

CAHIER DU **LAMSADE**

369

Novembre 2015

Définition d'un Système d'Aide à la
Décision d'ordonnancement des
commandes sur les lignes de l'atelier
d'engrais

Vincent Giard, Ahlam Azzamouri, Imane Essaadi

Définition d'un Système d'Aide à la Décision d'ordonnancement des commandes sur les lignes de l'atelier d'engrais

Vincent Giard^{1&2}, Ahlam Azzamouri³, Imane Essaadi³

1. Professeur émérite à PSL-Université Paris-Dauphine – LAMSADE
2. Professeur affilié à l'EMINES *School of Industrial Management*, titulaire de la chaire OCP d'Optimisation Industrielle
3. Doctorante à l'EMINES *School of Industrial Management*

Résumé : Cet article décrit les principes d'élaboration d'un SIAD permettant un ordonnancement optimal de commandes d'engrais sur des lignes de production parallèles, de caractéristiques hétérogènes, avec prise en compte de temps de lancement dépendant à la fois de la séquence et de la ligne et avec prise en compte de contraintes de disponibilité de ces lignes. La modélisation de ce problème est décrite en détail et illustrée par un exemple restreint. Ce module d'optimisation s'intègre dans un SIAD visant à prendre en compte des conséquences de la solution proposée en amont et en aval dans la chaîne logistique, pour trouver une formulation réaliste du problème d'optimisation.

Mots-clés : Système Interactif d'Aide à la Décision (SIAD), optimisation, ordonnancement, processeurs parallèles hétérogènes, temps de lancement dépendant de la séquence et du processeur, restriction de disponibilité des processeurs

La complexité du problème de l'ordonnancement de la production des engrais sur les lignes de l'atelier de production d'engrais de Jorf, le plus important de l'OCP SA, est décrite en section I. L'analyse de la littérature scientifique (section II) montre que ce problème n'a pas encore été traité dans sa complexité. Nous proposons (section III) deux formulations originales et complémentaires de ce problème, formulations fondées sur la programmation mathématique et illustrées par un exemple fictif de taille réduite. En section IV, nous proposons l'utilisation de ces modèles dans le cadre d'un système interactif d'aide à la décision (SIAD) qui a fait l'objet d'un prototype s'appuyant sur des outils industriels et utilisant un système de coûts fictifs, la comptabilité de gestion de l'OCP n'étant actuellement pas appropriée pour éclairer une prise de décision opérationnelle.

I. Positionnement du problème d'ordonnancement des commandes dans l'atelier d'engrais

L'OCP SA¹ détient un tiers des parts du marché mondial de l'exportation de phosphate sous toutes ses formes. L'usine d'engrais de Jorf, située près de l'océan au bout de la *supply chain* nord de l'OCP, est la plus importante de ce groupe marocain. Elle produit 22 qualités d'engrais sur 7 lignes parallèles (3 lignes identiques « 107 » et 4 lignes identiques « 07 »). Cette variété est amenée à croître dans les années qui viennent et des investissements complémentaires

¹ <http://www.ocpgroup.ma/fr>

sont prévus à brève échéance. Il y a actuellement une spécialisation partielle des lignes dans la production des références d'engrais, 8 qualités seulement pouvant être fabriquée sur une ligne 107 ou sur une ligne 07, ce qui conduit à pouvoir utiliser 28 gammes de production d'engrais. Par ailleurs, l'ordonnancement doit tenir compte d'un programme de maintenance préventive hebdomadaire qui empêche la production pendant que s'effectue la maintenance, sans modifier le temps total de la production en cours.

La demande d'engrais est fortement saisonnière et la production de l'OCP s'effectue essentiellement à la commande. Cette saisonnalité conduit à la fermeture de certaines lignes en période de sous-activité. Chaque commande est caractérisée par une qualité d'engrais à produire, un tonnage et une fenêtre de temps au cours de laquelle la production doit être terminée, ce qui implique de prendre en compte la maintenance des lignes. Le temps de production d'un engrais peut varier d'une ligne à l'autre, en raison de différence de technologie mobilisée et d'une modulation possible des régimes de marche. Il faut en outre tenir compte d'un temps de lancement lorsqu'on lance en production une qualité d'engrais différente de celle précédemment produite. Actuellement le temps de lancement utilisé en ordonnancement est 8 heures, quel que soit l'atelier et quelle que soit la qualité antérieurement produite. Cette hypothèse, qui facilite la détermination manuelle d'un ordonnancement, est génératrice de dépenses inutiles et d'une perte de capacité car elle ne tient pas compte du fait que le nettoyage complet d'une ligne avant le changement de production ne présente pas toujours de réel intérêt si les caractéristiques du nouveau lot à produire sont respectées (« sur-qualité » offerte), comme c'est le cas dans de nombreux systèmes productifs continus. Nous leverons cette hypothèse dans la modélisation proposée. On peut ajouter que, si le processus productif est continu, le problème d'ordonnancement est de type discret puisque le temps de production d'une commande sur une ligne est prédéterminé par ligne et la référence antérieurement produite ; par ailleurs, les étapes de traitement du processus continu de fabrication n'interviennent pas dans le problème d'ordonnancement qui se pose implicitement « en sortie de ligne ».

Actuellement, il n'existe pas d'arbitrage économique explicite pour guider le choix d'un ordonnancement. La comptabilité de gestion de l'OCP répond à des besoins classiques d'évaluation ex post de décisions, avec une maille spatio-temporelle assez grossière. Pour évaluer la pertinence d'un ordonnancement, il faut retraiter ces informations pour ne retenir que des charges uniquement liées à l'ordonnancement retenu, en éliminant toutes celles qui n'en dépendent pas ; les problèmes posés par ce retraitement comptable ne seront pas traités ici mais. l'introduction de ce point de vue économique est une source potentielle d'économies importantes pour le groupe. On peut ajouter que, dans ce type de problème d'optimisation, il existe généralement plusieurs solutions optimales (difficiles à trouver manuellement). Leur connaissance est utile car elles peuvent ne pas avoir le même impact sur l'amont et l'aval de la chaîne logistique, comme nous allons le voir.

Implicitement les caractéristiques de cet ensemble de commandes à ordonnancer respectent les livraisons finales aux clients de ces engrais (chargement des bateaux...) et les contraintes de capacité de stockage de chaque référence d'engrais (la gestion dynamique de ces capacités posant des problèmes méthodologiquement difficiles que l'on n'abordera pas ici). Les décisions de production d'engrais sont donc implicitement subordonnées à celles antérieurement prises pour le stockage des produits finis et leur acheminement vers les clients ; toute solution trouvée au problème d'ordonnancement posé est censée ne pas créer de problèmes en aval. Cette hypothèse implicite de découplage avec l'aval de la chaîne logistique a son pendant en amont de l'atelier

d'engrais (absence de rupture d'approvisionnement), ce qui garantit la faisabilité d'un ordonnancement défini localement. Il faut souligner que l'ordonnancement proposé a une incidence sur le rythme de consommation des matières premières (acide phosphorique 29 et 54, acide sulfurique, ammoniac...) sachant que, pour chacune d'entre elle, il existe une variabilité importante des taux de consommation entre les qualités d'engrais (par exemple, la production d'une tonne d'engrais NPK 14 23 14 5S 1B consomme 9 fois plus d'acide phosphorique 29 que celle d'une tonne d'engrais TSP). Cette hypothèse de découplage n'est pas toujours vérifiée, en raison d'aléas en production ou transport mais aussi des interactions avec les JV (*Joint Ventures*) installées sur le site de Jorf, qui partagent un certain nombre de ressources avec les unités productives possédées en propre par l'OCP. En pratique, une unité de régulation est amenée à intervenir périodiquement pour restaurer la cohérence décisionnelle par un certain nombre de mesures correctrices. Ces interventions ne sont pas liées uniquement à une mauvaise anticipation des conséquences de décisions prises localement ; elles résultent aussi d'inévitables aléas que l'on rencontre en production ou en transport.

Pour limiter ces interventions, il faut évaluer les conséquences d'un ordonnancement proposé en amont et en aval de la *supply chain*. Si celui-ci est infaisable, il faut modifier la formulation initiale du problème (modification de la programmation de la maintenance préventive, par exemple) ou introduire de nouvelles contraintes dans la formulation du problème, pour respecter des décisions déjà prises en amont et en aval. Cette approche ne remet pas en cause le découplage décisionnel actuel ; il vise seulement à garantir la cohérence décisionnelle d'entités relativement autonomes. Son implémentation implique l'utilisation d'un Système Interactif d'Aide à la Décision (SIAD). Elle peut conduire à un élargissement du rôle de l'unité de régulation qui peut intervenir préventivement sur la négociation des contraintes liant les entités productives de la chaîne logistique. La section IV présentera les fondements d'un tel SIAD. La section II est consacrée à une revue de la littérature scientifique du problème d'ordonnancement sur lignes parallèles et la section III présentera les deux modèles d'optimisation intégrés au SIAD.

