

CAHIER DU LAMSADE

Laboratoire d'Analyse et Modélisation de Systèmes pour l'Aide à la Décision
(Université de Paris-Dauphine)

Unité Associée au CNRS n° 825

PRESENTATION ET ANALYSE DE NEUF METHODES MULTICRITERES INTERACTIVES

CAHIER N° 42
décembre 1982
2e édition :
février 1987

Ph. VINCKE

SOMMAIRE

	<u>Pages</u>
Summary	I
Résumé	I
1. Introduction	1
2. Notations et définitions	2
3. La méthode STEM de BENAYOUN et TERGNY	3
4. La méthode de AUBIN et NASLUND	6
5. La méthode de GEOFFRION, DYER ET FEINBERG	8
6. La méthode de BOYD	10
7. La méthode de BELENSON et KAPUR	12
8. La méthode de ZIONTS et WALLENIS	13
9. La méthode de BRAGARD	16
10. La méthode de VINCKE	17
11. La procédure du point de mire évolutif de ROY	19
Conclusions	22
Bibliographie	24

DESCRIPTION AND ANALYSIS
OF NINE INTERACTIVE MULTICRITERIA METHODS

SUMMARY

Interactive multicriteria methods have known a very big success since about ten years, essentially in multiobjective linear programming. We present here some of them, which seem to be representative of the literature on this subject.

PRESENTATION ET ANALYSE
DE NEUF METHODES MULTICRITERES INTERACTIVES

RESUME

Les méthodes multicritères interactives ont connu un développement très important depuis une dizaine d'années surtout dans le domaine de la programmation linéaire à objectifs multiples. Nous en présentons ici quelques-unes qui nous semblent représentatives de ce que l'on peut trouver dans la littérature.

1. INTRODUCTION

Les méthodes multicritères interactives ont vu le jour il y a une douzaine d'années et constituent une bonne illustration de la tendance actuelle des Sciences de la Décision, à savoir une évolution vers l'aide à la décision : l'homme d'étude ne va plus "résoudre" les problèmes du décideur de façon isolée avec ce risque permanent d'oublier un facteur important et de voir sa solution rejetée : il va "aider" le décideur à aboutir à une décision satisfaisante. Cela signifie qu'il va aussi bien proposer des solutions qu'informer le décideur sur les conséquences de telle ou telle décision.

En particulier, une méthode interactive est une procédure constituée d'une alternance d'étapes de calculs et d'étapes de dialogues. L'étape de calcul permet à l'homme d'étude de sélectionner une décision qu'il va proposer au décideur. L'étape de dialogue permet

a) à l'homme d'étude d'apporter des informations supplémentaires au décideur et à le rendre conscient des possibilités et des contraintes du problème (apprentissage du décideur) ;

b) au décideur à réagir à ces informations en revoyant éventuellement son point de vue et en apportant des précisions sur ses préférences; celles-ci sont injectées dans le modèle et une nouvelle étape de calcul peut commencer.

Les méthodes multicritères interactives ont été essentiellement définies dans le cadre de la programmation à plusieurs fonctions économiques. Nous verrons cependant que certaines d'entre elles s'appliquent à la programmation convexe.

Nous en présentons ici quelques-unes dont certaines sont déjà anciennes mais qui nous semblent représentatives de ce que l'on peut trouver dans la littérature. La liste des méthodes analysées ici est loin d'être complète.

Le lecteur trouvera dans [10] les références de méthodes interactives qui ne sont pas décrites en détail dans ce texte mais dont les principes, en général, se rapprochent de ceux énoncés ici. Dans [17], on trouvera un tableau comparatif résumant les caractéristiques des principales méthodes. Le lecteur intéressé pourra consulter les références [14], [15], [18] et [24]. Signalons également les travaux de J.P. LECLERCQ ([16]) dans le domaine de la programmation stochastique multicritère.

2. NOTATIONS ET DEFINITIONS

Considérons le programme linéaire à plusieurs fonctions économiques

$$\begin{cases} A X \leq b, \\ X \geq 0, \\ \max C^k X, k = 1, 2, \dots, p, \end{cases}$$

où A , X , b et C^k sont des matrices respectivement de dimensions $m \times n$, $n \times 1$, $m \times 1$ et $1 \times n$.

Nous noterons $\tilde{X}^k$ ($k = 1, 2, \dots, p$) la solution du programme linéaire

$$\begin{cases} A X \leq b, \\ X \geq 0, \\ \max C^k X, \end{cases}$$

et

$$M^k = C^k \tilde{X}^k$$

sera la valeur optimale de la $k^{\text{ème}}$ fonction économique (nous supposons que toutes les fonctions doivent être maximisées, situation à laquelle il est toujours possible de se ramener).

Nous appellerons D l'ensemble des solutions admissibles :

$$D = \{X \in \mathbb{R}^n : AX \leq b, X \geq 0\}$$

et $C(D)$ son image dans l'espace des fonctions économiques :

$$C(D) = \{(Y^1, Y^2, \dots, Y^p) \in \mathbb{R}^p : Y^k = C^k X, X \in D\}.$$

Le point M , de coordonnées $M^1, M^2, \dots, M^p$, sera appelé point idéal pour des raisons évidentes.

Une solution X dans D est efficace s'il n'existe pas de X' dans D telle que

$$C^k X' \geq C^k X, \forall k,$$

l'une des inégalités au moins étant stricte.

