CAHIER DU LAMSADE

Laboratoire de Management Scientifique et Aide à la Décision
(Université Paris IX Dauphine)

Un modèle d'aide à la décision
visant à adapter la politique
de personnel aux besoins prévisionnels*

N° 6-1976

A. BILLIONNET

* Communication présentée au Congrès EURO II, Stockolm, 30 nov.-2 déc. 1976.
Ce texte reprend certains des éléments d'une thèse de 3ème cycle soutenue par l'auteur en juin 1976 dont le texte intégral peut être consulté au laboratoire.

RESUME

On peut distinguer trois grands types de préoccupations en matière de gestion prévisionnelle du personnel : la prévision des effectifs nécessair à court et long terme, la définition des politiques de personnel et la gestion courante.

Nous nous intéressons seulement ici à la deuxième de ces préoccupations. Nous essayons en particulier de répondre à la question suivante : étant données la population actuelle et les prévisions de besoins, quelles sont les meilleures politiques de personnel à appliquer en ce qui concerne les promotions et le recrutement.

Nous avons, pour cela, réalisé un modèle permettant de déterminer les mouvements de personnel à effectuer à chaque période afin de satisfaire, au mieux, les besoins prévisonnels.

Un graphe décrit l'organisation étudiée : chaque sommet représente une fonction et chaque arc une possibilité de transition entre deux fonctions

La procédure d'optimisation que nous avons choisie utilise la théorie des flots et en particulier les algorithmes permettant de déterminer, dans un réseau de transport, le flot maximal de coût minimal.

Ce modèle permet également de pouvoir faire face rapidement aux départs imprévus.

Un programme conversationnel et interactif a été mis au point, concernant ce modèle, à la Régie Nationale des Usines Renault.

ABSTRACT

There are essentially three major types of preoccupations in manpower planning : the planning of manpower requirements, at short and long terms, the definition of manpower policies and the daily manpower management.

Our study is mainly concerned with the second of these types. We shall try particularly to answer the following question : given the present day population and the estimated needs, what are the best promotion and recruitement policies ?

We have thus set up a model which will allow the movements of personnel to be fixed at each period of the planning horizon in order to satisfy as much as possible manpower requirements.

A graph describes the organization which we are studying : each vertex is a job and each directed edge is a possible transition from one job to another.

The optimization procedure we have chosen uses the flow theory and particularly the algorithms for minimal cost flow problems.

One could also use this model for the rapid facing of unexpected departures.

A conversational and interactive program has been set up at the Régie Nationale des Usines Renault.

PLAN

UN MODELE D'AIDE A LA DECISION VISANT A ADAPTER LA POLITIQUE DE PERSONNEL AUX BESOINS PREVISIONNELS

INTRODUCTION

Une entreprise moderne ne peut réaliser ses objectifs à court et long terme que si elle est en mesure de disposer d'une certaine quantité de ressources humaines, au moment où il faut et à la place où il faut. La gestion prévisionnelle du personnel permet, dans la mesure du possible, de résoudre le problème.

On peut distinguer trois grands types de préoccupations en matière de gestion prévisionnelle du personnel :

- la prévision des effectifs nécessaires à court et long terme, dans le cadre du système de planification ;
- la définition d'une politique de personnel ; le but de cette politique est de satisfaire au mieux les besoins en personnel tout en tenant compte, d'une part, des aspirations des individus et, d'autre part, de la population initiale et de l'évolution prévisible du marché de l'emploi ;
- la gestion courante; elle correspond à la mise en oeuvre concrète de la politique du personnel.

Nous nous intéressons seulement, ici, à la deuxième de ces préoccupations.

I - PRESENTATION GENERALE DU MODELE

1 - OBJECTIF DU MODELE

Le modèle que nous avons réalisé est destiné à aider les responsables à définir la politique de personnel la mieux adaptée aux besoins prévisionnels, c'est-à-dire à déterminer un plan de recrutements, mutations et promotions visant à satisfaire les besoins de l'entreprise, lesquels sont définis par fonction et par période jusqu'à un certain horizon.

Nous supposons, bien sûr, que l'entreprise a conçu un plan de développement et que, par conséquent, elle est capable d'exprimer ses besoins en personnel au cours de la période de gestion considérée.