II. Revue de la littérature

Les problèmes d'ordonnancement sur processus parallèles ont fait l'objet de nombreuses publications scientifiques. Nous avons sélectionné 40 articles récents, publiés dans les meilleures revues, et les avons analysées dans la perspective de mettre en évidence l'apport de la modélisation proposée. Pour ce faire, nous avons établi une grille d'analyse structurée en cinq axes permettant de couvrir toutes les caractéristiques du problème d'ordonnancement : caractéristiques des processeurs, celles des Ordres de Fabrication (OF) à traiter, celles qui dépendent conjointement des processeurs et des OF, le critère d'optimisation retenu et l'objectif scientifique retenu par les auteurs. Examinons successivement ces cinq axes.

II.1 Caractéristiques des processeurs

On définit habituellement un **processeur** comme étant un équipement (machine...) dans lequel est effectuée une opération de transformation requise par un OF. On peut sans problème étendre cette définition à un ensemble de machines travaillant en série (ligne de production...), à la double condition que toutes ces machines soient utilisées pour traiter un OF (on n'est donc pas sur du *flow shop*) et que la production d'un nouvel OF ne puisse débuter qu'une fois achevée

la production de l'OF précédent (le problème traité présentant ces caractéristiques). On s'intéresse ici à l'ordonnancement d'un ensemble OF sur un ensemble de *processeurs*, qualifiés de *parallèles*, un OF ne devant être traité que par un seul de ces processeurs. Deux caractérisations du système productif ont été retenues : l'homogénéité des processeurs et leur disponibilité.

Niveau d'homogénéité des processeurs parallèles

Ces processeurs sont qualifiés d'*identiques* si un OF quelconque peut être traité par un processeur quelconque, avec le même temps de production. Dans le cas contraire, on parlera de processeurs *hétérogènes*. La performance de ces processeurs hétérogènes est définie au moment où se pose le problème de l'ordonnancement, ce qui exclut, dans une formulation étendue du problème d'ordonnancement, le choix d'un régime de marche de machines techniquement identiques-

Niveau de disponibilité des processeurs parallèles

Cette disponibilité recouvre deux aspects. La disponibilité des processeurs peut être restreinte par des opérations de maintenance préventive à réaliser sur des périodes prédéterminées. Le traitement en cours est interrompu pour laisser place à la maintenance, avant de reprendre avec un temps de reprise qui peut ou non être nul. On exclut ici le problème de l'ordonnancement simultané des OF et de la maintenance préventive, problème qui se pose si la préemption n'est pas possible. Par ailleurs, les processeurs peuvent ou non être tous libres au début de l'ordonnancement, un processeur pouvant ne pas être disponible parce qu'il exécute un OF antérieurement lancé ou en raison d'une maintenance en cours.

II.2 Caractéristiques des Ordres de Fabrication

On n'abordera ici que les caractéristiques des OF qui ne dépendent pas des processeurs, (caractéristiques introduites au § II.3), à savoir : la disponibilité des OF, la prise en comptes de contraintes pesant sur les dates de fin de production, préemption, scission possible des OF, prise en compte explicite de contraintes externes au système productif étudié.

Disponibilité des OF

Les OF peuvent être tous prêts à être lancés au début de l'ordonnancement. Dans le cas contraire, certains OF ne peuvent être lancés immédiatement (par exemple pour des raisons de disponibilités de matières premières). Dans les deux cas, le problème d'ordonnancement est défini en univers certain, les caractéristiques des OF à venir étant connues à l'élaboration de l'ordonnancement.

Contraintes pesant sur les dates de livraison

Contrairement à la production pour stock, la production à la commande, contexte privilégié ici, l'ordonnancement des OF doit respecter leurs dates de livraison. Si la formulation du problème autorise le non-respect de ces contraintes, des pénalités pour non-respect peuvent être intégrées dans le critère économique d'évaluation de l'ordonnancement.

Par ailleurs, une production trop précoce peut être préjudiciable (problèmes de stockage des outputs, par exemple), ce qui conduit à contraindre la date de fin de production à se situer dans une fenêtre de temps.

Préemption

Dans certaines formulations de problèmes d'ordonnancement autorise l'arrêt de la production d'une commande en cours pour en exécuter une autre. Cette préemption peut conduire lors de la reprise de l'OF interrompu, à un temps de lancement éventuellement nul. Dans notre cas, la préemption n'est pas envisagée pour privilégier un autre OF mais pour exécuter une opération de maintenance.

Scission possible des OF

Avec des processeurs parallèles, il peut être intéressant de scinder un OF en plusieurs OF susceptibles d'être traités en parallèle, pour pouvoir respecter une date de livraison et/ou améliorer l'utilisation du système productif. Certaines formulations du problème d'ordonnancement automatisent cette scission d'OF. Cette possibilité ne présente pas vraiment d'intérêt dans le problème de l'ordonnancement sur des lignes d'engrais, un partage préalable des grosses commandes à date de livraison proche étant naturellement effectué, plusieurs de ces lots (ou tous) pouvant se succéder sur une même ligne dans la solution optimale.

Prise en compte explicite de contraintes externes au système productif étudié

La formulation classique du problème d'ordonnancement postule implicitement que l'ordonnancement trouvé est sans conséquence sur l'amont (échéanciers de consommation de matières premières ou de composants qui en découlent) et sur l'aval (échéanciers de production alimentant des stocks différenciés). Comme on l'a vu en introduction, cette hypothèse n'est pas toujours fondée, soit parce que des contraintes pèsent sur ces échéanciers, soit parce que certains d'entre eux interviennent dans le coût de l'ordonnancement (tarif d'électricité variable dans le temps, par exemple).

II.3 Caractéristiques liées simultanément aux OF et aux Processeurs

On aborde maintenant des caractéristiques des OF qui dépendent des processeurs sur lesquels ils sont exécutés. Elles concernent la polyvalence des processeurs et la nécessité, dans certains cas de prendre en compte des temps de lancement qui dépendent du processeur et de l'OF qui s'achève.

Polyvalence des processeurs

Avec des processeurs hétérogènes, par définition, le temps de traitement d'un OF dépend du processeur sur lequel il est exécuté. Ces processeurs hétérogènes ne sont pas nécessairement polyvalents : certains processeurs peuvent ne pas être techniquement en mesure de traiter certains OF.

Temps de lancement fonction de l'OF précédent et du processeur

Avant l'exécution d'un OF, un temps de lancement (réglage, nettoyage...) peut être nécessaire ; il peut dépendre du processeur et être intégré dans le temps de traitement s'il est indépendant de l'ordonnancement sur ce processeur. Souvent, il dépend de la référence produite précédemment sur ce processeur et n'est pas le même d'un processeur à un autre. Cette caractéristique complique la détermination de l'ordonnancement optimal.

II.4 Critère d'optimisation

Plusieurs critères permettant d'évaluer un ordonnancement sont proposés dans la littérature. Certains ont une vocation économique, comme le coût ou la marge liée à un ordonnancement, d'autres sont liés à l'efficacité, comme la date d'achèvement de l'ensemble des OF. Ces critères sont listés dans le tableau 1.

II.5 Objectifs de l'article

D'une manière générale, tout article scientifique est écrit pour faire passer un message. Dans le domaine qui nous intéresse ici, trois catégories *non exclusives* d'objectifs peuvent être identifiées.

- **Analyse descriptive de situations complexes.** Quelques articles analysent des cas réels considérés comme représentatifs pour décortiquer des problèmes réels considérés comme mal connus de la communauté scientifique.
- **Modélisation.** La complexité du problème étudié, liée à des combinaisons de caractéristiques moins restrictives que celles habituellement retenues, peut conduire à une formulation précise du problème par la programmation mathématique. Cette modélisation peut être précédée d'une présentation d'une étude de cas considérée comme représentative. Elle peut être aussi suivie d'un exemple numérique, généralement de taille restreinte, pour faciliter la compréhension des relations proposées (c'est du reste une exigence de certaines revues).
- **Algorithme spécifique de résolution numérique.** Une classe de problèmes parfaitement circonscrite peut conduire à proposer une méthode de résolution numérique plus performante que d'autres proposées antérieurement ou à montrer les limites d'une méthode existante.