THEOREME : $X \in D$ est efficace ssi elle est solution optimale du programme linéaire

$$\begin{cases} AX \leq b, \\ X \geq 0, \\ \max \sum_{k=1}^p \lambda_k C^k X, \end{cases}$$

où $\lambda_k > 0, \forall k$.

Démonstration : voir [12].

3. LA METHODE STEM DE BENAYOUN ET TERGNY ([3], [4])

a) Description de la méthode

La première étape de la méthode consiste à rechercher la solution admissible qui minimise la plus grande différence du type $M^k - C^k X$, ce qui

revient à déterminer, dans l'espace des fonctions économiques, le point admissible le plus proche du point idéal au sens de la distance de Hamming.

Pour ce faire, on résout le programme linéaire suivant :

$$(I) \begin{cases} A X \leq b, \\ X \geq 0, \\ \lambda \geq (M^k - C^k X) \cdot \Pi^k, \\ \text{Min } \lambda, \end{cases}$$

où Π^k sont calculés à partir des données et servent à normaliser les fonctions à optimiser. De façon précise,

$$\begin{cases} \Pi^k = \frac{\alpha^k}{\sum_{j=1}^p \alpha^j}, \\ \alpha^j = \frac{M^j - m^j}{M^j} \cdot \frac{1}{\|C^j\|}, \\ m^j = \min_{X \in D} C^j X, \\ \|C^j\| = \text{norme du vecteur } C^j. \end{cases}$$

D'autres choix peuvent évidemment être faits pour les coefficients Π^k .

La solution trouvée X^1 est alors proposée au décideur qui, s'il n'est pas satisfait, détermine sur quelle fonction économique $C^{\hat{k}}$ il est prêt à faire une concession et quelle quantité maximum $\Delta \hat{k}$ il accepte de perdre sur cette fonction économique (c'est évidemment à l'homme d'étude à faire comprendre au décideur que la seule façon d'améliorer X^1 pour certaines fonctions économiques consiste à faire des concessions sur au moins une autre fonction économique à condition du moins que X^1 soit efficace : voir plus loin).

On ajoute alors, au système (I), les contraintes

$$\begin{cases} C^{\hat{k}} X \geq C^{\hat{k}} X^1 - \Delta \hat{k}, \\ C^k X \geq C^k X^1, \quad \forall k \neq \hat{k}, \\ \Pi^{\hat{k}} = 0 \end{cases}$$

et on résout le programme linéaire ainsi obtenu, ce qui fournit une deuxième solution X^2 qui est traitée comme X^1 .

La procédure s'arrête lorsque la solution proposée au décideur lui semble satisfaisante et, en tout cas, après p étapes puisque la fonction économique sur laquelle une concession a été réalisée n'est plus considérée dans la suite ($\Pi^k = 0$).

b) Analyse de la méthode

1. Le principal reproche que l'on peut faire à cette méthode est que les corrections apportées au modèle sont irrévocables : si, au cours d'une phase de sensibilisation ultérieure, le décideur s'aperçoit qu'il a trop (ou trop peu) concédé sur un critère, il n'a plus la possibilité de revenir en arrière.

2. Il peut être très difficile, pour un décideur, de fixer la quantité Δk qu'il est prêt à perdre sur une fonction économique ; bien qu'on puisse l'aider en l'informant sur les conséquences d'une telle concession (analyse de sensibilité), le décideur ne désire pas ou ne peut pas toujours donner une information aussi précise, a fortiori si elle entraîne des effets irréversibles.

3. La méthode permet d'établir une borne inférieure ou supérieure sur la décroissance ou la croissance de chaque fonction économique lorsqu'on décide de faire décroître l'une d'entre elles d'une unité. Il faut pourtant être conscient du fait que ces bornes ne peuvent pas toujours être atteintes dans le domaine des solutions admissibles et peuvent donc, dans une certaine mesure, fausser le jugement du décideur.

4. La méthode est très avantageuse du point de vue des calculs à effectuer puisqu'elle s'arrête au bout de p étapes de calculs au plus et que chacune d'entre elles comprend la résolution d'un programme linéaire. Il faut évidemment y ajouter les p programmes linéaires nécessaires à la détermination du point idéal.

5. La solution proposée par l'algorithme n'est pas nécessairement efficace : il peut exister une solution admissible donnant la même valeur optimale à λ et dominant la solution trouvée par le programme. C'est un défaut qui peut (et qui doit) être corrigé (cf. [9]).

6. La méthode STEM est certainement la méthode multicritère interactive la mieux connue des utilisateurs ; elle est aisée à comprendre et simple à programmer sur ordinateur ; elle a déjà fait l'objet de nombreuses applications moyennant, dans chaque cas, des modifications dues à la nature du problème et aux besoins du décideur.

4. LA METHODE DE AUBIN ET NASLUND ([1])

a) Description de la méthode

La première étape de la méthode consiste à déterminer, dans l'espace des fonctions économiques, le point admissible le plus proche du point idéal au sens de la distance euclidienne, ce qui revient à résoudre le programme suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} A X \leq b, \\ X \geq 0, \\ \min \sum_{k=1}^p (M^k - C^k X)^2. \end{array} \right.$$

La solution trouvée X^1 est alors proposée au décideur qui, s'il n'est pas satisfait, détermine sur quelle fonction économique $C^{\hat{k}} X$ il est prêt à faire une concession.