Dans l'organisation que nous avons étudiée, la Direction Centrale de l'Après-Vente de la Régie Nationale des Usines Renault, ces besoins prévisionnels peuvent être définis de façon précise par fonction ou type de fonction et par période. En effet, si la Régie décide d'augmenter le nombre de succursales en France en le faisant passer de 50 à 60 en trois ans, une des conséquences de cette décision est que le nombre de "Chefs après-vente de succursales" devra passer de 50 à 60 exactement. De même, si la Régie décide d'étendre son service après-vente à l'étranger dans cinq nouveaux pays, le nombre de "Chef après-vente de territoire" devra augmenter de cinq.

2 - DESCRIPTION DE L'ORGANISATION

Ce modèle s'appuie sur la connaissance rationnelle de l'organisation concernée : recensement des fonctions, filières et possiblités d'évolution en matière de carrières. Ce travail, indispensable, est très long ; il demande une analyse précise de toutes les fonctions que l'on désire prendre en compte. C'est en effet, à partir d'une connaissance approfondie de chaque fonction que les responsables pourront déterminer les possibilités d'évolution du personnel. L'organisation étudiée est représentée par un graphe ; les sommets correspondent aux fonctions et les arcs aux possibilités d'évolution : il y aura un arc entre deux fonctions s'il est possible de passer directement de l'une à l'autre après un perfectionnement éventuel.

Prenons un exemple avec quatre fonctions : F_1, F_2, F_3 et F_4. Supposons que le recrutement puisse seulement se faire dans les fonctions F_1 et F_2 et que les sorties du système ne puissent se faire qu'à partir de la fonction F_4. Supposons également qu'une étude préalable ait déterminé les transitions possibles entre ces quatre fonctions :

F_1 —— F_2 $\quad$ F_2 —— F_3 $\quad$ F_3 —— F_4

F_1 —— F_3 $\quad$ F_2 —— F_4

F_1 —— F_4

l'organisation considérée peut alors être représentée par le graphe suivant :

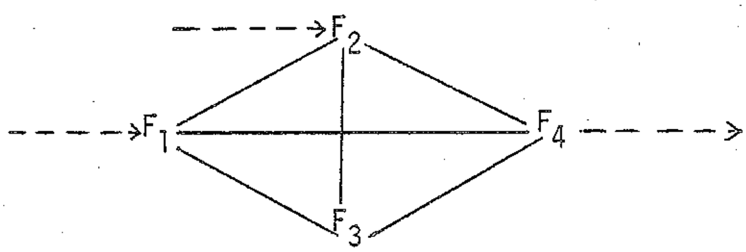


Figure 1

3 - ORIGINALITE DU MODELE

De nombreux modèles ont été étudiés pour déterminer la politique à appliquer en matière de mutations, de promotions et de recrutements. La plupart d'entre eux testent la politique effectivement pratiquée par l'entreprise et permettent ainsi de voir si cette politique est compatible avec la réalisation des objectifs du plan. Pour tester cette politique on applique le modèle de gestion prévisionnelle à la population actuelle ce qui permet de simuler le développement de cette dernière et de déduire les prévisions de population à l'horizon choisi. La comparaison de la population prévue, compte tenu de la politique appliquée, et de la population souhaitée fait, en général, apparaitre des écarts qui entraînent une révision de la politique testée. On recommence cette simulation tant que les écarts entres population prévue et population souhaitée ne sont pas devenus suffisamment faibles. Ce processus peut se révéler assez long.

Nous abordons, dans cette étude, le problème d'une manière tout à fait différente : étant données la population actuelle et la population souhaitée, on détermine directement la "meilleure" politique de mouvements à appliquer.

4 - DETERMINATION INTERACTIVE DE LA POLITIQUE DE PERSONNEL

La politique proposée par le modèle se présente de la façon suivante : nombre de personnes devant passer de la fonction i à la fonction j, à la période k, nombre de personnes à recruter dans la fonction i à la période k et nombre de personnes occupant la fonction i et devant passer dans une fonction extérieure au système à la période k et cela pour toutes les valeurs possibles de i , j et k.