II.6 Tableau de synthèse des articles analysés

La dernière ligne du tableau de synthèse (tableau 2) permet, par comparaison avec les lignes précédentes, d'établir clairement l'originalité et l'apport des modèles proposés que nous allons détailler en section III. La liste des 40 références bibliographiques utilisées dans ce tableau 2 est donnée en bibliographie (section V) et la liste des critères utilisés dans le tableau 2 est fournie dans le tableau 1

Code	Critère d'optimisation	Code	Critère d'optimisation
C1	Coût de production	C8	Le maximum des retards algébriques d'achèvement des
C2	La date de fin de tous les OF (Cmax)	C9	La somme pondérée des coûts de retards et de précocité (earliness and tardiness costs)
C3	La somme des dates d'achèvement des OF	C10	Le nombre des retards
C4	La somme pondérée des dates d'achèvement des OF	C11	La somme pondérée du nombre des retards
C5	Le maximum retards d'achèvement des Of (Tmax)	C12	Le Pic de consommation
C6	La somme retards d'achèvement des OF	C13	La somme pondérée de fonctions objectifs élémentaires
C7	La somme pondérée des retards d'achèvement des OF		

Tableau 1 : liste des critères d'optimisation utilisés dans les articles analysés

N°article (voir liste en bibliographie)	Objectifs / Apports de l'article			Caractéristiques des processeurs			Caractéristiques des OF								Caractéristiques conjointes des OF et des Processeurs						Critère à minimiser
	Modélisation / Formalisation du problème	Algorithme de résolution spécifique	Utilisation de méthodes générale de résolution	Typologie des processeurs parallèles Identiques (I) ou Hétérogènes (H)	Disponibilité des processeurs		Possibilité d'arrivée différée de certains OF	Dates de livraison des OF			Prise en compte de la consommation des inputs par la production d'un OF	Prise en compte de la contrainte de stockage de la production terminée	Possibilité de la préemption des OF	Prise en compte de la priorité des OF	Possibilité d'interrompre l'exécution des OF	Temps de production d'un OF dépendant du		Temps de lancement		Exécution possible d'un l'OF sur n'importe quel processeur parallèle	
																Dépendant du processeur	Nul	Dépendant du processeur	Dépendant de la séquence		
					Totale au début de l'ordonnement	Prise en compte d'arrêts programmés des processeurs		Ignorées	Prise en compte par des dates au plus tard de fin de par des plages de dates de fin au plus tard												
1		X		H	X	X			X							X	X			X	C9,C13
2		X		I	X	X			X							X		X	X	X	C5
3		X		I		X				X									X	X	C9
4		X		I				X						X			X			X	C4
5	X	X		H	X	X			X					X		X	X			X	C7,C13
6	X	X		H	X	X		X								X		X	X		C2
7	X	X		H	X	X			X							X		X	X		C6
8	X	X		H	X				X					X		X			X	X	C7
9		X		H	X	X			X							X			X	X	C5
10	X	X		H	X	X			X		X					X	X			X	C7,C13
11	X	X		I	X	X	X			X							X				C3
12		X		I	X	X	X		X										X	X	C3,C8
13		X		I	X	X		X											X	X	C1
14	X	X		I				X					X		X		X			X	C2
15	X	X		I	X	X	X		X								X			X	C2
16		X		H	X	X			X							X		X	X	X	C6
17			X	H	X	X			X					X					X	X	C7
18	X	X		I		X		X									X				C13
19	X	X		H	X				X							X				X	C9
20	X	X		H	X	X			X							X		X	X	X	C5
21		X		I				X									X			X	C2
22		X		I				X							X		X			X	C2
23		X		H	X	X			X							X		X	X	X	C5
24	X	X		H	X	X		X								X		X	X	X	C2
25				H																	
26	X	X		H	X	X			X		X					X	X			X	C2,C13
27	X	X		I	X	X		X											X	X	C2
28	X	X	X	H	X	X		X											X		C2
29	X	X		H		X	X		X					X		X			X	X	C7
30	X	X		H	X	X			X					X		X		X	X	X	C2,C7,C13
31		X		I	X	X	X			X				X			X			X	C11
32		X		I	X	X	X		X										X	X	C8
33		X		I	X	X	X		X								X				C9
34	X	X		H	X	X		X								X		X	X	X	C2
35	X	X		H	X	X			X										X	X	C13
36	X	X		H	X	X		X						X		X			X	X	C4
37		X		I	X	X	X		X					X					X	X	C7
38		X		I	X	X			X					X					X	X	C7
39		X		I	X			X						X			X			X	C4
40	X		X	H	X	X			X							X		X	X	X	C9
Nous	X		X	H	X		X			X	X	X			X	X		X	X		C1,C2,C9,C12,C13

Tableau 2 : Grille de synthèse des articles analysés

III. Formulations du problème d'ordonnancement

Après une présentation des caractéristiques générales du problème d'ordonnancement traité, on présentera les notations utilisées (§III.2), avant de présenter notre double formulation du problème d'ordonnancement (§III.3),

III.1 Caractéristiques générales du problème d'ordonnancement traité

Nos deux formulations du problème d'ordonnancement partagent la recherche d'une solution d'affectation des OF aux lignes de production, tenant compte :

- d'un ordonnancement s'appuyant sur un découpage temporel plutôt que sur des dates ponctuelles ; en pratique, le choix d'un découpage horaire est assez pertinent pour le problème étudié mais l'usage d'un découpage plus fin ne pose pas de problème ; la date de fin de production d'un OF correspond à la fin d'une période horaire ;
- de temps de production dépendant de l'atelier produisant la référence d'engrais de l'OF (processeurs parallèles hétérogènes) ; ce temps de production s'exprime par un nombre entier d'heures ;
- du non-chevauchement des OF exécutés dans un atelier ;
- de temps de lancement d'un OF dans un atelier dépendant de l'atelier et du changement de référence à produire ; ce temps de lancement s'exprime par un nombre entier d'heures ;
- de plages de temps imposées pour la date d'achèvement d'un OF, ce qui implique que les OF ne sont pas nécessairement tous disponibles au début de l'ordonnancement ; la borne inférieure correspond au début d'une plage horaire et la borne supérieure, à la fin d'une plage horaire ;
- de l'existence possible de commandes en cours d'exécution au début de l'ordonnancement ;
- de l'existence possible d'une maintenance préventive limitant la disponibilité des lignes, maintenance qui préempte la production de l'OF en cours, sans modification de son temps total de production ; cette préemption n'est possible que pour la seule maintenance préventive ; cette maintenance débute au début d'une tranche horaire et s'achève à la fin d'une autre tranche horaire.

Différents critères d'optimisation sont disponibles mais celui la minimisation des coûts directement liés à l'ordonnancement proposé sont privilégiés. On reviendra sur ces critères au §III.4.10

Deux modèles paramétrés du problème d'ordonnancement peuvent être utilisés, chacun se caractérisant par une définition différente des variables de commande du problème. Les variantes de formulations d'un modèle paramétré découlent du choix du critère d'optimisation ; le second modèle paramétré offre en outre la possibilité d'intégrer des contraintes additionnelles au problème d'optimisation.

- Le premier modèle paramétré utilise des variables de commande binaires ne faisant pas intervenir le temps. Il détermine, pour chaque atelier, le groupe ordonné d'OF à exécuter ; la date de fin d'un OF est définie arbitrairement sur des plages de temps (qui correspondent au concept de marge en ordonnancement de projet). L'intégration, dans la fonction de coûts à minimiser, d'une pénalité liée à l'ordonnancement permet de lever cette indétermination en privilégiant pour chaque OF, un ordonnancement au plus tôt, un ordonnancement au plus

tard ou un ordonnancement se plaçant intermédiaire entre les deux précédents (ce pilotage se faisant par le choix de coefficients de pondération). L'importance de cette pénalité reste suffisamment faible pour que l'ordonnancement trouvé possède le coût minimal. L'analyse des conséquences de la solution trouvée sur l'amont et l'aval de la chaîne logistique peut amener le décideur soit à valider cette solution, soit à en chercher une autre en modifiant le système de pondération retenu, soit à passer à la seconde classe de formulations, plus coûteuse en temps de calcul.

- Le second modèle paramétré utilise les variables de commande binaires de la formulation précédente en y ajoutant une dimension temporelle. L'intégration de la date de fin de production d'un OF dans cette formulation accroît considérablement le nombre de variables, même en restreignant les plages possibles de ces dates de fin ; il s'ensuit qu'elle est plutôt à utiliser à la résolution d'un problème partiel. Cette seconde formulation ne présente d'intérêt que si l'on cherche à contraindre la solution par le maintien de la consommation cumulée de certains composants et/ou de la production cumulée de certaines références d'engrais en dessous de seuils à ne pas dépasser. Elle peut être également utilisée, à défaut d'informations sur l'évolution prévisionnelle de la disponibilité de certains inputs, pour lisser la consommation de ces inputs.

La maintenance est prise en compte, de manière identique dans toutes les formulations, par un repérage temporel relatif, défini pour chaque atelier. Ce repérage temporel relatif neutralise les périodes de maintenance, comme l'illustre le tableau 3.

Repérage absolu	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Repérage relatif atelier 1	1	2	3			4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Repérage relatif atelier 2	1	2	3	4	5	6			7	8	9	10	11	12	13
Repérage relatif atelier 3	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10			11	12	13

Tableau 3 : exemple de repérage temporel

Il s'ensuit que les plages de dates de fin de production d'un OF doivent être définies avec ce repérage temporel relatif ; par exemple, la date de fin « absolue » d'un OF définie à la fin de la 7^e heure correspondra à la date relative 5 pour l'atelier 1, la date relative 6 pour l'atelier 2 et la date relative 7 pour l'atelier 3.

