparation significative ne soit établie entre les situations de préférence faible et d'indifférence.	J : $a J a'$ seulement si $a Q a'$ ou $a I a'$: $a Q a' \Rightarrow a J a'$ $a I a' \Rightarrow a J a'$ ou (1) $a' J a$
K-préférence	Elle correspond soit à l'existence de raisons claires et positives qui justifient la préférence stricte en faveur de l'une (identifiée) des deux actions, soit à l'incomparabilité de ces deux actions mais sans qu'aucune séparation significative ne soit établie entre cette dernière situation et celle de préférence stricte.	K : $a K a'$ seulement si $a P a'$ ou $a R a'$: $a P a' \Rightarrow a K a'$ $a R a' \Rightarrow a K a'$ ou (1) $a' K a$
Surclassement	Elle correspond à l'existence de raisons claires et positives qui justifient soit une préférence, soit une présomption de préférence en faveur de l'une (identifiée) des deux actions mais sans qu'aucune séparation significative ne soit établie entre les situations de préférence stricte, de préférence faible et d'indifférence.	S : $a S a'$ si et seulement si $a \succ a'$ ou $a J a'$ donc seulement si : $a P a'$ ou $a Q a'$ ou $a I a'$ $a I a' \Rightarrow a S a'$ ou (1) $a' S a$

(1) ou non exclusif, non remplaçable par et.

Tableau 2. Situations et relations regroupées intervenant dans la modélisation des préférences relativement à deux actions a, a'

L'axiome de comparabilité limité revient à affirmer que les préférences de l'acteur Z peuvent être modélisées soit au moyen d'un (s.r.f.p.), soit au moyen d'un (s.r.r.p.). On désigne par système relationnel de préférence (s.r.p.) un système relationnel, qu'il soit du type (s.r.f.p.) ou (s.r.r.p.).

Parmi les s.r.p. les plus intéressants, citons ceux dans lesquels S est non vide et qui sont :

- soit réduits à S (système relationnel fondamental de surclassement dit complet ou total) ;
- soit de la forme (S, R) , $(S, \sim)$ ou $(S, \sim, R)$ (système relationnel fondamental de surclassement dit incomplet ou partiel).

A leur sujet, faisons observer qu'il découle de la définition de S (cf. tableau 2) que :

- la partie symétrique de S peut toujours être considérée comme représentative de situations d'indifférence ;
- en revanche, il est en général incorrect de considérer la partie asymétrique de S comme représentative de situations de préférence large.

c) Axiome de parfaite comparabilité transitive

Cet axiome est à la base de la théorie de l'utilité (1). Il peut s'énoncer comme suit : les deux situations incompatibles de non préférence et de préférence conviennent pour asseoir une représentation réaliste des préférences d'un acteur Z ; quels que soient les actions potentielles en cause, le point de vue adopté pour les comparer et l'information disponible, Z ou l'homme d'étude jugeant au nom de Z peut élaborer un modèle satisfaisant qui fasse correspondre à chaque paire d'actions potentielles une et une seule de ces deux situations et cela de telle sorte que les deux relations binaires $\sim$ et $\prec$ ainsi définies sur l'ensemble des actions considérées soient l'une et l'autre transitives.

(1) En toute rigueur, cet axiome n'exclut pas radicalement toute incomparabilité puisque $\sim$ recouvre aussi bien des situations d'indifférence que des situations d'incomparabilité ; toutefois, ces dernières n'étant pas séparables des premières, elles sont en fait traitées comme si elles avaient la même signification que celles d'indifférence.

Le fait d'adhérer à cet axiome implique que les (s.r.p.) retenus dans la modélisation des préférences sont d'un type particulier auquel on donne le nom de système relationnel parfait de préférence (s.r.p.p.). Un (s.r.p.p.) est un (s.r.p.) constitué de deux relations transitives obligatoirement choisies, pour la première entre I et $\sim$, pour la seconde entre P et $\succ$.