Il arrive parfois que cette politique, tout en respectant les contraintes fixées, ne soit pas réaliste sur un plan pratique, par exemple pour des raisons psychologiques. Il faut alors écarter cette politique en introduisant des contraintes complémentaires et passer une nouvelle fois le modèle qui a été, pour cette raison, programmé de façon simple et sous forme conversationnelle.

5 - PRISE EN COMPTE DES ASPIRATIONS DU PERSONNEL

Les motivations des individus n'ont pas été introduites dans le modèle que nous avons réalisé et cela pour plusieurs raisons. D'une part, la prise en compte, dans un tel modèle, des motivations individuelles ne permettrait plus d'effecteur une gestion prévisionnelle globale ; nous serions obligés de considérer tous les individus séparément. Outre les difficultés théoriques qu'entrainerait cette modification, le modèle deviendrait extrêmement rigide. D'autre part, le recueil des motivations est une opération difficile à réaliser ; sur le plan matériel, elle nécessite, même dans le cas d'une population relativement peu importante, des centaines d'heures d'entretien entre les membres du personnel et les différents responsables. Enfin les aspirations du personnel sont très changeantes à moyen terme. Nous avons donc choisi de ne pas les prendre en compte dans le modèle. Cette tâche est laissée au décideur qui, partant des solutions globales déterminées par le modèle, devra en déduire des solutions individuelles. C'est donc lui qui, à cette étape de décision, tiendra la plus grand compte des aspirations du personnel.

6 - EMPLOI PARTICULIER DU MODELE

Un des emplois particuliers de ce modèle qui est opérationnel à la Direction de l'Après-Vente de la R.N.U.R. est la possibilité de pouvoir faire face rapidement aux départs imprévus. Il suffit en effet d'appliquer le modèle en prenant une seule période comme horizon de gestion. Cette possibilité s'est révélée très intéressante pour l'utilisateur. En effet, prenons l'exemple suivant : le chef du service après-vente en Autriche démissionne, comment le remplacer. Dans ce type de fonction, le recrutement extérieur est pratiquement impossible. Il faudra donc remplacer ce "Chef après-vente" par une personne ayant déjà occupé une fonction similaire, celle de "Chef après-vente" dans un territoire moins important par exemple. Mais cette personne devra être remplacée à son tour, etc ... Les solutions possibles sont généralement multiples et entraînent une cascade de mouvements dans l'organisation. Si le nombre de fonctions considérées est grand, l'utilisation d'un tel modèle est indispensable.

7 - UTILISATION DES METHODES DE LA RECHERCHE OPERATIONNELLE

On utilise, dans ce modèle, certains résultats de la thoérie des flots et notamment les algortihmes permettant de déterminer le flot maximal de coût minimal dans un réseau de transport.

II - EXEMPLES D'APPLICATION DU MODELE

Considérons l'organisation décrite par le graphe présenté en annexe I Les fonctions concernées sont les suivantes :

FONCTION	ABREVIATION
Chef de l'organisation commerciale de la pièce de rechange dans un territoire de type 2	OCPR T_2
Chef après-vente d'un territoire de type 3	CHEF APV T_3
Chef de l'organisation commerciale de la pièce de rechange dans un territoire de type 1	OCPR T_1
Chef après-vente d'un territoire de type 2	CHEF APV T_2
Chef des services pièces de rechange	CHEF SERV PR
Chef après-vente d'un territoire de type 1	CHEF APV T_1
Attaché technique DEE et DAI	ATT TECHN DEE DA
Responsable après-vente en France	RESP APV FRANCE
Attaché technique (Direction des affaires internationales)	ATT TECH DAI

Nous allons présenter trois exemples d'application du modèle. (Ces exemples sont purement imaginaires en ce qui concerne les effectifs initiaux, les besoins prévisionnels et les différentes contraintes).

1 - EXEMPLE N°1

Les effectifs initiaux sont les suivants :

OCPR T_2	5
CHEF APV T_3	6
OCPR T_1	2
CHEF APV T_2	7
CHEF SERV PR	1
CHEF APV T_1	9
ATT TECHN DEE DA	3
RESP APV FRANCE	1
ATT TECH DAI	4

Un des quatre ATT TECH DAI démissionne. Comment le remplacer en effectuant le minimum de mouvements tout en sachant que l'on peut recruter, au maximum, une personne à l'extérieur de l'organisation.