Ces deux classes de formulations ont été implémentées avec le modèleur Xpress IVE, sous la forme de deux modèles paramétrés. Cette paramétrisation permet de choisir le critère d'optimisation et, pour le second modèle paramétré, d'ajouter des contraintes au problème d'optimisation. La formulation générique de chacun des deux modèles paramétrés reste valable quels que soient le nombre de lignes et le nombre de commandes. Par ailleurs, l'utilisation de prédicats pour limiter le nombre de variables présente l'avantage de réduire considérablement la taille des instances de problème. Une analyse des carnets de commandes montre que, sur un horizon de programmation raisonnable, le nombre de commandes à traiter est inférieur à la variété du nombre de références qu'il est possible de produire. En conséquence, la formulation du problème s'appuie sur un tableau de données dans lequel, pour chaque ligne, le temps de production et de lancement d'une commande j , repéré en colonne, dépend de la commande i , qui la précède en production dans cet atelier (le temps de lancement étant nul si ces deux commandes portent sur la même référence d'engrais) ; bien évidemment, cette durée dépend la référence j produite à la suite de la référence i dans la ligne.

III.2 Notations

Constantes

- P Nombre de périodes de l'horizon retenu pour la programmation des commandes.
- L Nombre de lignes dans l'atelier.
- C Nombre de commandes (OF) en cours et à lancer ; dans la suite, terme de commande se substitue à celui d'OF pour des raisons de lisibilité du modèle.
- R Nombre de références d'engrais à produire. Chaque commande porte sur une seule référence ; une même référence peut se retrouver dans plusieurs commandes.

Indices

- p indice de période ($= 1 \dots P$) ; définit le **repérage temporel absolu** du problème d'ordonnancement
- l indice d'une ligne dans l'atelier ($= 1 \dots L$).
- r indice de référence à produire ($= 1 \dots R$).
- c indice de commande :
- $= 1 \dots L$ pour les commandes *en cours d'exécution* dans les lignes de l'atelier d'engrais
 $\rightarrow \mathcal{E}_C'$ ensemble des commandes en cours ;
- $= L+1 \dots C$ pour les *commandes nouvelles à lancer* $\rightarrow \mathcal{E}_C$ ensemble des commandes en cours et à lancer et $\mathcal{E}_C''$ ensemble des commandes à lancer ($\mathcal{E}_C = \mathcal{E}_C' \cup \mathcal{E}_C''$) ;
- $= C+1 \dots C+L$ pour les *commandes fictives* clôturant la production de la ligne $l \rightarrow \mathcal{E}_C'''$ ensemble des commandes à lancer et fictives ;
- c peut être remplacé par i et j pour repérer la commande i qui précède la commande j dans la programmation d'une ligne

Commandes			à lancer et fictives ($\mathcal{E}_{C''}$)					
	en cours et à lancer ($\mathcal{E}_C$)							
	en cours ($\mathcal{E}_{C'}$)		à lancer ($\mathcal{E}_{C''}$)				Fictive	
	1	2	3	4	5	6	7	8

Tableau 4 : exemple d'ensembles de commandes à passer sur 2 lignes de l'atelier

Tableaux de paramètres du problème

- θ_{lij} Tableau de dimension $L \times C \times C$ donnant le Temps de Traitement Total de la commande j ($j \in \mathcal{E}_C$) succédant à la commande i ($i \in \mathcal{E}_C$) dans la ligne l ; ce temps inclut le temps de lancement non nul lorsque ces deux commandes successives ne portent pas sur la même référence d'engrais.

- γ_{lij} Tableau de dimension $L \times C \times (C-L)$ donnant le Coût de Production de la commande nouvelle à lancer j ($j \in \mathcal{E}_C^m$) succédant à la commande i en cours ou à lancer ($i \in \mathcal{E}_C$) dans la ligne l .
- ϕ_{lj} Tableau de dimension $L \times C$ donnant le Temps de Traitement Effectif, hors éventuel temps de lancement, de la commande j ($j \in \mathcal{E}_C$) succédant à la commande i ($i \in \mathcal{E}_C$) dans la ligne l .
- ω_{lj} Tableau de dimension $L \times C$ fournissant le débit horaire de consommation d'un input sous contrôle (acide phosphorique, par exemple), par la commande en cours ou à lancer ($j \in \mathcal{E}_C$), dans la ligne l . La généralisation à l'ensemble des inputs ne pose aucun problème mais n'a pas été retenue pour l'instant.
- β_{lj} Tableau de dimension $L \times (C+L)$: booléen valant 1 si la commande j , réelle ou fictive ($j \in \mathcal{E}_C \cup \mathcal{E}_C^m$), peut être produite par la ligne l , et 0 dans le cas contraire.
- π_{lp} Tableau de dimension $L \times P$ définissant le **repérage temporel relatif** de la ligne l : il détermine la période relative de production de la ligne l en éliminant l'incidence des plages de maintenance, à partir des périodes d'ouverture des lignes de l'atelier d'engrais (repérage temporel absolu) ; à la période p , la ligne l en sera à sa π_{lp} période de travail depuis le début du problème d'ordonnancement dans cette ligne. L'absence de maintenance est un cas particulier dans lequel $\pi_{lp} = p, \forall l$, c'est pourquoi on n'introduira que des modélisations intégrant la maintenance.
- ψ_{lp} Tableau de dimension $L \times P$ définissant les périodes d'arrêt (maintenance ou autre raison) d'une ligne, par un Booléen ($\psi_{lp} = 1$ si arrêt). Ce tableau doit être cohérent avec le tableau π_{lp} . La figure suivante illustre le principe utilisé :

π_{lp}	$p=1$	$p=2$	$p=3$	$p=4$	$p=5$	$p=6$	$p=7$	$p=8$	$p=9$	$p=10$	$p=11$	$p=12$
$l=1$	1	2	3			4	5	6	7	8	9	10
$l=2$	1	2	3	4			5	6	7	8	9	10

ψ_{lp}	$p=1$	$p=2$	$p=3$	$p=4$	$p=5$	$p=6$	$p=7$	$p=8$	$p=9$	$p=10$	$p=11$	$p=12$
$l=1$	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0
$l=2$	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0

Tableaux 5 : exemple de repérage temporel relatif (π_{lp}) lié à la prise en compte des arrêts de maintenance (ψ_{lp})

- I_{lc} Tableau de dimension $L \times C$ définissant la date de livraison au plus tôt (borne Inférieure) de la commande c , cette date étant définie avec le repérage temporel relatif de la ligne l .

S_{lc}	Tableau de dimension $L \times C$ définissant la date de livraison au plus tard (borne Supérieure) de la commande c , cette date étant définie avec le repérage temporel relatif de la ligne l .
α_c	Tableau de dimension $(C-L)$ définissant le coefficient (compris entre 0 et 1) la pour la commande nouvelle c , traduisant une préférence pour un ordonnancement au plus tôt ($\alpha_c = 1$) ou un ordonnancement au plus tard ($\alpha_c = 0$). ou une solution intermédiaire ($0 < \alpha_c < 1$).
R_c	Tableau de dimension C définissant le numéro de référence (pris dans l'ensemble 1 ...R) de la commande c , en cours ou à lancer.
p_{lc}	Tableau de dimension $A \times C$ définissant le débit de production horaire de la commande c , en cours ou à lancer, dans la ligne l , cette information est liée à la référence à produire.
σ_p	Tableau de dimension P définissant stock prévisionnel à la fin de la période p , d'une ressource utilisée en production, hors incidence de l'ordonnancement (c'est une balance prévisionnelle de l'input sous contrôle). La généralisation à toutes les ressources consommées en production est immédiate mais non jugée utile ici.
τ_{rp}	Tableau de dimension $R \times P$ définissant stock prévisionnel de la référence d'engrais r , à la fin de la période p , hors incidence de l'ordonnancement (c'est une balance prévisionnelle de l'output r).
τ_{rp}^*	Tableau de dimension $R \times P$ définissant stock maximal de la référence d'engrais r , à la fin de la période p .

Variables de commande

x_{lij} Utilisé seulement dans le modèle 1. Tableau de dimension $L \times C \times C$: variable binaire valant 1 si la commande j est produite dans la ligne l après la commande i ; la commande i est une commande en cours ou à lancer ($i \in \mathcal{E}_C$) ; la commande j est une commande réelle ou une commande fictive ($j \in \mathcal{E}_C^m$) ; le nombre possible de ces variables binaires est nettement plus faible que le produit des cardinalités de ces ensembles en raison des contraintes de production β_{li} et β_{lj} conduit à conditionner l'existence de la variable x_{lij} à son appartenance à l'ensemble $\mathcal{H}_1$. défini par le prédicat [1] ; ce prédicat est utilisé dans la définition générique du problème d'optimisation en utilisant un modeleur :

$$l, i, j \mid i \in \mathcal{E}_C \wedge j \in \mathcal{E}_C^m \wedge i \neq j \wedge \beta_{li} = 1 \wedge \beta_{lj} = 1 \quad [1]$$

Par convention, la commande en cours c ($c \in \mathcal{E}_C$) est exécutée dans la ligne $l = c$.

x_{lijp} Utilisé seulement dans le modèle 2. Tableau de dimension $L \times C \times C \times P$: variable binaire valant 1 si la commande j ($j \in \mathcal{E}_C^m$) est produite dans la ligne l après la commande i ($i \in \mathcal{E}_C$) et se termine à la fin de la période p . L'usage de bornes des dates

de livraison (I_{lc} et S_{lc}) exprimées avec le repérage temporel relatif d'un atelier, conduit à utiliser dans plusieurs relations la variable $x_{lij\pi_{lp}}$ de préférence à la variable x_{lijp} . L'existence de la variable $x_{lij\pi_{lp}}$ est conditionnée par son appartenance à l'ensemble $\mathcal{H}$ défini par le prédicat [2] :

$$l, i, j, p \mid i \neq j \wedge i \in \mathcal{C} \wedge j \in \mathcal{C}^m \wedge \beta_{li} = 1 \wedge \beta_{lj} = 1 \wedge I_{lj} \leq \pi_{lp} \leq S_{lj} \quad [2]$$

- y_c Tableau de dimension C : date de livraison (fin de période) de la commande c ($c \in \mathcal{C}$). Cette variable est définie avec le repérage temporel relatif de la ligne produisant la commande c . Les dates de livraison des commandes en cours sont connues.
- Pic* Utilisable seulement dans le modèle 2. Pic maximum de la consommation de la ressource étudiée ; utilisable comme fonction-objectif.
- Fin* Date de fin de l'ordonnancement (= la plus tardive des dates de fin des commandes) ; cette information susceptible d'être biaisée par l'existence de la maintenance dans le modèle 1.