On construit alors un nouveau point idéal M_1 tel que

$$\left\{ \begin{array}{l} M_1^k = M^k, \quad \forall k \neq \hat{k}, \\ M_1^{\hat{k}} = C^{\hat{k}} X^1 \end{array} \right.$$

et un nouveau domaine admissible D^1 inclus dans D :

$$D^1 = \{X \in D : C^k X \geq C^k X^1, \forall k \neq \hat{k}\}$$

et on reprend l'étape précédente, c'est-à-dire que l'on résout le programme

$$\begin{cases} AX \leq b, \\ C^k X \geq C^k X^1, \forall k \neq \hat{k}, \\ X \geq 0 \\ \min \sum_{k=1}^p (M_1^k - C^k X)^2 ; \end{cases}$$

on recommence ensuite avec la solution X^2 de ce programme.

b) Analyse de la méthode

1. Cette méthode a en fait été construite dans un cadre plus général que la programmation linéaire. Le lecteur intéressé trouvera dans [1] des commentaires sur les hypothèses à faire sur l'ensemble des solutions admissibles et sur les fonctions économiques.
2. La convergence de la méthode est démontrée dans [7].
3. La méthode présente un inconvénient important : à chaque étape, le domaine des solutions admissibles est réduit en fonction du point que l'on vient de trouver en fixant des bornes inférieures sur toutes les fonctions économiques. Cette opération a pour effet d'exclure des solutions que le décideur pourrait très bien trouver satisfaisantes puisqu'elles ne sont pas dominées par d'autres.
4. L'information demandée au décideur dans la phase de dialogue est moins exigeante que la méthode STEM, ce qui constitue un avantage.
5. La phase de calculs se traduit par la résolution, à chaque étape, d'un programme à contraintes linéaires et à fonction économique quadratique.
6. Les solutions proposées au décideur sont efficaces.

5. LA METHODE DE GEOFFRION, DYER ET FEINBERG ([11], [13])

a) Description de la méthode

Cette méthode a été construite dans le cadre général de la programmation convexe et s'applique évidemment à la programmation linéaire. Elle suppose l'existence d'une fonction d'utilité $U(f_1(X), \dots, f_p(X))$, où $f_1, f_2, \dots, f_p$ sont les fonctions économiques à maximiser et X parcourt l'ensemble D des solutions admissibles. Cette fonction d'utilité n'est pas connue explicitement et l'algorithme va consister en un dialogue avec le décideur de manière à réunir des informations sur U . D est supposé convexe et compact et U est différentiable et concave sur D .

Soit X^k la solution obtenue à la $k^{\text{ème}}$ itération (X^1 étant arbitraire). La meilleure direction issue de X^k , au sens de la fonction U , est déterminée par le point Y , dans D , qui maximise

$$\text{grad}_X U[f_1(X^k), \dots, f_p(X^k)] \cdot Y$$

ou encore

$$\sum_{j=1}^p \frac{\frac{\partial U}{\partial f_j}(X^k)}{\frac{\partial U}{\partial f_1}(X^k)} \cdot \text{grad}_X f_j(X^k) \cdot Y.$$

Cette direction peut donc facilement être déterminée à condition de connaître les quantités

$$w_j^k = \frac{\frac{\partial U}{\partial f_j}(X^k)}{\frac{\partial U}{\partial f_1}(X^k)}.$$

w_j^k est le taux de substitution entre les fonctions économiques 1 et j au point X^k : il caractérise la variation du j^{e} critère qui compense,

pour la fonction d'utilité U , une variation de 1 unité sur le 1^e critère lorsqu'on se place au point X^k .

DYER ([11]) a construit une procédure interactive permettant, à partir des réactions du décideur face à des comparaisons ordinales, de trouver des approximations des w_j^k : le principe en est le suivant. On présente au décideur le point A de coordonnées

$$f_1(X^k), f_2(X^k), \dots, f_j(X^k), \dots, f_p(X^k)$$

et le point B de coordonnées

$$f_1(X^k) + \Delta_1^k, f_2(X^k), \dots, f_j(X^k) - \Delta_j^k, \dots, f_p(X^k)$$

où Δ_1^k et Δ_j^k sont des perturbations choisies arbitrairement suffisamment petites par rapport aux $f_1(X^k)$ et $f_j(X^k)$. Si le décideur préfère A à B , on fait décroître Δ_j^k ; s'il préfère B à A , on augmente Δ_j^k . On procède de la sorte jusqu'à ce qu'on trouve un point B^* correspondant à une quantité $(\Delta_j^k)^*$ tel que le décideur soit indifférent entre A et B^* et on définit :

$$w_j^k = \frac{(\Delta_j^k)^*}{\Delta_1^k}.$$

Il reste alors à déterminer, dans la direction

$$d = Y - X^k,$$

le meilleur point pour U . Cela revient à trouver la valeur t , entre 0 et 1, qui maximise

$$U[f_1(X^k + t d), \dots, f_p(X^k + t d)].$$

GEOFFRION préconise de présenter au décideur un graphique représentant les variations de $f_1, f_2, \dots, f_p$ en fonction de t et de lui faire choisir la valeur de t au vu de ce graphique.

On a ainsi déterminé le point x^{k+1} à partir duquel la procédure reprend.

b) Analyse de la méthode

1. Cette méthode repose sur l'hypothèse restrictive selon laquelle les préférences du décideur peuvent être représentées au moyen d'une fonction.

2. L'information demandée au décideur, à savoir les taux de substitution, est très riche ; il n'est pas évident que le décideur pourra répondre aux questions qu'on lui pose. De plus, les points B qui sont présentés au décideur ne correspondent pas nécessairement à des solutions admissibles, ce qui peut fausser le jugement du décideur.

3. La détermination de la valeur du paramètre t au moyen du graphique représentant les variations des fonctions économiques ne nous semble pas non plus chose aisée pour un décideur.