3.2 Illustration : seuils et évaluations unidimensionnelles imprécises

Reprenons l'exemple de l'acheteur d'une voiture d'occasion mais supposons maintenant les prix des voitures imprécis. En effet, pour certains modèles de voiture qu'il envisage, l'acheteur n'a pas encore trouvé une occasion précise mais, en se fiant à l'Argus et à quelques annonces, il pense pouvoir trouver une occasion dans une fourchette de prix. Quel est son système relationnel de préférence en ne tenant compte que de la seule dimension prix dans cet état de son information si ses seuils d'indifférence et de préférence sont 100 F et 500 F (cf. le modèle du pseudo-critère) et si l'information qu'il possède sur le prix de 4 modèles de voitures est la suivante ?

Voiture	Prix
a_1	9 000 F
a_2	8 800 - 9 200 F
a_3	9 000 - 9 300 F
a_4	9 600 F

En raisonnant directement ou en se reportant à la figure 2, on en déduit le (s.r.r.p.) sur $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ suivant :

$a_1 \sim a_2$ car $a_1 Q a_2$ ou $a_2 Q a_1$ ou $a_1 I a_2$ sans distinction possible, donc $a_1 R a_2$ ou $a_1 I a_2$
 $a_1 Q a_3$ malgré l'imprécision
 $a_1 P a_4$ (pas d'imprécision)
 $a_2 J a_3$ car $a_2 Q a_3$ ou $a_2 I a_3$
 $a_2 \succ a_4$ car $a_2 Q a_4$ ou $a_2 P a_4$
 $a_3 Q a_4$ malgré l'imprécision.