III.3 Formulation du problème

Cette formulation est proposée en 10 étapes. Chaque fois que cela a un sens, on a regroupé les relations des modèles 1 et 2 jouant le même rôle. Sachant que l'implémentation de ces modèles est effectuée sur un modeleur (Xpress-IVE), les formulations retenues explicitent les restrictions utilisées à la génération des variables et des contraintes lors de l'instanciation d'un problème d'ordonnancement particulier.

- 1) Affectation d'une commande nouvelle ou fictive ($\mathcal{C}^m$) à une seule ligne, une commande en cours ($\mathcal{C}$) ne pouvant être suivie de plus d'une commande nouvelle, ce qui conduit à la relation [3], pour le modèle 1, et à une seule ligne et une date unique de fin de production, ce qui conduit à la relation [4], pour le modèle 2.

$$\forall j \in \mathcal{C}^m, \sum_{l, i \mid \mathcal{H}_1 = \text{vrai}} x_{lij} = 1 \quad [3]$$

$$\forall i \in \mathcal{C}, \sum_{l, i \mid \mathcal{H}_1 = \text{vrai}} x_{lij} \leq 1$$

$$\forall i \in \mathcal{C}^m, \sum_{l, j, p \mid \mathcal{H}_2 = \text{vrai}} x_{lij\pi_{lp}} = 1 \quad [4]$$

$$\forall i \in \mathcal{C}, \sum_{l, j, j \mid \mathcal{H}_2 = \text{vrai}} x_{lij\pi_{lp}} \leq 1$$

- 2) Le respect des contraintes sur les dates de livraison pour les commandes à lancer ($\mathcal{C}^n$) est garanti par le prédicat [2] qui contraint la création des variables x_{lijp} pour un problème d'ordonnancement donné. Pour le modèle 1, ces contraintes sont respectées par la relation [5], dans laquelle y_j est défini avec le repérage temporel de la ligne l auquel la commande

c est affectée. Rappelons que les dates de livraison des commandes en cours ($\mathcal{E}_C$) sont connues ($\forall j \in \mathcal{E}_C, y_j = I_{jj} = S_{jj}$).

$$\forall j \in \mathcal{E}_C, \sum_{l,i,j | \mathcal{Z}_1 = \text{vrai}} I_{lj} \cdot x_{lij} \leq y_j \leq \sum_{l,i,j | \mathcal{Z}_1 = \text{vrai}} S_{lj} \cdot x_{lij} \quad [5]$$

- 3) Il faut forcer les commandes i et j à être produites dans la même ligne si $x_{lij} = 1$ (modèle 1 $\rightarrow$ relation [6]) ou $x_{lkj}\pi_{lp} = 1$. (modèle 2 $\rightarrow$ relation [7]). On notera que ces relations [6] et [7] adaptent les prédicats [1] et [2].

$$\forall j \in \mathcal{E}_C \wedge \forall l | \beta_{lj} = 1, \sum_{k \in \mathcal{E}_C | k \neq j \wedge \beta_{lk} = 1} x_{lkj} = \sum_{h \in \mathcal{E}_C | h \neq j \wedge \beta_{lh} = 1} x_{ljh} \quad [6]$$

$$\begin{aligned} \forall j \in \mathcal{E}_C \wedge \forall l | \beta_{lj} = 1, \sum_{k \in \mathcal{E}_C | k \neq j \wedge \beta_{lk} = 1} \sum_{p | I_{lj} \leq \pi_{lp} \leq S_{lj}} x_{lkj}\pi_{lp} \\ = \sum_{h \in \mathcal{E}_C | h \neq j \wedge \beta_{lh} = 1} \sum_{p | I_{lj} \leq \pi_{lp} \leq S_{lj}} x_{ljh}\pi_{lp} \end{aligned} \quad [7]$$

- 4) Contraintes de non-chevauchement de deux commandes exécutées successivement dans un même atelier, en tenant compte d'un éventuel temps de lancement. Cette contrainte, qui met en jeu deux ensembles différents $\mathcal{E}_C$ et $\mathcal{E}_C''$ est une adaptation du « classique » Big M, P étant un majorant de tout écart possible entre deux dates de fin de deux commandes, quel que soit l'atelier ou l'ordre de leur réalisation. La relation [8], qui adapte le prédicat [1], est utilisée dans le modèle 1 et la relation [9], qui adapte le prédicat [2], est utilisée dans le modèle 2 :

$$\forall i \in \mathcal{E}_C, j \in \mathcal{E}_C'' | i \neq j, y_j - y_i \geq \sum_{l | \mathcal{Z}_1 = \text{vrai}} \theta_{lij} \cdot x_{lij} - P \cdot (1 - \sum_{l | \mathcal{Z}_1 = \text{vrai}} x_{lij}) \quad [8]$$

$$\forall i \in \mathcal{E}_C, j \in \mathcal{E}_C'' | i \neq j, y_j - y_i \geq \sum_{l,p | \mathcal{Z}_2 = \text{vrai}} \theta_{lij} \cdot x_{lij}\pi_{lp} - P \cdot (1 - \sum_{l,p | \mathcal{Z}_2 = \text{vrai}} x_{lij}\pi_{lp}) \quad [9]$$

- 5) Relation spécifique au modèle 2. La relation [10] lie les variables y_j et x_{lijp} . Cette date de fin de la commande j étant définie avec le repérage temporel relatif de la ligne sur laquelle elle est exécutée, la relation relie y_j et x_{lijp} .

$$\forall j \in \mathcal{E}_C'', y_j = \sum_{l,i,p | \mathcal{Z}_2 = \text{vrai}} \pi_{lp} \cdot x_{lijp} \quad [10]$$

La date de fin de production utilisant le repérage temporel absolu est $\sum_{l,i,p | \mathcal{Z}_2 = \text{vrai}} P \cdot x_{lijp}$.

- 6) Détermination de la date de fin de l'ordonnancement. Son introduction, optionnelle, ne présente de réel intérêt qu'avec le critère de minimisation de la date d'achèvement de l'ensemble des commandes. Les dates y_j étant définies avec un repérage temporel relatif, cette date n'est a priori correcte qu'avec le modèle 2, à condition d'utiliser le repérage temporel absolu défini ci-dessus et d'utiliser le critère [24], ce qui conduit à la relation [11].

$$\forall j \in \mathcal{E}_C'', \sum_{l,i,p | \mathcal{Z}_2 = \text{vrai}} P \cdot x_{lijp} \leq Fin \quad [11]$$

- 7) *Relations optionnelles spécifiques au modèle 2.* La consommation horaire d'une ressource (acide phosphorique, par exemple) par les commandes programmées, C_p est une variable intermédiaire (combinaison linéaire des variables de commande x_{lijp} utilisant les taux horaires de consommation ω_{lj} et tenant compte de l'arrêt de la ligne l si $\psi_{lp} = 1$) définie par la relation [12] dont le premier terme décrit la consommation des commandes en cours et le second, celle des commandes nouvelles. Son introduction, optionnelle, ne présente d'intérêt que si elle intervient dans une optimisation visant à lisser la consommation (voir relations [25] et [26]), dans une contrainte visant à éviter un arrêt de production induit par une rupture de stock de cette ressource (relation [13]) ou dans une contrainte visant à limiter le pic de consommation d'une ressource (voir ci-après). Dans cette contrainte, le cumul de la consommation de la ressource jusqu'à la période p , augmenté du stock prévisionnel de cette ressource hors incidence de l'ordonnancement retenu (σ_p), doit rester positif (ou supérieur à un stock de sécurité).