4. Les phases de calcul ne sont pas compliquées, surtout en programmation linéaire.

6. LA METHODE DE BOYD ([5])

a) Description de la méthode

Les hypothèses sont les mêmes que dans la méthode de GEOFFRION et DYER. L'auteur démontre que, dans ces conditions, la solution x^* maximise, dans D , la fonction

$$U[f_1(x), f_2(x), \dots, f_p(x)]$$

ssi elle maximise

$$\sum_{k=1}^p w_k^* f_k(x)$$

où

$$w_k^* = \frac{\frac{\partial U}{\partial f_k}(X^*)}{\frac{\partial U}{\partial f_1}(X^*)}.$$

La solution est donc construite par approximations successives. On choisit une solution X^0 dans D et on maximise, dans D , la fonction

$$\sum_{k=1}^p w_k^0 f_k(X)$$

où

$$w_k^0 = \frac{\frac{\partial U}{\partial f_k}(X^0)}{\frac{\partial U}{\partial f_1}(X^0)}$$

sont les taux de substitution évalués comme dans la méthode de GEOFFRION et DYER. Soit X^1 la solution obtenue. Si $X^1 = X^0$, on a la solution cherchée en vertu du résultat énoncé ci-dessus. Sinon, on construit les quantités

$$\bar{w}_k = \lambda w_k^1 + (1 - \lambda) w_k^0$$

où

$$w_k^1 = \frac{\frac{\partial U}{\partial f_k}(X^1)}{\frac{\partial U}{\partial f_1}(X^1)}$$

et où λ est arbitrairement choisi dans l'intervalle $[0, 1]$. Soit X^2 la solution qui, dans D , maximise

$$\sum_{k=1}^p \bar{w}_k \cdot f_k(X).$$

Si X^2 est préférée à X^1 , on reprend la procédure au début en remplaçant X^0 par X^2 . Sinon, on modifie la valeur de λ ci-dessus.

Cet algorithme converge vers la solution qui maximise la fonction U .

b) Analyse de la méthode

Les points 1 et 2 sont identiques à ceux relatifs à la méthode de GEOFFRION et DYER.

3. Dans le cas de la programmation linéaire, les solutions proposées au décideur sont toujours des sommets du polyèdre admissible. Or, de la nature même du problème, il résulte qu'un compromis satisfaisant sera souvent un point situé dans une face de D . Se limiter aux sommets peut donc sembler très restrictif.

7. LA METHODE DE BELENSON ET KAPUR ([2])

a) Description de la méthode

On construit la matrice G , de dimensions $p \times p$, telle que

$$G_{k1} = C^k \tilde{X}^1$$

est la valeur prise par la k^e fonction économique au point $\tilde{X}^1$, solution optimale de la 1^e fonction économique. On considère ensuite G comme la matrice des gains d'un jeu à 2 personnes à somme nulle. Soit λ_k^* , $k = 1, 2, \dots, p$, les probabilités qui caractérisent la stratégie mixte optimale pour le premier joueur dont les stratégies sont représentées par $C^1, C^2, \dots, C^p$. Ces quantités s'obtiennent par la résolution d'un programme linéaire après normalisation de la matrice des gains.

On résout alors le programme linéaire suivant :

$$\begin{cases} A X \leq b, \\ X \geq 0, \\ \max \sum_{k=1}^p \lambda_k^* C^k X. \end{cases}$$

La solution X^* est proposée au décideur qui, s'il n'est pas satisfait, indique la fonction économique $C^j X$ à laquelle il attribue le moins d'importance. On substitue X^* à $\tilde{X}^j$ et on construit une nouvelle matrice G . Après p itérations, le décideur a choisi une des solutions proposées ou bien le problème est déclaré "sans solution satisfaisante".

b) Analyse de la méthode

1. L'interprétation intuitive des opérations effectuée n'est pas du tout évidente, ce qui est gênant lorsqu'il faut présenter la méthode à des utilisateurs.
2. Les solutions présentées au décideur sont toujours des sommets du polyèdre D , ce qui, nous l'avons vu, est très restrictif. L'algorithme risque donc de conduire souvent à la conclusion qu'il n'existe pas de solution satisfaisante.
3. Le rôle du décideur est très restreint et aucune analyse de sensibilité ne l'aide dans ses choix qui sont, par ailleurs, irrévocables.
4. Les phases de calcul ne sont pas trop longues et sont très simples à programmer.

8. LA METHODE DE ZIONTS ET WALLENIIUS ([25])

a) Description de la méthode

Cette méthode consiste à déterminer les coefficients de pondération à attribuer aux fonctions économiques de manière à refléter au mieux les préférences du décideur.

On commence par résoudre le programme linéaire

$$\left\{ \begin{array}{l} A X \leq b, \\ X \geq 0, \\ \max \sum_{k=1}^p \lambda_k C^k X \end{array} \right.$$

où les λ_k sont des coefficients de pondération choisis arbitrairement.

Pour chaque variable hors-base x_j dans la solution optimale du programme linéaire précédent, on teste si l'introduction de x_j dans la base conduit à un sommet efficace, ce qui se fait par la résolution d'un nouveau programme linéaire. Dans l'affirmative, x_j est appelée variable hors-base efficace.