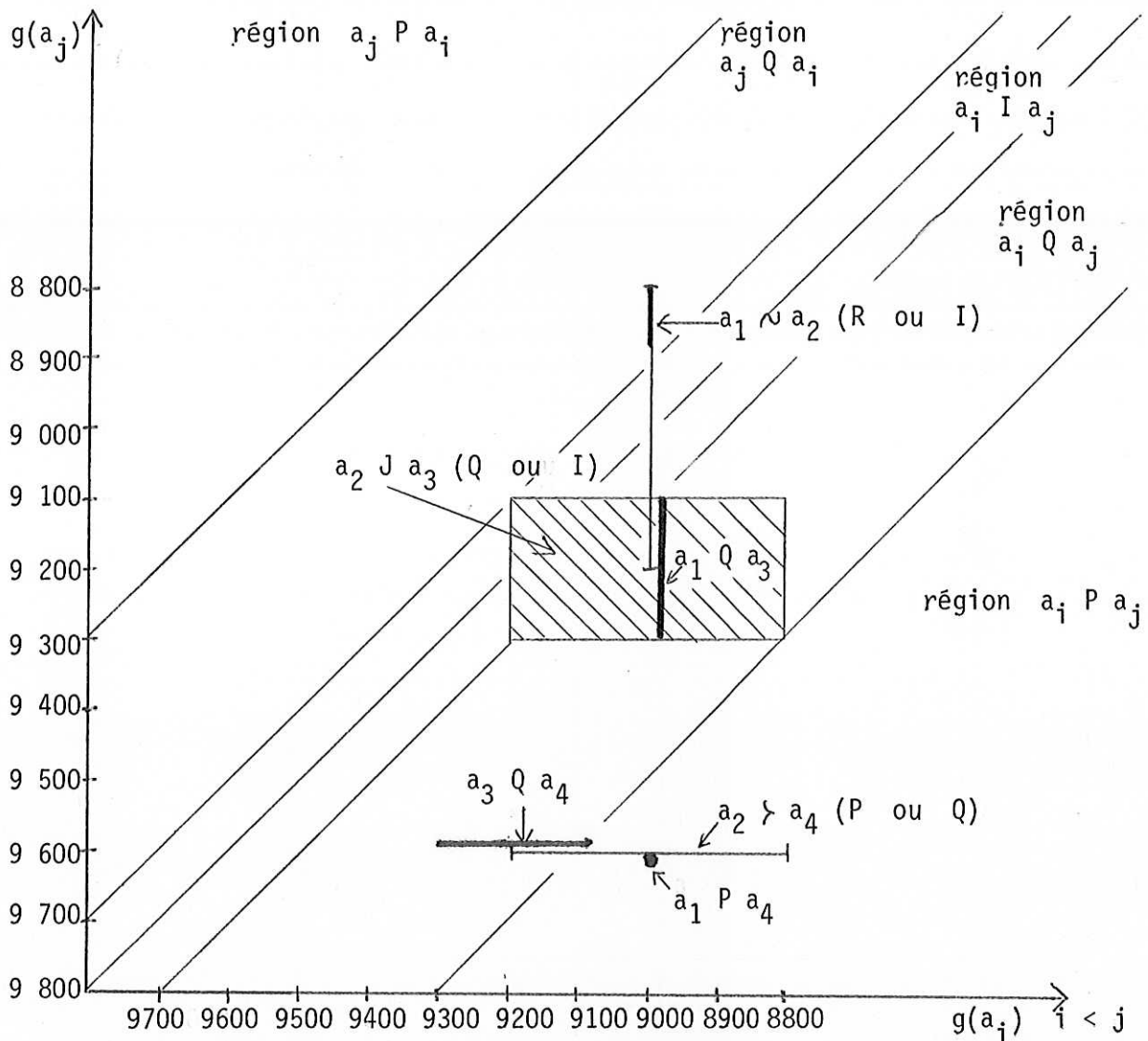


Figure 1. Représentation graphique d'un système relationnel regroupé de préférences : pseudo-critère (seuils 100 et 500) et évaluations imprécises

4. APPLICATIONS A LA MODELISATION DE PREFERENCES MULTIDIMENSIONNELLES

On considère dans cette section un ensemble A d'actions et une famille F de pseudo-critères :

$$F = \{g_1, g_2, \dots, g_j, \dots, g_n\}.$$

En partant d'un concept (dominance) et d'une méthode (somme pondérée) bien classiques, on indique dans quelles directions exploiter les notions présentées dans les sections précédentes.

4.1 Elargissement du concept de dominance : système relationnel de quasi-dominance

4.1.1 Définition

Lorsque les pseudo-critères sont des critères vrais ou critères au sens classique du terme (seuils $q_j = p_j = 0 \quad \forall j = 1, n$), on définit traditionnellement la dominance Δ comme suit :

$$a' \Delta a \iff g_j(a') \geq g_j(a) \quad \forall j.$$

Il y a dominance stricte Δ_s si l'une au moins des inégalités est stricte.

La relation de dominance conduit, on le sait, à un ordre partiel. Cependant, lorsqu'on introduit des seuils, il convient d'être prudent dans les définitions de dominance comme les exemples du § 4.1.2 le montreront.

En effet, avec les notations ci-dessus, la définition de Δ est équivalente, dans le cas particulier des critères vrais (sans seuils), à :

$$a' \Delta a \iff a' S_j a \quad \forall j \tag{1}$$

On remarquera que, dans sa seconde formulation, cette définition peut s'appliquer sans modification au cas général des pseudo-critères (seuils non tous nuls). Mais elle n'est guère satisfaisante. Faisons observer par exemple qu'avec cette définition (1), si a et a' sont tels que la condition (2) est satisfaite pour tout j , on a quand même $a' \Delta a$ (et bien sûr $a \Delta a'$)

$$g_j(a) - q_j(g_j(a)) \leq g_j(a') < g_j(a) \tag{2}$$

Ceci exclut par conséquent tout éventuel "effet de cumul" : des écarts défavorables peuvent être non significatifs pris isolément mais globalement être regardés comme significatifs.

Si l'on souhaite éviter ce phénomène, on peut prendre appui sur une autre relation plus faible que la relation Δ et pour laquelle on limite le nombre $n_q(a', a)$ des pseudo-critères vérifiant la condition (2). Cette limite peut, par exemple, faire intervenir le nombre $n_\zeta(a', a)$ des pseudo-critères pour lesquels $a' \succ_j a$ est vrai.

La relation envisagée S_q est définie par :

$$a' S_q a \iff a' S_j a \quad \forall j \text{ et } n_q(a', a) \leq 1 + n_\zeta(a', a) \quad (3)$$

Nous l'appellerons relation de quasi-dominance.

D'autres façon d'adapter le concept de dominance à l'existence de seuils non nuls peuvent être envisagées.