$$\forall p, C_p = \sum_{l, j \in \mathcal{C}, l=j \wedge \Psi_{lp}=0 \wedge \pi_{lp} \leq S_j} \omega_{lj} + \sum_{l, j \in \mathcal{C}, \beta_{lj}=1 \wedge \Psi_{lp}=0 \wedge \pi_{lp} \leq S_j} \omega_{lj} \cdot \sum_{t \geq p, i \in \mathcal{C}, \beta_{li}=1 \wedge i \neq j \wedge I_j \leq \pi_{lt} < \pi_{lp} + \phi_{ij}} x_{lijp} \pi_{lt} \quad [12]$$

$$\forall p, \sigma_p - \sum_{t \leq p} C_p > 0 \quad [13]$$

Dans ce contexte, le pic de consommation horaire est défini par la relation [14], si l'ordonnancement vise à lisser cette consommation en cherchant à la minimiser (relation [20]), ce qui ne présente d'intérêt que si la relation [13]) ne peut être utilisée (absence de données permettant d'alimenter le tableau σ_p).

$$\forall p, Pic \geq C_p \quad [14]$$

- 8) *Relations optionnelles spécifiques au modèle 2.* La variable intermédiaire P_{rp} définie par la relation [15] établit la production la référence d'engrais r , pendant la période p , est une combinaison linéaire des variables de commande, faisant intervenir le débit horaire p_{lj} de la commande j sur la ligne l , une commande portant sur une seule référence. Cette variable intermédiaire ne présente d'intérêt que si des contraintes de stockage τ_{rp}^* pèsent sur le stock de la référence r , somme de la position de stock hors incidence de l'ordonnancement τ_{rp} et du cumul de la production de cette référence. Cette contrainte est définie par la relation [16].

$$\forall p, r, P_{rp} = \sum_{l, j \in \mathcal{C}, l=j \wedge R_j=r \wedge \Psi_{lp}=0 \wedge \pi_{lp} \leq S_j} p_{lj} + \sum_{l, j \in \mathcal{C}, \beta_{lj}=1 \wedge R_j=r \wedge \Psi_{lp}=0 \wedge \pi_{lp} \leq S_j} p_{lj} \cdot \sum_{t \geq p, i \in \mathcal{C}, \beta_{li}=1 \wedge i \neq j \wedge I_j \leq \pi_{lt} < \pi_{lp} + \phi_{ij}} x_{lijp} \pi_{lt} \quad [15]$$

$$\forall r, p, \sum_{t \leq p} P_{rp} + \tau_{rp} < \tau_{rp}^* \quad [16]$$

- 9) *Détermination du coût de l'ordonnancement.* Pour simplifier la formulation, on utilise variable intermédiaire $CoutOrdo$ définie par la relation [17] pour le modèle 1 et la relation

[18], pour le modèle 2. Cette variable est utilisée par le critère d'optimisation défini par la relation [22].

$$CoutOrdo = \sum_{l,i,j | \mathcal{R}_1 = \text{vrai}} \gamma_{lij} \cdot x_{lij} \quad [17]$$

$$CoutOrdo = \sum_{l,i,j,p | \mathcal{R}_2 = \text{vrai}} \gamma_{lij} \cdot x_{lij\pi_p} \quad [18]$$

Il existe généralement plusieurs ordonnancements minimisant ce coût. On a alors intérêt à ajouter à ce coût une pénalité faible orientant le choix de la solution optimale vers un ordonnancement au plus tôt ou au plus tard (ou un ordonnancement intermédiaire). La solution arbitrairement retenue ici consiste à définir une variante *CoutOrdo_bis* comme la somme de *CoutOrdo* et d'une pénalité *K* pondérée arbitrairement par le coefficient 1%. Cet indicateur *K* est lui-même une somme pondérée des écarts entre les dates de fin l'ordonnancement retenu et les bornes imposées à ces dates de fin. Pour le modèle 1, ce coût est donné par la relation [19] et pour le modèle 2, par la relation [20]. Cette variable *CoutOrdo_bis* sera utilisée par le critère d'optimisation défini par la relation [23]. La relation [21] adapte les principes de la relation [20] au *Pic* pour privilégier, dans ce cadre, un ordonnancement au plus tôt.

$$CoutOrdo_bis = CoutOrdo + 0,01 \cdot \sum_j \left[\alpha_j (y_j - \sum_{l,i | \mathcal{R}_1 = \text{vrai}} I_{lj} \cdot x_{lij}) + (1 - \alpha_j) \cdot (\sum_{l,i | \mathcal{R}_1 = \text{vrai}} S_{lj} \cdot x_{lij} - y_j) \right] \quad [19]$$

$$CoutOrdo_bis = CoutOrdo + 0,01 \cdot \sum_j \left[\alpha_j (y_j - \sum_{l,i,j,p | \mathcal{R}_2 = \text{vrai}} I_{lj} \cdot x_{lij\pi_p}) + (1 - \alpha_j) \cdot (\sum_{l,i,j,p | \mathcal{R}_2 = \text{vrai}} S_{lj} \cdot x_{lij\pi_p} - y_j) \right] \quad [20]$$

$$Pic_Bis = Pic + 0,01 \cdot \sum_j \left[\alpha_j (y_j - \sum_{l,i,j,p | \mathcal{R}_2 = \text{vrai}} I_{lj} \cdot x_{lij\pi_p}) + (1 - \alpha_j) \cdot (\sum_{l,i,j,p | \mathcal{R}_2 = \text{vrai}} S_{lj} \cdot x_{lij\pi_p} - y_j) \right] \quad [21]$$

- 10) Critères utilisables pour l'ordonnancement des commandes sur les lignes de l'atelier d'engrais. Le critère privilégié est celui de la minimisation du coût de l'ordonnancement proposé : on préférera le critère de la relation [23] à celui de la relation [22], pour sélectionner l'ordonnancement considéré comme le plus intéressant dans l'ensemble des ordonnancements à coût minimum. Le très classique critère du *Makespan* (relation [24]), est utilisable mais ne présente pas beaucoup d'intérêt pratique dans un contexte d'un recalcul périodique (tous les deux ou trois jours) de l'ordonnancement pour pouvoir prendre en compte les aléas de production. Le critère du lissage de la consommation (relations [25] et [26]) ne présente d'intérêt que si l'on anticipe une rupture de stock possible et que l'on ne dispose pas des informations permettant d'utiliser la relation [13])

$$\text{Min}_{\text{ordonnancement}}(CoutOrdo) \quad [22]$$

$$\text{Min}_{\text{ordonnancement}}(CoutOrdo_bis) \quad [23]$$

$$\text{Min}_{\text{ordonnancement}}(Fin) \quad [24]$$

$$\text{Min}_{\text{ordonnancement}}(Pic) \quad [25]$$

$$\text{Min}_{\text{ordonnancement}}(Pic_Bis) \quad [26]$$

III.4 Exemples numériques

Pour illustrer l'utilisation des deux modèles, on a complété l'exemple simplifié du tableau 4 portant sur 7 commandes, dont 2 en cours, et on a repris le programme de maintenance du tableau 5 qui concerne les 2 lignes d'engrais mobilisées pour cette production. Ces commandes c portent et 3 références d'engrais. Certaines références ne peuvent pas être produites sur toutes les lignes d'engrais. Les tableaux 6 donnent, pour chaque commande c et chaque ligne l , les dates de livraison au plus tard S_{lc} et au plus tôt I_{lc} , les débits produits p_{lc} et les débits de consommation ω_{lc} d'un input à surveiller et les temps de traitement effectif ϕ_{lc} hors temps de lancement, ceux-ci étant de 2 heures en cas de changement de référence produite sur la ligne. La fonction de coût utilisée est $\gamma_{lij} = 10 \cdot \phi_{aj} + 10 \cdot \beta_{li} \cdot \beta_{lj}$. Par ailleurs, on utilise un système de pondération privilégiant un ordonnancement au plus tôt ($\alpha_j = 1, \forall j$).

ϕ_{lo}	$o=1$	$o=2$	$o=3$	$o=4$	$o=5$	$o=6$	$o=7$
Ligne $l=1$	5	0	12	8	0	6	9
Ligne $l=2$	0	7	16	0	10	8	12

ω_{lo}	$o=1$	$o=2$	$o=3$	$o=4$	$o=5$	$o=6$	$o=7$
Ligne $l=1$	100	0	160	100	0	160	160
Ligne $l=2$	0	80	120	0	80	120	120

Engrais	A	B	C	A	B	C	C
---------	---	---	---	---	---	---	---

p_{lo}	$o=1$	$o=2$	$o=3$	$o=4$	$o=5$	$o=6$	$o=7$
Ligne $l=1$	50	0	64	50	0	64	64
Ligne $l=2$	0	38	48	0	38	48	48

I_{lo}	$o=1$	$o=2$	$o=3$	$o=4$	$o=5$	$o=6$	$o=7$	$o=8$	$o=9$
Ligne $l=1$	7	0	10	15	0	20	30	1	0
Ligne $l=2$	0	9	10	0	20	20	30	0	1

S_{lo}	$o=1$	$o=2$	$o=3$	$o=4$	$o=5$	$o=6$	$o=7$	$o=8$	$o=9$
Ligne $l=1$	7	0	40	40	0	40	40	40	0
Ligne $l=2$	0	9	40	0	40	40	40	0	40