Pour résoudre ce problème on applique le modèle de la façon suivante :

- l'horizon de gestion est de une période
- les effectifs initiaux et les besoins prévisionnels sont :

fonctions	effectifs initiaux	besoins prévisionnels
OCPR T_2	5	5
CHEF APV T_3	6	6
OCPR T_1	2	2
CHEF APV T_2	7	7
CHEF SERV PR	1	1
CHEF APV T_1	9	9
ATT TECH DEE DA	3	3
RESP APV FRANCE	1	1
ATT TECH DAI	3	4

2 - EXEMPLE N°2

Les effectifs initiaux sont les suivants :

OCPR T_2	5
CHEF APV T_3	6
OCPR T_1	2
CHEF APV T_2	7
CHEF SERV PR	1
CHEF APV T_1	9
ATT TECH DEE DA	3
RESP APV FRANCE	1
ATT TECH DAI	4

Supposons qu'un des CHEF APV T_1 démissionne. Comment le remplacer, sachant que le recrutement exterieur est impossible et que les écarts entre effectif souhaité et effectif obtenu n'ont pas la même importance dans chacune des fonctions.

Comme dans l'exemple précédent, on appliquera le modèle avec un horizon de gestion égal à une période. Les effectifs initiaux seront pris égaux à 5, 6, 2, 7, 1, 8, 3, 1, 4 et les besoins prévisionnels à 5, 6, 2, 7, 1, 9, 3, 1, 4.

3 - EXEMPLE N° 3

Dans cet exemple, les effectifs initiaux et les besoins prévisionnels pour les 3 périodes de gestion sont présentés dans le tableau suivant :

	effectif initial	besoins 1ère période	besoins 2ème période	besoins 3è période
OCPR T_2	8	7	7	6
CHEF APV T_3	10	11	11	12
OCPR T_1	4	4	3	3
CHEF APV T_2	9	10	10	11
CHEF SERV PR	4	3	3	2
CHEF APV T_1	7	6	6	6
ATT TECHN DEE DA	2	3	3	3
RESP APV FRANCE	1	2	2	2
ATT TECH DAL	3	4	5	5

Le modèle permet de déterminer le minimum de mouvements à effectuer à chaque période de façon à satisfaire le mieux possible les besoins prévisionnels. Le recrutement n'est pas limité.

III - FORMULATION MATHEMATIQUE

On abordera successivement :

- les données du modèle ;
- les variables de décision ;
- les relations et contraintes ;
- la fonction économique.

I - LES DONNEES DU MODELE

N	nombre de sous-périodes comprises dans la période de gestion considérée;
$G = (X, U)$	graphe représentant l'organisation. Nou supposons que ce graphe comporte n sommets, c'est-à-dire que l'organisatio comporte n fonctions ;
$x_i^{(o)}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$	effectif initial dans la fonction i ;
$b_i^{(t)}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ $(t : 1, 2, \ldots, N)$	effectif souhaité dans la fonction i à la période t ;
$a_{i,j}^{(t)}$ $(i, j) \in U$ $(t = 1, 2, \ldots, N)$	nombre maximal de personnes pouvant passer de la fonction i à la fonctio j, à la période t ;
$e_i^{(t)}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ $(t : 1, 2, \ldots, N)$	nombre maximal de personnes pouvant être recrutées dans la fonction i, à la période t ;
$s_i^{(t)}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ $(t : 1, 2, \ldots, N)$	nombre maximal de personnes pouvant quitter l'organisation à partir de la fonction i, à la période t ;

$\alpha_i^{(t)}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ $(t = 1, 2, \ldots, N)$ — coefficient de pondération concernant l'écart entre l'effectif souhaité et l'effectif obtenu dans la fonction i, à la période t.

2 - LES VARIABLES DE DECISION

$x_{i,j}^{(t)}$ $(i, j) \in U$ $(t : 1, 2, \ldots, N)$ — nombre de personnes devant passer de la fonction i à la fonction j, à la période t ;

$y_i^{(t)}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ $(t = 1, 2, \ldots, N)$ — nombre d'individus à recruter dans la fonction i, à la période t ;

$Z_i^{(t)}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ $(t = 1, 2, \ldots, N)$ — nombre d'individus devant quitter la fonction i et l'organisation à la période t ;

3 - LES RELATIONS ET CONTRAINTES

Ces variables de décision ne sont pas indépendantes ; elles sont liées par des relations, elles sont soumises à des contraintes.