4.1.2 Exemples illustratifs

Prenons quatre exemples et montrons l'intérêt d'adopter la relation de quasi-dominance S_q plutôt que la relation de dominance classique Δ brutalement appliquée à des pseudo-critères :

- Exemple 1 : trois quasi-critères $q_j = p_j = 1$ pour $j = 1, 3$

	g_1	g_2	g_3	La relation de dominance Δ conduit au résultat $a \Delta_S a'$, $a' \Delta_S a''$, $a'' \Delta_S a$. Comme la dominance est stricte, on a coutume de l'interpréter comme une préférence stricte P .
a	12	11	10	
a'	10	12	11	
a''	11	10	12	

Ne doit-on pas être plus prudent pour asseoir une relation P dès que des écarts, même petits, se cumulent en sens inverse ?

- Exemple 2 : cinq quasi-critères (ou pseudo-critères) tels que $q_j = 1$ pour $j = 1, 5$

	g_1	g_2	g_3	g_4	g_5	La relation de dominance Δ conduit au résultat $a \Delta a'$ et $a' \Delta a$. Comme la dominance Δ s'applique dans les deux sens, on a coutume de l'interpréter comme une indifférence $a I a'$.
a'	12	12	12	12	12	
a	11	11	11	11	11	

L'indifférence est-elle si sûre ici ? Chaque écart pris isolément est non significatif d'une préférence. Mais, du fait du cumul, ne peut-on pas postuler une préférence faible ?

- Exemples 3 et 4 : cinq pseudo-critères tels que $q_j = 1$ et $p_j = 5$ pour $j = 1, 5$

	g_1	g_2	g_3	g_4	g_5
a'	12	12	12	12	12
a	18	11	11	11	11

Exemple 3

	g_1	g_2	g_3	g_4	g_5
a'	12	12	12	12	12
a	18	13	11	11	11

Exemple 4

La relation de dominance Δ conduit au résultat $a \Delta a'$ dans les deux exemples, ce qu'on interprète comme une préférence stricte $a P a'$.

Est-on si sûr de cette préférence stricte ? Le cumul de chaque écart non significatif pris isolément ne peut-il pas compenser d'une certaine manière l'écart important observé sur le premier critère ?

Examinons en revanche ce qu'on obtient avec la relation de quasi-dominance S_q .

- Exemple 1 : $a S_q a'$ de justesse car $n_{-q}(a, a') = 2$ et $n_{\neq}(a, a') = 1$, donc (3) est satisfaite.

On a par conséquent ici le cycle mais avec la relation S qui n'a pas de raison de s'interpréter comme une préférence stricte (voir définition de S) : $a S_q a'$, $a' S_q a''$, $a'' S_q a$.

- Exemple 2 : on a toujours $a' S_q a$ mais ici $a S_q a'$ n'est plus vérifié car $n_{-q}(a, a') = 5$ et $n_{\neq}(a, a') = 0$, donc (3) est faux. L'antisymétrie de S_q est ici plus satisfaisante ; on accepte l'effet de cumul.

- Exemple 3 : a' et a sont incomparables par S_q ; en effet, non $a' S_q a$ en raison de g_1 .

non $a S_q a'$ même si $a S_j a'$ pour $j = 1, 5$ car $n_{-q}(a, a') = 4$ et $n_{\zeta}(a, a') = 1$.

- Exemple 4 : la quasi-dominance joue maintenant en faveur de a .
 $a S_q a'$ car $n_{-q}(a, a') = 3$ et $n_{\zeta}(a, a') = 2$.

4.2.2 Somme pondérée : quelques variantes du modèle conduisant à utiliser les situations fondamentales et regroupées

Montrons, à partir du modèle bien connu de la somme pondérée, comment il est possible de bâtir de bien des façons différentes un modèle de préférence utilisant des situations regroupées en étant à la fois réaliste et opérationnel. Deux dimensions de préférence suffiront pour cette illustration.

Soit $\gamma_1(a)$ et $\gamma_2(a)$ les évaluations de a sur les deux dimensions $v(a) = p_1 \gamma_1(a) + p_2 \gamma_2(a)$ le modèle de la somme pondérée. Supposons ici $p_1 \neq 0$ et posons $s_2 = p_2/p_1$ le taux de substitution constant ($s_1 = 1$). Le modèle s'écrit encore $V(a) = \gamma_1(a) + s_2 \gamma_2(a)$.