Pour chaque variable hors-base efficace x_j , on calcule la variation w_{ij} (> 0 ou < 0) de chaque fonction économique $C^i X$ due à une augmentation d'une unité de x_j , ce qui se fait par application des propriétés de l'algorithme du Simplexe. On demande ensuite au décideur s'il est prêt à accepter simultanément cet ensemble de variations $\{w_{ij}\}$. Suivant que la réponse est affirmative ou négative, on introduit la contrainte

$$\sum_{k=1}^p w_{kj} \lambda_k \leq -\varepsilon$$

ou

$$\sum_{k=1}^p w_{kj} \lambda_k \geq \varepsilon$$

où ε est une quantité positive arbitrairement petite. Si le décideur marque de l'indifférence, la contrainte introduite est

$$\sum_{k=1}^p w_{kj} \lambda_k = 0.$$

On calcule ensuite, par la programmation linéaire, un nouvel ensemble de constantes λ_k qui satisfont aux contraintes ainsi construites et à

toutes celles obtenues au cours des itérations précédentes et on recommence la procédure. Celle-ci s'arrête lorsque l'ensemble des λ_k n'évolue plus d'une étape à l'autre.

b) Analyse de la méthode

1. Cette méthode repose sur une hypothèse fondamentale assez restrictive, à savoir que les préférences du décideur peuvent être représentées au moyen d'une "fonction d'utilité" qui est une combinaison linéaire des diverses fonctions économiques, ce qui nous semble contraire à la philosophie des méthodes interactives. Cette hypothèse a pour conséquence que les seuls compromis proposés au décideur sont des sommets du polyèdre.

2. Une autre conséquence de l'hypothèse ci-dessus est que la méthode sera bloquée dès que les réponses du décideur présenteront une contradiction. De façon précise, si le décideur n'est pas constamment cohérent avec la fonction d'utilité supposée préexister, il sera impossible de déterminer des constantes λ_k satisfaisant à toutes les contraintes introduites.

3. Le nombre de programmes linéaires à résoudre est assez important, surtout si le programme contient beaucoup de variables.

4. Il n'est pas évident que le décideur puisse répondre facilement à la question concernant les w_{ij} , surtout si le nombre de fonctions économiques est important.

5. Le fait que le décideur accepte les variations dues à une augmentation d'une unité de x_j (c'est-à-dire qu'il accepte d'effectuer un petit déplacement le long d'une arête du polyèdre) n'implique pas qu'il accepte des variations plus importantes (et notamment un déplacement jusqu'au sommet voisin le long de l'arête choisie).

Remarques

- Le lecteur intéressé trouvera dans [8] une analyse critique de la méthode.

- Des variantes de cette méthode ont été présentées par ZIONTS et WALLENIS, notamment pour résoudre des problèmes multicritères où l'ensemble des solutions possibles est fini (cf. [26]).

9. LA METHODE DE BRAGARD ([6])

a) Description de la méthode

On demande au décideur d'attribuer des poids positifs $\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_p$ à chaque fonction économique et on construit le point

$$Y^0 = \frac{\sum_{k=1}^p \Pi_k \tilde{X}^k}{\sum_{k=1}^p \Pi_k}$$

(rappelons que $\tilde{X}^k$ est la solution qui maximise la $k^{\text{ème}}$ fonction économique dans D). On résout ensuite les programmes

$$\begin{cases} A X \leq b, \\ X \geq 0, \\ C^j X > C^j Y^0, \quad \forall j \neq k, \\ \max C^k X \end{cases}$$

pour toutes les valeurs de k . Soit $\tilde{X}_1^1, \tilde{X}_1^2, \dots, \tilde{X}_1^p$ les solutions obtenues. On construit le point

$$Y^1 = \frac{\sum_{k=1}^p \Pi_k \tilde{X}_1^k}{\sum_{k=1}^p \Pi_k}$$

S'il existe un indice k tel que

$$C^k Y^1 > C^k Y^0,$$

on reprend la procédure en construisant Y^2 à partir de Y^1 de la même façon qu'on a construit Y^1 à partir de Y^0 . Sinon, la solution Y^1 est acceptée.

b) Analyse de la méthode

1. La méthode décrite ci-dessus n'est pas véritablement interactive ; on pourrait évidemment demander au décideur de revoir les poids des fonctions économiques après chaque étape mais cette information nous semble difficile à fournir sans connaître les effets réels des modifications des poids.

2. Chaque étape nécessite la résolution de p programmes linéaires.

3. Les solutions intermédiaires, construites à chaque étape, ne sont pas efficaces.

4. Le domaine des solutions admissibles est réduit à chaque étape en fonction de la solution trouvée ; cela a pour effet d'exclure des solutions qui auraient pu s'avérer satisfaisantes.

5. La méthode est particulièrement simple à expliquer à un décideur, ce qui est loin d'être un désavantage.

10. LA METHODE DE VINCKE ([20])

a) Description de la méthode

La première étape est identique à celle de la méthode STEM : on détermine, par la résolution d'un programme linéaire, le point admissible le plus proche du point idéal au sens de la distance de Hamming. Si le décideur n'est pas satisfait par cette solution, on engage avec lui le dialogue suivant :

- Quelle fonction économique désirez-vous améliorer ?
- ...
- L'amélioration de cette fonction économique entraînera les effets suivants sur les autres fonctions économiques : ... Acceptez-vous ces effets ? Dans l'affirmative, on effectue la modification, ce qui conduit à une nouvelle solution où le dialogue reprend. Dans la négative, on passe à la question suivante :
- Etes-vous prêt à accepter une concession sur une fonction économique et, si oui, laquelle ?
- ...
- Une concession sur cette fonction économique entraînera les effets suivants sur les autres fonctions économiques : ... Acceptez-vous ces effets ?
- ... (→ nouveau compromis éventuel).
- Acceptez-vous de relâcher une contrainte et, si oui, laquelle ?
- Le relâchement de cette contrainte entraînera les effets suivants sur les fonctions économiques : ... Acceptez-vous ces effets ?
- ... (→ nouveau compromis éventuel).
- Désirez-vous être plus strict sur une contrainte et, si oui, laquelle ?
- ...
- Le resserrement de cette contrainte entraînera les effets suivants sur les fonctions économiques : ... Acceptez-vous ces effets ?
- ... (→ nouveau compromis éventuel).