3. 1. Relations de conservation des effectifs.

Pour $i = 1, 2, \ldots, n$ et $t = 0, 1, \ldots, n - 1$ on a la relation

$$x_i^{(t)} + y_i^{(t)} + \sum_{j\in\Gamma^{-1}(i)} x_{j,i}^{(t+1)} - \sum_{k\in\Gamma(i)} x_{i,k}^{(t+1)} - Z_i^{(t+1)} = x_i^{(t+1)}$$

$x_i^{(t)}$ = effectif présent dans la fonction i, à la période t ;

$\sum_{j \in {}^{-1}(i)} x_{j,i}^{(t+1)}$ = nombre de personnes arrivant dans la fonction i (à partir d'une autre fonction de l'organisation) à la période $t + 1$

$\sum_{k\in\Gamma(i)} x_{i,k}^{(t+1)}$ = nombre de personnes quitant la fonction i (pour se rendre dans une autre fonction de l'organisation) à la période $t + 1$

3. 2. Contraintes

- concernant le recrutement dans la fonction i à la période t : $y_i^{(t)} \quad e_i^{(t)}$, $(i = 1, 2, \ldots, n \; ; \; t = 1, 2, \ldots, N)$;
- concernant les mouvements de la fonction i à la fonction à la période t : $x_{i,j}^{(t)} \quad a_{i,j}^{(t)}$, $(i, j) \in U$ et $t = 1, 2, \ldots, N$;
- concernant les sorties du système à partir de la fonction i, à la période t : $Z_i^{(t)} \quad s_i^{(t)}$, $(i = 1, 2, \ldots, n$ et $t = 1, 2, \ldots, N)$.

4 - LA FONCTION ECONOMIQUE

Le modèle que nous présentons ici a pour but d'aider le décideur à déterminer le minimum de mouvements à effectuer à chaque période de façon à minimiser les écarts entre l'effectif souhaité et l'effectif obtenu dans chaque fonction, tout en respectant un certain nombre de contraintes. Nous avons donc choisi la fonction économique suivante :

$$Z = \sum_{i,\,t} \alpha_i^{(t)} \left| x_i^{(t)} - b_i^{(t)} \right| + \varepsilon . M$$

M : nombre total de mouvements effectués au cours de la période de gestion considérée.

La seconde partie de la fonction économique, $\varepsilon . M$, permet d'obtenir les solutions comportant le minimum de mouvements. La quantité M est affectée du coefficient ε car cet objectif est secondaire par rapport à l'objectif principal : satisfaire, au mieux, les besoins en effectifs de chaque fonction, à chaque période. En explicitant cette quantité M, la fonction économique, à minimiser, devient :

$$Z = \sum_{i,\,t} \alpha_i^{(t)} \left| x_i^{(t)} - b_i^{(t)} \right| + \varepsilon . \Big(\sum_{i,\,t} Z_i^{(t)} + \sum_{i,\,t} y_i^{(t)} + \sum_{\substack{(i,\,j) \\ t}} x_{i,}^{(t}$$

IV - LA METHODE D'OPTIMISATION

1 - PRINCIPE

L'exécution du modèle demande, dans sa phase d'optimisation, la résolution du programme mathématique suivant :

$$\begin{aligned} & y_i^{(t)} \leqslant e_i^{(t)} && i = 1, 2, \ldots, n \\ & Z_i^{(t)} \leqslant s_i^{(t)} && t = 1, 2, \ldots, N \\ & x_{i,j}^{(t)} \leqslant a_{i,j}^{(t)} && (i, j) \in U \end{aligned}$$

$$x_i^{(t)} = y_i^{(t+1)} + \sum_{j \in \Gamma^{-1}(i)} {}_{j,i}^{(t+1)} - \sum_{k \in \Gamma(i)} x_{i,k}^{(t+1)} - Z_i^{(t+1)} = x_i^{(t+1)}$$

$$i = 1, 2, \ldots, n$$
$$t = 0, 1, \ldots, N - 1$$

$$x_i^{(t)}, Y_i^{(t)}, Z_i^{(t)}, x_{i,j}^{(t)} \in N$$

$$\text{MIN} \quad z = \sum_{i,t} \alpha_i^{(t)} \left| x_i^{(t)} - b_i^{(t)} \right| + \left(\sum_{i,t} Z_i^{(t)} + \sum_{i,t} y_i^{(t)} + \sum_{\substack{i,j \\ t}} x_{i,j}^{(t)} \right)$$