Parmi les hypothèses nécessaires à l'usage de ce modèle, examinons les suivantes et les modèles que l'on peut proposer en les laissant tomber :

- taux de substitution s_2 précis (structure de la fonction de valeur est supposée précise) ;
- pas de phénomène de discordance venant limiter les possibilités de compensation entre critères lorsque les écarts en jeu sont trop importants ;
- évaluations $\gamma(a)$ précises ;
- pas de seuils d'indifférence et de préférence.

Examinons quelques modèles et systèmes relationnels associés dès qu'on abandonne une ou deux de ces hypothèses.

a) Taux de substitution s_2 imprécis

Soit $s_2 \in [m_2, M_2]$ un intervalle d'imprécision et convenons de poser :

$a S a' \Leftrightarrow V(a) - V(a') \geq 0$ pour tout $s_2 \in [m_2, M_2]$
 $a R a'$ sinon.

On vérifie facilement que S est un ordre partiel. Ce modèle très simple a été utilisé dans la comparaison de tracés autoroutiers (cf. Bertier et de Montgolfier (1978)).

b) Prise en compte d'une discordance

Supposons que des écarts $\gamma_1(a) - \gamma_1(a') \geq 0$ et $\gamma_2(a') - \gamma_2(a) \geq 0$ soient jugés trop importants et révélateurs d'un trop grand conflit dans les critères ; on peut vouloir opter pour l'incomparabilité. En utilisant des règles du type :

$$\gamma_j(a') - \gamma_j(a) \geq D_j \Rightarrow \text{non } a P a' \text{ et non } a I a',$$

le s.r.f.p. associé contient des situations I, P, R comme l'indique le graphique de la figure 2.

En effet, posons :

$$\begin{aligned}
 I^+(a, a') &= \{i / \gamma_i(a) - \gamma_i(a') > 0\} \\
 f(a, a') &= \sum_{i \in I^+(a, a')} s_i [\gamma_i(a) - \gamma_i(a')]
 \end{aligned}$$

On remarque que l'on a :

$$V(a) - V(a') = f(a, a') - f(a', a).$$

Si on ne fait pas jouer la discordance, utiliser la somme pondérée conduit à définir les 3 zones $a I a'$, $a P a'$ et $a' P a$. Si on fait intervenir la discordance, cela revient, dans le cas des deux dimensions, à introduire la zone $a R a'$ du graphique de la figure 2.

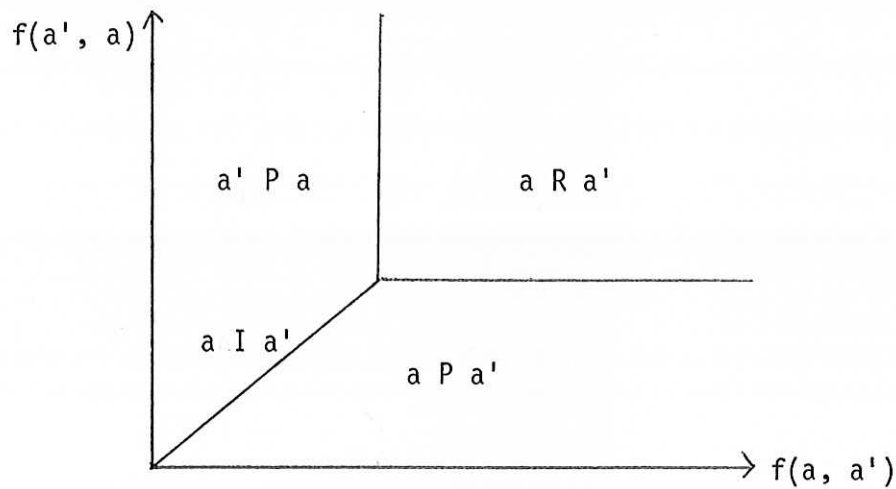


Figure 2. Somme pondérée avec discordance

c) Evaluations imprécises dans les modèles précédents

Supposons de plus des évaluations imprécises sous formes d'intervalles, par exemple :

$$\gamma_i^-(a) \leq \gamma_i(a) \leq \gamma_i^+(a) \quad \forall a \in A \text{ et pour } i = 1, 2$$