Tableaux 6 : données du problème d'ordonnancement

Exemple d'application du modèle 1

Avec l'utilisation du critère [23], la solution optimale a un coût d'ordonnancement de 574,32, le coût de l'ordonnancement (hors pénalité) étant 574 ; on peut observer un « trou » dans l'utilisation de l'atelier 2, liée au respect de la date de fin au plus tôt (5) de la commande 5. La solution trouvée est $x_{1,1,4} = x_{1,4,6} = x_{1,6,3} = x_{1,3,8} = x_{2,2,5} = x_{2,5,7} = x_{2,7,9} = 1$, les autres valeurs de x_{aij} étant nulles. Le Gantt de l'ordonnancement est donné à la figure 1 et les échéanciers de consommation d'acide et de production d'engrais, à la figure 2. On notera que l'OF 5 ne peut commencer avant la 11^e heure en raison de la contrainte de date au plus tôt et que le pic de consommation est de 280.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35
I	1(A)					1(A)		4(A)								6(C)				3(C)															
II	2(B)						2(B)			5(B)									7(C)																

Figure 1 : Ordonnancement trouvé pour le modèle 1

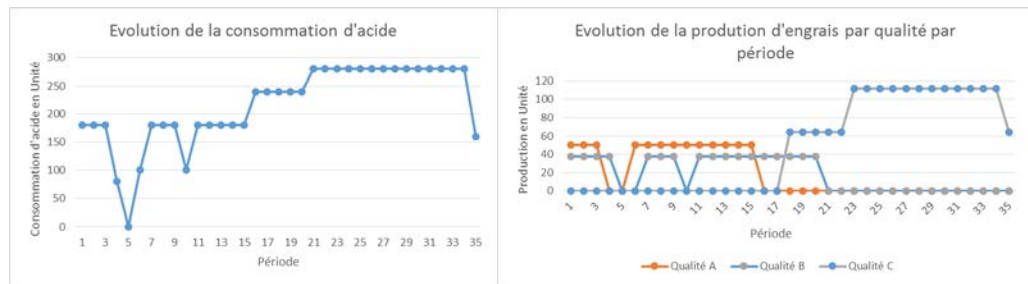


Figure 2 : Échéanciers de la consommation d'acide et de production d'engrais modèle 1

Exemple d'application du modèle 2

Avec l'utilisation du critère [25] (minimisation du pic de consommation avec pénalité), la solution optimale a un coût d'ordonnancement de 584 (accroissement de coût de 10 imputable à un lancement supplémentaire par rapport au modèle précédent), et un pic de consommation tombant 240. La solution trouvée est $x_{1,1,3,21} = x_{1,3,6,27} = x_{1,6,4,37} = x_{1,4,8,38} = x_{2,2,5,22} = x_{2,5,7,39} = x_{2,7,9,40} = 1$, les autres valeurs de x_{lijp} étant nulles. L'utilisation de ce critère conduit à une perte d'efficacité, (mauvaise utilisation de l'atelier 2) et un recul de 5 heures de la date d'achèvement de toutes les commandes. Le Gantt de l'ordonnancement est donné à la figure 3 et les échéanciers de consommation d'acide et de production d'engrais, à la figure 4.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
I		1 (A)				1 (A)				3 (C)												6 (C)								4 (A)									
II		2 (B)					2 (B)				5 (B)														7 (C)														

Figure 3 : Ordonnancement trouvé pour le modèle 2

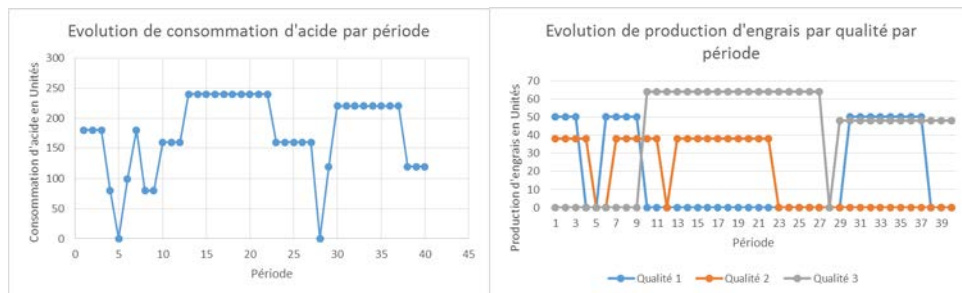


Figure 4 : Échéanciers de la consommation d'acide et de production d'engrais modèle 2

V. Fondements du SIAD proposé

Le SIAD remplit quatre fonctions : a) mise à jour une base de données relationnelle ; b) définition d'un problème d'ordonnancement (incluant le choix du modèle à utiliser) ; c) lancement de Xpress pour chercher la solution optimale de ce problème ; d) exploitation des résultats de l'optimisation (Gantt, graphiques, indicateurs de performance).

La base de données relationnelle a pour objet de stocker des informations structurales avec trois types d'entité (qualités d'engrais, lignes de production, inputs) et trois types d'association (nomenclature, gammes, temps de lancement), les deux dernières incluant des données de coûts. Elle gère également l'ensemble des informations définissant un problème d'ordonnancement avec deux types d'entité (problème, Commandes) et quatre types d'association (ouverture des lignes, programmes de maintenance, commandes à exécuter, commandes en cours). Une interface créée en Java est utilisée pour mettre à jour cette base de données implémentée sous MySQL.

Les deux dernières fonctions, implémentées avec une interface créée en Java, sont exécutables une fois défini un problème d'ordonnancement. L'analyse d'une solution peut conduire à une révision de la formulation du problème (ce qui ramène à une utilisation de la fonction b). Ces mécanismes de rétroaction d'une solution sur la formulation du problème sont au cœur du SIAD. Ils sont détaillés dans la figure 6.

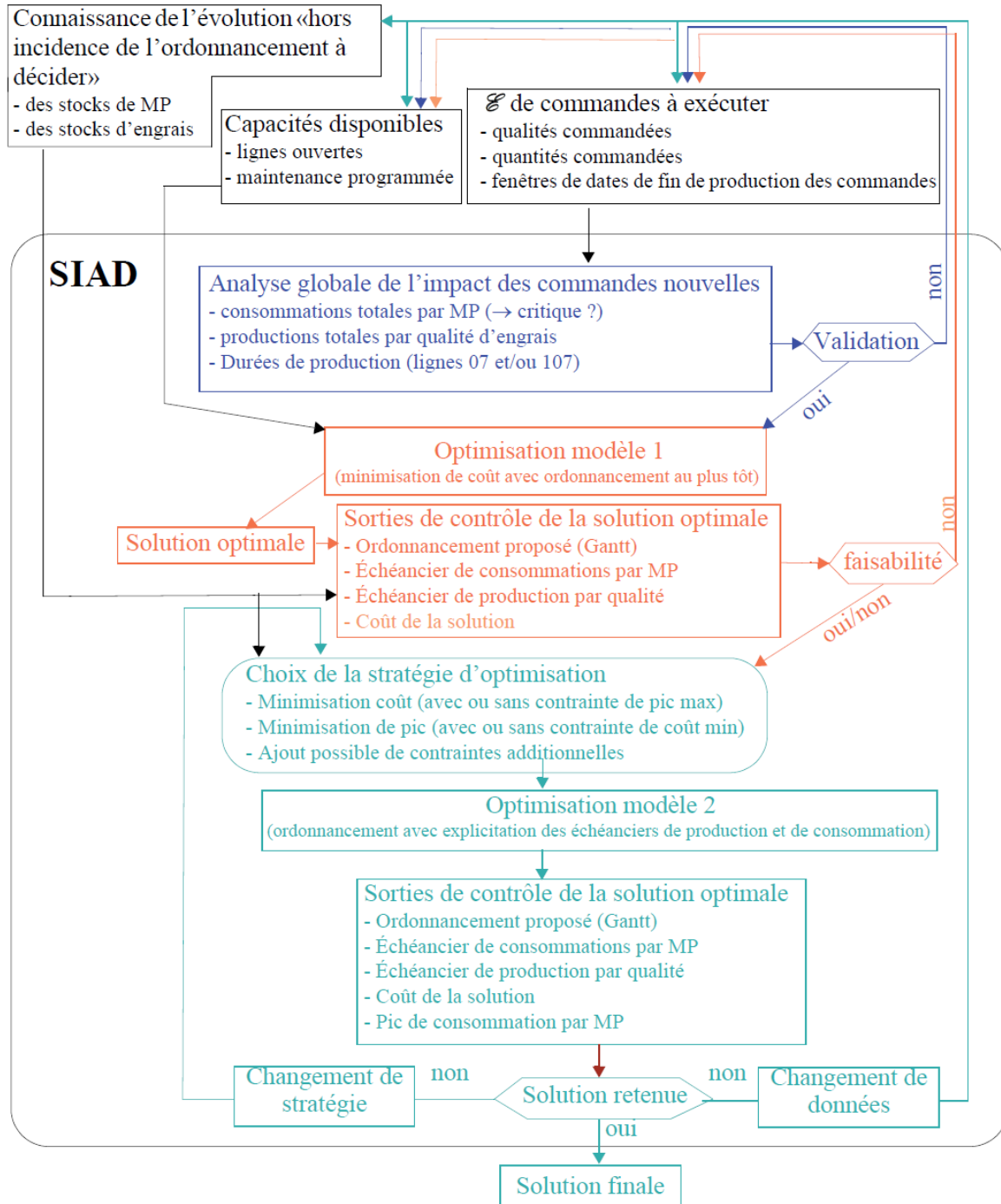


Figure 6: Principes d'utilisation du SIAD d'ordonnancement dans l'atelier d'engrais