Dans le problème que nous avons eu à traiter, les effectifs dans chaque fonction sont relativement faibles ; il est donc nécessaire de considérer les variables de décision comme des variables entières. C'est pourquoi nous avons utilisé, dans la méthode d'optimisation, certains résultats de la théorie des flots et notamment un algorithme permettant de déterminer, dans un réseau de transport, le flot maximal de coût minimal.

2 - LE RESEAU DE TRANSPORT ASSOCIE AU MODELE

Nous allons construire, à partir du graphe décrivant l'organisation, un nouveau graphe de la manière suivante : à chaque fonction nous associons N + 1 sommets. On note chaque sommet $F_i^{(j)}$, $i = 1, 2, \ldots, n$ et $j = 0, 1, \ldots, N.$

Il existera un arc de $F_i^{(j)}$ à $F_k^{(l)}$ s'il est possible, pour un individu se trouvant dans la fonction i à la période j, d'occuper, la période suivante, la fonction k à la période l. Nous n'aurons, bien sûr, dans ce graphe, que des arcs du type $F_i^{(j)}$, $F_k^{(j+1)}$.

Nous ajoutons ensuite deux sommets à ce graphe, une entrée E et une sortie S. Nous créons alors les n arcs $(E, F_i^{(0)})$, $i = 1, 2, \ldots, n$ et les n arcs $(F_i^{(N)}, S)$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Enfin, en ajoutant l'arc de retour (S, E) nous avons transformé le graphe des carrières en un réseau de transport (figure 2).

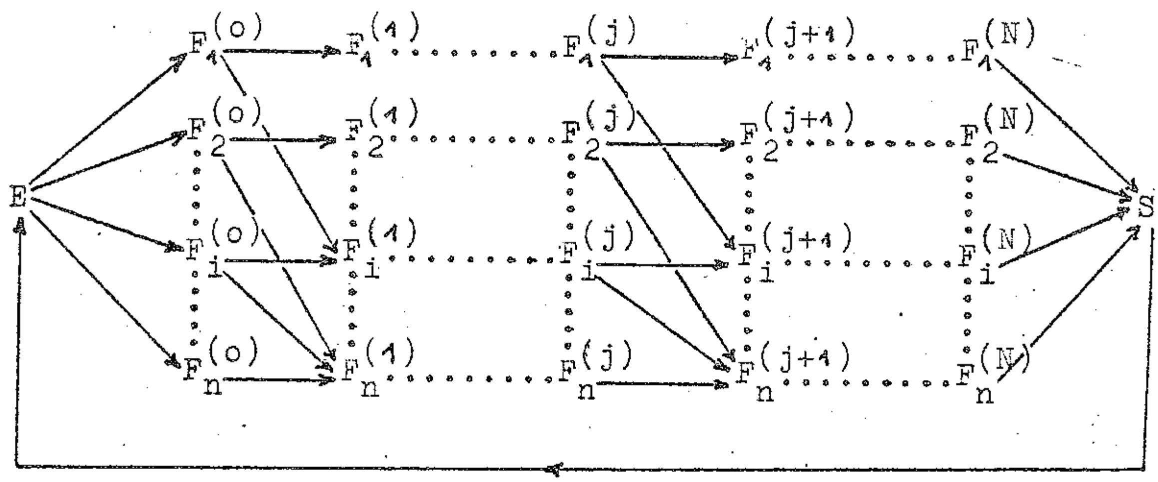


Figure 2

Il reste encore deux types de mouvements à représenter : les embauche et les sorties du système. En ce qui concerne les embauches, on créera un arc (E, R) puis pour toutes les fonctions i où il est possible de recruter des personnes extérieures à l'organisation on ajoutera les N arcs $(R, F_i^{(k)})$, $k = 1, 2, \ldots, N$. De même pour toutes les fonctions i à partir desquelles il est possible de quitter le système, on créera les N arcs $(F_j^{(k)}, S)$, $k = 0, 1, \ldots, N - 1$.