L'imprécision a pour conséquence l'utilisation de relations regroupées dans les modèles précédents. Reprenons le modèle du § b) ; pour un couple (a, a') , sa représentation dans le graphique de la figure 2 n'est plus un point mais une zone d'imprécision, un pavé donné par :

$$\begin{aligned} f_*(a, a') &\leq f(a, a') \leq f^*(a, a') \\ f_*(a', a) &\leq f(a', a) \leq f^*(a', a) \end{aligned}$$

Suivant la position d'un tel pavé dans le graphique, on pourra opter pour les relations suivantes :

$$\begin{array}{ll} a P a' & a S a' \quad (P \text{ ou } I) \\ a I a' & a \sim a' \quad (I \text{ ou } R) \\ a R a' & a K a' \quad (P \text{ ou } R) \end{array}$$

REFERENCES

Bell D.E., Keeney R.L., Raïffa H. (eds) (1977) - Conflicting objectives in decision, Wiley, New York.

Benayoun R., Larichev O., de Montgolfier J. and Tergny J. (1971) - Linear Programming with Multiple Objective Functions : STEM Method (STEM), Mathematical Programming n° 1, pp. 366-375.

Bertier P., de Montgolfier J. (1978) - Approche multicritère des problèmes de décision, Editions Hommes et Techniques, Paris.

Boyd D. (1970) - A methodology for analyzing decision problems involving complex preference assessments, Ph. D Thesis, Stanford.

Bragard L. (1976) - Objectifs discordants et solutions efficaces en programmation multicritère linéaire, Revue Belge de Statistique, Informatique et Recherche Opérationnelle 16, 3, 43-49.

Bragard L. (1975) - Une méthode multicritère, in. Proceedings d'EURO I, North-Holland Publishing Company, Amsterdam.

Chandon J.L., Vincke P. - Modélisation des préférences, in Monjardet, Bataillon, Jacquet-Lagrèze (1980).

Charnes A. and Cooper W.W. (1961) - Management models and industrial applications of linear programming, Vol. I, Wiley, New York.

Cochrane J.L. and Zeleny M. (eds) (1973) - Multiple Criteria Decision Making, University of South Carolina Press, Columbia, South Carolina.

Debreu G. (1969) - Topological methods in cardinal utility theory, in Arrow, Sargent, Suppes (eds), Mathematical methods in the social sciences, Stanford University Press, Stanford, California.

Dillon J.L. (1975) - An expository review of Bernoullian Decision Theory, Review of Marketing and Agricultural Economics, Vol. 39, n° 1.

Drake A.W., Keeney R.L., Morse P.M. (eds) (1972) - Analysis of Public Systems, the MIT Press, Cambridge, Massachusetts.

Dyer J.S. (1977) - On the relationship between Goal Programming and Multi-attribute Utility Theory, paper presented to the International Symposium on Extremal Methods and Systems Analysis, Austin, Texas, September 13-15.

Fishburn P.C. (1970) - Utility theory for decision making, Wiley, New-York.

Fishburn P.C. (1979) - A survey of multiattribute/multicriterion evaluation theory, in Zionts (ed) (1979).

Gal T.C. (1977) - A general method for determining the set of all the efficient solutions to a linear vector maximum problem, European Journal of Operational Research, Vol. I, n° 3, 176-185.

Geoffrion A.M., Dyer J.S., Feinberg A. (1972) - An interactive approach for multicriteria optimization with an application to the operation of an academic department, Management Science, 19-4.

Hansen P., Anciaus-Mudeleer M., Vincke P. - Quasi kernels of outranking relations, in Thiriez and Zionts (1976).

Hirsch G. (1976) - Logical foundations, analysis and development of multicriterion methods, Ph. D. Dissertation, University of Pennsylvania.

Hwang C.L. and Masud A.S.M. (1979) - Multiple objective decision making - Methods and applications - A state-of-the-art survey, Springer-Verlag, New-York.

Isermann H. (1976) - The enumeration of the set of all efficient solutions for a linear multiple objective program. Operational Research Quarterly, 27.

Jacquet-Lagrèze E. (1973) - How we can use the notion of semi-orders to build outranking relations in multicriteria decision making, in Wendt and Vlek (eds) (1975).