Les effets des modifications proposées s'obtiennent par simple lecture d'un tableau Simplexe ; le calcul d'un nouveau compromis se fait directement à partir du précédent après un éventuel changement de base par application de l'algorithme dual Simplexe. Pour le détail des opérations, nous renvoyons le lecteur à [20]. Pour la programmation de la méthode et la procédure permettant de rendre les solutions efficaces, voir [9] et [10].

b) Analyse de la méthode

1. Cette méthode n'est applicable que dans le cadre de la programmation linéaire car elle se base fortement sur les propriétés de l'algorithme du Simplexe.

2. Le domaine des solutions admissibles peut être modifié en cours de procédure.
3. La méthode nécessite un dialogue constant avec le décideur.
4. Les questions nous semblent peu exigeantes et le décideur connaît les conséquences de ses réponses. D'autre part, il peut toujours revenir en arrière.
5. La procédure s'arrête lorsque le décideur a trouvé une solution satisfaisante ou lorsqu'il s'estime suffisamment informé sur le problème considéré.
6. Les solutions proposées au décideur sont toujours efficaces grâce à la procédure décrite dans [9].

11. LA PROCEDURE DU POINT DE MIRE EVOLUTIF DE ROY ([18], [19])

a) Description de la méthode

La méthode du point de mire évolutif consiste à élaborer, de façon interactive, un ou plusieurs compromis sur la base des préférences locales du (ou des) décideur(s).

C'est un processus itératif où trois sortes de mécanismes s'enchaînent.

- Mécanisme de recherche : Les informations données par le décideur sur ses préférences sont analysées et exploitées pour faire progresser l'élaboration des compromis.

- Mécanisme de réinitialisation : Les résultats auxquels ont abouti les recherches sont traduits dans un langage compréhensible pour le décideur et sont présentés de façon à faire prendre conscience des transactions possibles entre les critères.

- Mécanisme de réaction : Il s'agit, par des questions appropriées, de susciter des réactions précises du décideur (choix d'une solution, seuils minimum sur un critère, ...) de façon à recueillir des informations supplémentaires sur les préférences du décideur ; celles-ci concernent toujours des solutions spécifiées. Ce sont elles qui permettent de faire progresser le mécanisme de recherche.

L'enchaînement de ces trois mécanismes est conforme à l'organigramme ci-dessous où α et α' sont des phases de recherche, β et β' des phases de réinitialisation, γ et γ' des phases de réaction.

Le point de mire mis à jour à chaque itération est constamment, pour le décideur, une référence, un point idéal auquel il n'a pas accès mais duquel il voudrait s'approcher.

b) Analyse de la méthode

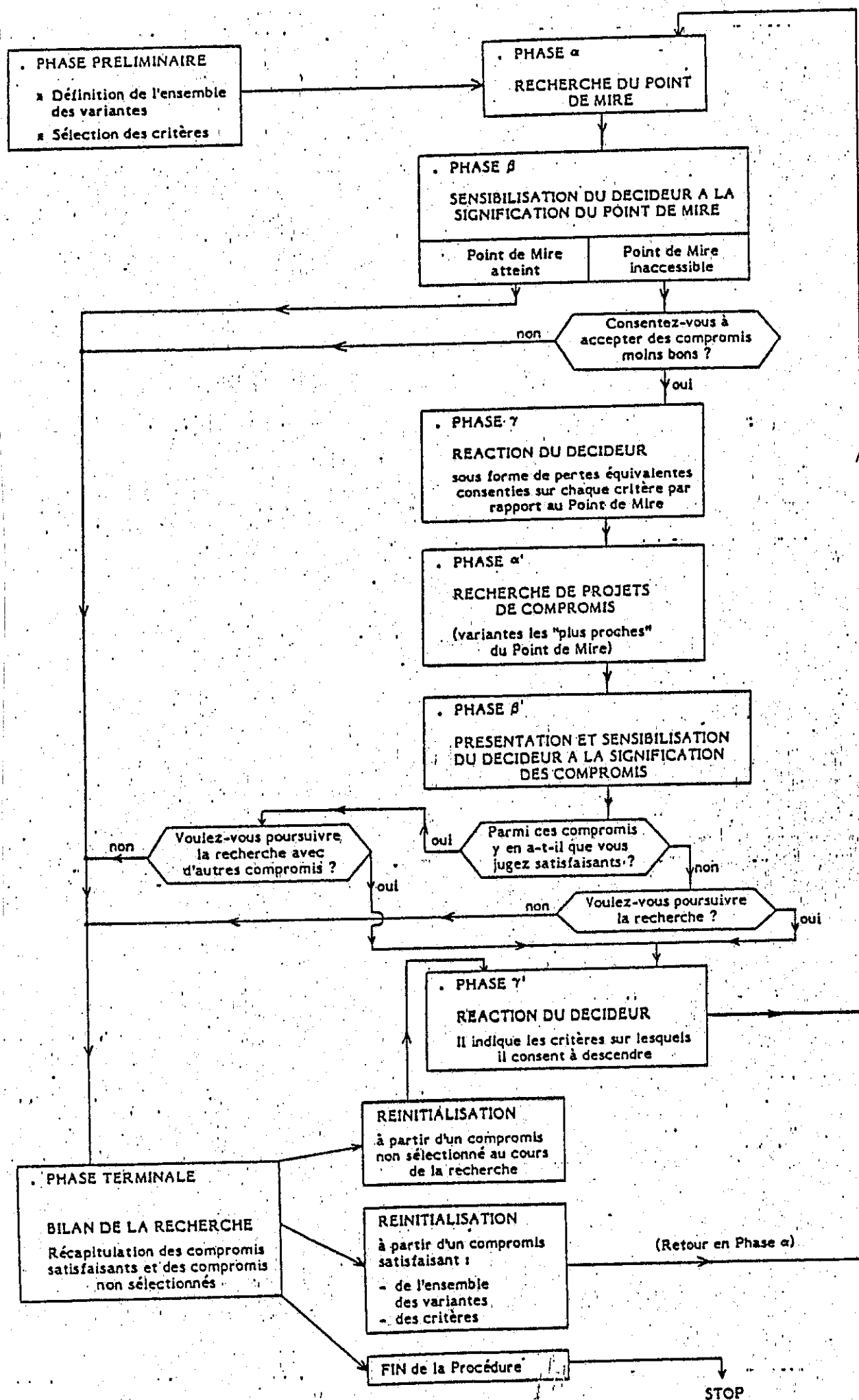
1. Comme dans la méthode précédente, cette procédure permet au décideur un certain apprentissage des transactions qui s'offrent à lui ; cela signifie qu'elle doit l'aider à découvrir les limitations auxquelles il se heurte lorsqu'il souhaite améliorer les performances sur chacun des critères ainsi que les conséquences qui en résultent pour les autres ; cela signifie également qu'il peut changer d'avis en cours de procédure.