On va ensuite transformer le réseau de façon à faire apparaitre des arcs dont le flux représente l'effectif d'une fonction à une période donnée. On va, pour cela, créer $N \times n$ arcs supplémentaires, chacun de ces arcs étant associé à une fonction, à une période donnée. Il suffit de décomposer chacun des sommets $F_i^{(k)}$, $k = 1, 2, \ldots, N$, du réseau précédent en deux sommets $F_i^{(k)}$, $F_i^{\prime(k)}$ et d'ajouter un arc entre ces deux sommets. Le flux sur cet arc représentera bien l'effectif de la fonction i à la période k. Nous obtenons alors le réseau de la figure 3.

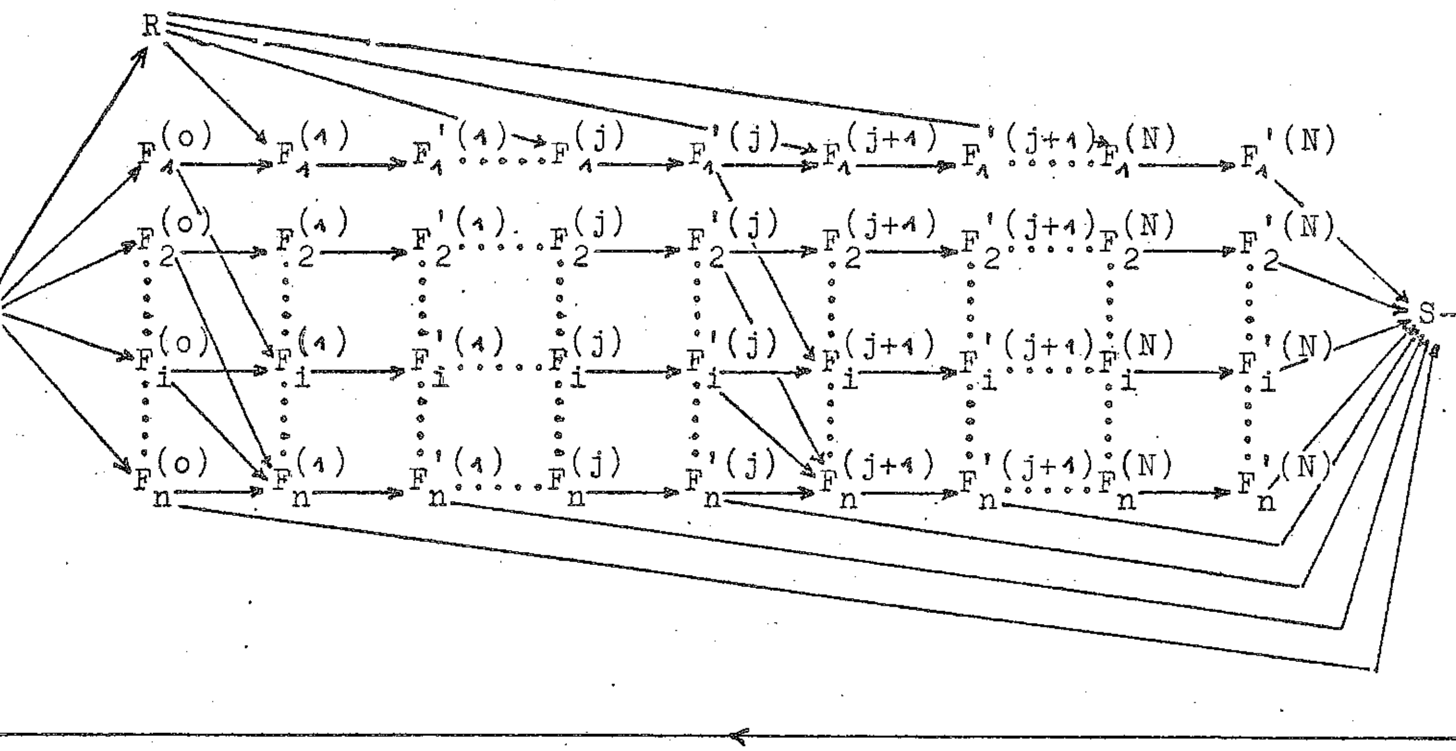


Figure 3

3 - FLOT MAXIMAL DANS LE RESEAU DE TRANSPORT

Donnons une capacité à tous les arcs du réseau incidents extérieurement à l'entrée E. La capacité de l'arc (E, $F_i^{(0)}$), i = 1, 2, ..., n, est égale à l'effectif initial de la fonction i ; la capacité de l'arc (E, R) est égale au nombre maximal de personnes pouvant être recrutées à l'extérieur de l'organisation durant toute la période de gestion.

En attribuant une capacité infinie à tous les autres arcs du réseau, il est alors évident que tout flot maximal dans ce réseau correspond à une évolution possible du personnel au cours des N périodes (et réciproquement). Toutefois, il faut ajouter un arc de R vers S . En effet l'arc (E, R) sera toujours saturé puisqu'on ne s'intéresse qu'au flot maximal dans le réseau. Le flux sur l'arc (R, S) sera égal à la différence entre le nombre maximal d'embauches autorisées et le nombre d'embauches effectivement réalisées.

4 - INTRODUCTION DES CONTRAINTES

Si nous reprenons le problème tel qu'il est posé au paragraphe IV. 1 nous voyons que, en plus des contraintes de conservation d'effectifs, différente contraintes de bornes sont à respecter. Elles se traduiront par l'attribution de capacités aux arcs du réseau :