Jacquet-Lagrèze E. (1975) - La modélisation des préférences - Préordres, quasi-ordres et relations floues, thèse, Université Paris V.

Johnsen E. (1968) - Studies in multiobjective decision models, Student-Lit-terature, Lund, Sweden.

Kahneman D., Tversky A. (1979) - Prospect theory : an analysis of decision under risk, Econometrica, Vol. 47, n° 2.

Keeney R.L., Nair K. (1976) - Selecting Nuclear Power Sites Using Decision Analysis, Proceedings of a workshop on decision making with multiple conflicting objectives, IIASA, Laxenburg.

Keeney R.L., Raïffa H. (1976) - Decision with multiple objectives : Preferences and Value Tradeoffs, Wiley, New-York.

Luce R.D. (1956) - Semi-orders and a theory of utility discrimination, Econometrica 24, 178-191.

Monjardet B., Batteau P., Jacquet-Lagrèze E. (eds) (1980) - Analyse et Agrégation des Préférences, Economica.

Moscarola (1977) - Multicriteria Decision Aid - Two Applications in Education Management, in Zionts (1977).

Raïffa H. (1968) - Decision Analysis - Introductory on Choice under Uncertainty, Addison Wesley, London - Traduit en français : Analyse de la décision - Introduction au choix en avenir incertain, Dunod, 1973.

Roy B. (1968) - Classement et choix en présence de points de vue multiples (la méthode ELECTRE), RAIRO 2, 57-75.

Roy B. (1971) - Problems and methods with multiple objective functions, Mathematical Programming, North Holland, Amsterdam, Vol. 1, n° 2 - Version française : Decision avec critères multiples : problèmes et méthodes, Revue METRA, Vol. XI, n° 1, 1972.

Roy B. (1974) - Critères multiples et modélisation des préférences - L'apport des relations de surclassement, Revue d'Economie Politique, n° 1.

- Roy B. (1976) - Partial preference analysis and decision aid : the fuzzy outranking relation concept, in Bell et al. (1977).
- Roy B. (1977) - A conceptual framework for a prescriptive theory of decision-aid, in Starr and Zeleny (1977).
- Roy B. (1979) - Nécessité d'une nouvelle axiomatique en théorie de la décision pour penser autrement la recherche opérationnelle.
- Roy B. - L'aide à la décision : critères multiples et optimisation pour choisir, trier, ranger (livre en préparation).
- Savage (1954) - The foundation of statistics, Wiley, New York.
- Starr M.K., Zeleny M. (eds) (1977) - Multiple Criteria Decision Making, Studies in the Management Science, Vol. 6, North-Holland.
- Thiriez H. and Zionts S. (eds) (1976) - Multiple Criteria Decision Making, Proceedings Jouy en Josas, France, 1975, Springer-Verlag, New York.
- Ting H.M. (1971) - Aggregation of attributes for multiattributed utility assessment, Operation Research Center, Technical Report n° 66, MIT, Cambridge, Massachusetts.
- Vincke P. (1976) - A new approach to multiple criteria decision-making, in Thiriez and Zionts (1976).
- Vincke P. (1980) - Vrais, quasi, pseudo et précritères dans un ensemble fini : propriétés et algorithmes, Université Paris-Dauphine, Cahier LAMSADE en préparation.
- Von Neumann T. and Morgenstern O. (1947) - Theory of games and Economic Behavior, 2nd ed., Wiley, New York.
- Wallenius J. (1975) - Interactive Multiple Criteria Decision Methods : An Investigation and Approach, The Helsinki School of Economics, Helsinki.

Wendt D. and Vlek C. (eds) (1975) - Utility, Probability and Human Decision Making, D. Reidel Publishing Company, Boston.

Zeleny M. (1974) - Linear Multiobjective Programming, Springer-Verlag, New-York.

Zeleny M. (ed) (1976) - Multiple Criteria Decision Making, Kyoto 1975, Springer-Verlag, New York.

Zionts S. (ed) (1977) - Multiple Criteria Problem Solving, Proceedings Buffalo, Springer-Verlag, New-York.

Zionts S. and Wallenius J. (1976) - An interactive Programming Method for Solving the Multiple Criteria Problem, Management Science, Vol. 22, n° 6, pp. 652-663.