2. Cette méthode est évidemment applicable dans un cadre plus général que la programmation linéaire.

3. Elle nécessite aussi un dialogue constant avec le décideur.

4. La principale caractéristique de la méthode est certainement sa souplesse : le décideur évolue très librement dans l'ensemble des solutions.

5. La procédure ne fournit pas une solution prédominante mais plusieurs compromis contrastés compte-tenu du caractère conflictuel des critères : elle ne résoud donc pas complètement le problème de choix. Il est d'ailleurs naturel qu'une procédure systématique aboutisse à un ensemble de solutions difficilement comparables : le choix final est souvent un problème politique.



CONCLUSIONS

On peut, à notre avis, résumer comme suit les qualités à rechercher et les défauts à éviter dans une méthode multicritère interactive.

1. La phase algorithmique (ou de calculs)

Il est inutile, dans ce type de méthode, d'introduire une étape de calculs fort sophistiquée. Le choix des poids, des distances et des autres paramètres éventuels contient nécessairement une part d'arbitraire qui n'est corrigée que par le dialogue avec le décideur.

2. La phase d'information (ou de sensibilisation)

C'est probablement la phase qui est le plus souvent négligée dans les méthodes et qui est pourtant fondamentale pour que le décideur appréhende bien le problème qu'il essaye de résoudre. L'homme d'étude doit faire comprendre au décideur les limites de ce qui lui est permis et doit l'informer au maximum sur les conséquences de ses choix. C'est la raison pour laquelle les analyses de sensibilité, qui permettent d'étudier le voisinage des compromis proposés, nous paraissent primordiales dans ce type de méthodes.

3. La phase d'interrogation (ou d'interaction)

Cette phase concerne les questions que l'homme d'étude va poser au décideur : celles-ci doivent évidemment être à la portée du décideur ; il faut qu'il puisse y répondre en connaissance de cause : elles ne peuvent donc pas être trop exigeantes et trop précises. Elles doivent, si possible, être exprimées à l'aide de termes ou de supports concrets.

4. Le problème de la convergence

Le problème de la convergence ou de l'arrêt d'une procédure interactive est important car il a conditionné l'attitude de beaucoup de chercheurs

dans la construction de leurs méthodes et est à l'origine de la plupart des inconvénients que celles-ci présentent comme, par exemple :

- les décisions irrévocables ;
- la limitation aux seuls sommets du polyèdre admissible ;
- les coupures arbitraires en vue de réduire le domaine des solutions admissibles ;
- l'hypothèse non réaliste de cohérence, dans les réponses du décideur, avec l'existence d'une fonction d'utilité.

Il ne faut pas perdre de vue qu'une méthode interactive a essentiellement pour but d'aider le décideur à trouver un compromis satisfaisant, compromis qu'il n'aurait peut-être pas accepté au début du dialogue mais qui, à un certain moment, lui paraît satisfaisant étant donné l'information qu'il a accumulée au cours de la procédure.

Exiger la convergence mathématique de ces méthodes est donc contraire au principe qui est à leur base. Repasser plusieurs fois par la même solution au cours de la procédure ne constitue pas véritablement un cyclage car, entre les différentes étapes, le décideur qui, dans ce processus, est un apprenti, aura accumulé une série d'informations qui peuvent modifier son point de vue.

L'arrêt de la procédure ne doit pas résulter des étapes de calculs ; il se présentera tout naturellement au cours du dialogue. C'est le décideur qui mettra un terme à la méthode interactive lorsqu'il aura trouvé un compromis satisfaisant ou lorsqu'il s'estimera suffisamment informé.