VI. Références bibliographiques

1. Adamopoulos, G. i., Pappis, C. p.: Scheduling under a common due-date on parallel unrelated machines. *European Journal of Operational Research* 105, 494–501 (1998)
2. Anghinolfi, D., Paolucci, M.: Parallel machine total tardiness scheduling with a new hybrid metaheuristic approach. *Computers and Operations Research* 34, 3471–3490 (2007)
3. Behnamian, J., Zandieh, M., Ghomi, S.M.T.F.: Due window scheduling with sequence-dependent setup on parallel machines using three hybrid metaheuristic algorithms. *International Journal of Advanced Manufacturing Technology* 44, 795–808 (2010)
4. Bin Fu, Yumei Huo, Hairong Zhao.: Approximation schemes for parallel machine scheduling with availability constraints. *Discrete Applied Mathematics* 159, 1555–1565 (2011)
5. Cao, D., Chen, M., Wan, G.: Parallel machine selection and job scheduling to minimize machine cost and job tardiness. *Computers & Operations Research* 32, 1995–2012 (2005)
6. Chen, J.-F.: Unrelated parallel machine scheduling with secondary resource constraints. *International Journal of Advanced Manufacturing Technology* 26, 285–292 (2005)
7. Chen, J.-F., Wu, T.-H.: Total tardiness minimization on unrelated parallel machine scheduling with auxiliary equipment constraints. *Omega* 34, 81–89 (2006)
8. De Paula, M.R., Mateus, G.R., Ravetti, M.G.: A non-delayed relax-and-cut algorithm for scheduling problems with parallel machines, due dates and sequence-dependent setup times. *Computers and Operations Research* 37, 938–949 (2010)
9. Dong-Won Kim, Kyong-Hee Kim, Wooseung Jang, Chen, F. f.: Unrelated parallel machine scheduling with setup times using simulated annealing. *Robotics and Computer-Integrated Manufacturing* 18, 223–231 (2002)
10. Fang, K.-T., Lin, B.M.T.: Parallel-machine scheduling to minimize tardiness penalty and power cost. *Computers & Industrial Engineering* 64, 224–234 (2013)
11. Gabrel, V.: Scheduling jobs within time windows on identical parallel machines: New model and algorithms. *European Journal of Operational Research* 83, 320–329 (1995)
12. Gacias, B. [b1 b2] (analytic), Artigues, C. [b1 b2] (analytic), Lopez, P. [b1 b2] (analytic).: Parallel machine scheduling with precedence constraints and setup times (English). *Computers & operations research* 37, 2141–2151 (2010)
13. Guinet, A.: Scheduling sequence-dependent jobs on identical parallel machines to minimize completion time criteria. *International Journal of Production Research* 31, 1579–1594 (1993)
14. Hashemian, N., Diallo, C., Vizvári, B.: Makespan minimization for parallel machines scheduling with multiple availability constraints. *Annals of Operations Research* 213, 173–186 (2014)
15. Hidri, L., Gharbi, A., Haouari, M.: Energetic reasoning revisited: application to parallel machine scheduling. *Journal of Scheduling* 11, 239–252 (2008)
16. Jeng-Fung Chen.: Scheduling on unrelated parallel machines with sequence- and machine-dependent setup times and due-date constraints. *International Journal of Advanced Manufacturing Technology* 44, 1204–1212 (2010)
17. Kim, D.-W., Na, D.-G., Frank Chen, F.: Unrelated parallel machine scheduling with setup times and a total weighted tardiness objective. *Robotics and Computer-Integrated Manufacturing*, 12th International Conference on Flexible Automation and Intelligent Manufacturing 19, 173–181 (2003)
18. Lee, C.-Y.: Parallel machines scheduling with non-simultaneous machine available time. *Discrete Applied Mathematics* 30, 53–61 (1991)

19. Lee, H.-T., Yang, D.-L., Yang, S.-J.: Multi-machine scheduling with deterioration effects and maintenance activities for minimizing the total earliness and tardiness costs. *International Journal of Advanced Manufacturing Technology* 66, 547–554 (2013)
20. Lee, J.-H., Yu, J.-M., Lee, D.-H.: A tabu search algorithm for unrelated parallel machine scheduling with sequence- and machine-dependent setups: minimizing total tardiness. *International Journal of Advanced Manufacturing Technology* 69, 2081–2089 (2013)
21. Liao, C.-J., Chen, C.-M., Lin, C.-H.: Minimizing Makespan for Two Parallel Machines with Job Limit on Each Availability Interval. *The Journal of the Operational Research Society* 58, 938–947 (2007)
22. Liao, C.-J., Shyur, D.-L., Lin, C.-H.: Makespan minimization for two parallel machines with an availability constraint. *European Journal of Operational Research, Decision Support Systems in the Internet Age* 160, 445–456 (2005)
23. Lin, S.-W., Lu, C.-C., Ying, K.-C.: Minimization of total tardiness on unrelated parallel machines with sequence- and machine-dependent setup times under due date constraints. *International Journal of Advanced Manufacturing Technology* 53, 353–361 (2011)
24. Lin, S.-W., Ying, K.-C.: ABC-based manufacturing scheduling for unrelated parallel machines with machine-dependent and job sequence-dependent setup times. *Computers & Operations Research* 51, 172–181 (2014)
25. Ma, Y., Chu, C., Zuo, C.: A survey of scheduling with deterministic machine availability constraints. *Computers & Industrial Engineering* 58, 199–211 (2010)
26. Moon, J.-Y., Shin, K., Park, J.: Optimization of production scheduling with time-dependent and machine-dependent electricity cost for industrial energy efficiency. *International Journal of Advanced Manufacturing Technology* 68, 523–535 (2013)
27. Nait Tahar, D., Yalaoui, F., Chu, C., Amodeo, L.: A linear programming approach for identical parallel machine scheduling with job splitting and sequence-dependent setup times. *International Journal of Production Economics, Control and Management of Productive Systems* 99, 63–73 (2006)
28. Obeid, A., Dauze`re-Pe`re`s, S., Yugma, C.: Scheduling job families on non-identical parallel machines with time constraints. *Annals of Operations Research* 213, 221–234 (2014)
29. Pereira Lopes, M.J., de Carvalho, J.M.V.: Discrete Optimization: A branch-and-price algorithm for scheduling parallel machines with sequence dependent setup times. *European Journal of Operational Research* 176, 1508–1527 (2007)
30. Rocha, P.L., Ravetti, M.G., Mateus, G.R., Pardalos, P.M.: Exact algorithms for a scheduling problem with unrelated parallel machines and sequence and machine-dependent setup times. *Computers and Operations Research* 35, 1250–1264 (2008)
31. Rodrigues, R. de F., Dourado, M.C., Szwarcfiter, J.L.: Scheduling problem with multi-purpose parallel machines. *Discrete Applied Mathematics, Combinatorial Optimization* 164, Part 1, 313–319 (2014)
32. Schutten, J. m. j., Leussink, R. a. m.: Parallel machine scheduling with release dates, due dates and family setup times, in: *International Journal of Production Economics*. Presented at the International Journal of Production Economics, Elsevier, pp. 119–125 (1996)
33. Suk Jeong, Kyung Kim.: Parallel machine scheduling with earliness-tardiness penalties and space limits. *International Journal of Advanced Manufacturing Technology* 37, 793–802 (2008)
34. Vallada, E., Ruiz, R.: A genetic algorithm for the unrelated parallel machine scheduling problem with sequence dependent setup times. *European Journal of Operational Research* 211, 612–622 (2011)

35. Van Hop, N., Nagarur, N.N.: The scheduling problem of PCBs for multiple non-identical parallel machines. *European Journal of Operational Research* 158, 577–594 (2004)
36. Weng, M.X., Lu, J., Ren, H.: Unrelated parallel machine scheduling with setup consideration and a total weighted completion time objective. *International Journal of Production Economics* 70, 215–226 (2001)
37. Xi, Y., Jang, J.: Review: Scheduling jobs on identical parallel machines with unequal future ready time and sequence dependent setup: An experimental study. *International Journal of Production Economics* 137, 1–10 (2012)
38. Young Hoon Lee, Pinedo, M.: Scheduling jobs on parallel machines with sequence-dependent setup times. *European Journal of Operational Research* 100, 464–474 (1997)
39. Zhao, C., Ji, M., Tang, H.: Parallel-machine scheduling with an availability constraint. *Computers & Industrial Engineering* 61, 778–781 (2011)
40. Zhu, Z., Heady, R.B.: Minimizing the sum of earliness/tardiness in multi-machine scheduling: a mixed integer programming approach. *Computers & Industrial Engineering* 38, 297–305 (2000)