BIBLIOGRAPHIE

Cette bibliographie ne reprend, à quelques exceptions près, que les références auxquelles nous faisons allusion dans le texte. Pour des bibliographies plus complètes, nous renvoyons le lecteur à [14], [15], [17], [23] et [24].

- [1] AUBIN J.P., NASLUND B. : "An Exterior Branching Algorithm", European Institute for Advanced Studies in Management, Working Paper 72-42, November 1972.
- [2] BELENSON S.M., KAPUR K.C. : "An Algorithm for Solving Multicriterion Linear Programming Problems with Examples", Operational Research Quarterly, Vol. 24, n° 1, March 1973.
- [3] BENAYOUN R., TERGNY J. : "Critères multiples en programmation mathématique : une solution dans le cas linéaire", RIRO, 3e année, n° V-2, 1969.
- [4] BENAYOUN R., de MONTGOLFIER J., TERGNY J., LARITCHEV O. : "Linear programming with multiple objective functions : Stem method (STEM)", Mathematical Programming, Vol. 1, n° 3, 1971.
- [5] BOYD D. : "A Methodology for Analyzing Decision Problems Involving Complex Preference Assignments", Decision Analysis Group, Stanford Research Institute, Menlo Park, California, 1970.
- [6] BRAGARD L. : "La programmation à objectifs multiples", Revue des Sciences Economiques de l'Université de Liège, 1974.
- [7] CHARLES A.M. : "Exterior Branching Algorithm : A Proof of Convergence", European Institute for Advanced Studies in Management, Working Paper 73-2, January 1973.

- [8] DE SAMBLANCKX S., DEPRAETERE P., MULLER H. : "Critical considerations concerning the multicriterion analysis by the method of Zionts and Wallenius, European Journal of Operational Research, Vol. 10, n° 1, May 1982.
- [9] DESPONTIN M. : "Kwantitatieve Economische Politiek vanuit een besluitvormingsoptiek", Thèse de Doctorat, Faculté des Sciences Economiques, Sociales et Politiques, V.U.B., 1981.
- [10] DESPONTIN M., MOSCAROLA J., SPRONK J. : "A user-oriented listing of multiple criteria decision methods", Centrum voor Statistiek en Operationeel Onderzoek, Vrije Universiteit Brussel, 1981.
- [11] DYER J.S. : "A Time-Sharing Computer Program for the Solution of the Multiple Criteria Problem", Management Science, Vol. 19, n° 12, August 1973.
- [12] GEOFFRION A. : "Proper Efficiency and the Theory of Vector Maximization", Journal of Mathematical Analysis and Applications, 22, 1968.
- [13] GEOFFRION A.M., DYER J.S., FEINBERG A. : "An Interactive Approach for Multi-Criterion Optimization, with an Application to the Operation of an Academic Department", Management Science, Vol. 19, n° 4, December 1972.
- [14] GOICOECHEA A., HANSEN D.R., DUCKSTEIN L. : Multiobjective decision analysis with engineering and business applications, John Wiley and Sons, 1982.
- [15] HWANG C.L., MASUD A.S.M., PAIDY S.R., YOON K. : Multiple objective decision-making - Methods and applications, Springer-Verlag, 1979.
- [16] LECLERCQ J.P. : "Programmation stochastique : une approche multicritère", Cahiers du CERO, Vol. 23, n° 1 (1ère partie) et Vol. 23, n° 2 (2e partie), 1981.

- [17] NASINI A. : Guide pour les recherches futures sur les méthodes interactives pour la résolution de problèmes multicritères, Université de Paris-Dauphine, Mémoire de DEA, 1980.
- [17] NIJKAMP P., SPRONK J. : Interactive multidimensional programming models for locational decisions, Gower Publishing Company, 1979.
- [18] ROY B. : Management scientifique et aide à la décision, Actes du Colloque International IRIA "Informatique, Automatique et Sciences des Organisations", Paris, 1976.
- [19] ROY B. : A conceptual framework for a prescriptive theory of decision-aid, in STARR M.K. and ZELENY M. (eds.) : Multiple Criteria Decision Making, TIMS Studies in the Management Sciences, Vol. 6, North-Holland, 1977.
- [20] VINCKE Ph. : "Une méthode interactive en programmation linéaire à plusieurs fonctions économiques", Revue Française d'Automatique, d'Informatique et de Recherche Opérationnelle, Vol. 10, n° 6, 1976.
- [21] WALLENIOUS J. : "Interactive Multiple Criteria Decision Methods : an investigation and an approach", The Helsinki School of Economics, 1975.
- [21] WALLENIOUS H., WALLENIOUS J., VARTIA P. : An approach to solving multiple criteria macroeconomic policy problems and an application, Université de Paris-Dauphine, Cahier du LAMSADE n° 12, 1978.
- [22] WALLENIOUS J. : "Comparative Evaluation of Some Interactive Approaches to Multicriterion Optimization", Management Science, Vol. 21, n° 12, 1975.
- [23] ZELENY M. : "Linear Multiobjective Programming", Springer-Verlag, 1974.

- [24] ZELENY M. : Multiple Criteria Decision Making, Mac Graw-Hill, 1982.
- [25] ZIONTS S., WALLENIOUS J. : "An Interactive Programming Method for Solving the Multiple Criteria Problem", Management Science, Vol. 22, n° 6, 1976.
- [26] ZIONTS S. : "A Multiple Criteria Decision Making for Choosing among Discrete Alternatives", European Journal of Operational Research, 7, 1981.