- limites sur le recrutement : $y_i^{(t)} \quad e_i^{(t)}$. On affectera pour traduire cette contrainte, la capacité $e_i^{(t)}$ à l'arc $(R, F_i^{(t}$
- limites sur les sorties du système : $Z_i^{(t)} \quad s_i^{(t)}$. On affectera la capacité $s_i^{(t)}$ à l'arc $(F_i'^{(t-1)}, S)$. (Dans le cas où $t = 1$ on affectera la capacité $s_i^{(1)}$ à l'arc $(F_i^{(0)}, S)$.
- limites sur les mouvements à l'intérieur du système : $x_{i,j}^{(t)} \quad a_{i,j}^{(t)}$. On affectera la capacité $a_{i,j}^{(t)}$ à l'arc $(F_i'^{(t-1)}, F_j^{(t)})$. (Dans le cas où $t = 1$, on affectera la capacité $a_{i,j}^{(1)}$ à l'arc $(F_i^{(0)}, F_j^{(1)})$.

5 - PRISE EN COMPTE DE LA FONCTION ECONOMIQUE DU MODELE.

Si nous appelons V l'ensemble des arcs du réseau et γ_j, $j = 1, 2, \ldots, p$, les flux sur ces arcs, trouver une politique de personnel revient à déterminer le flot maximal dans ce réseau qui minimise la fonction $\sum_j f_j(\gamma_j)$.

Nous avons trois types de fonctions f_j suivant l'arc considéré :

- soit F l'ensemble des arcs $(f_i^{(k)}, F_i'^{(k)})$, $i = 1, 2, \ldots, n$ et $k = 1, 2, \ldots, N$. Pour $j \in F$, $f_j(\gamma_j) = \alpha_j \gamma_j - b_j$; α_j et b_j dépendent de l'arc considéré. S'il s'agit de l'arc $(F_i^{(k)}, F_i'^{(k)})$, $\alpha_j = \alpha_i^{(k)}$ et $b_j = b_i^{(k)}$.
- soit G l'ensemble formé des arcs incidents extérieurement au sommet E, des arcs $(F_i'^{(N)}, S)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ et de l'arc (R, S).
- soit H l'ensemble des arcs $(F_i^{(0)}, F_i^{(1)})$, $i = 1, 2, \ldots, n$ et $F_i'^{(k)}, F_i^{(k+1)})$, $i = 1, 2, \ldots, n$ et $k = 1, 2, \ldots, N - 1$. Pour $j \in G \cup H$, $f_j(\gamma_j) = 0$.

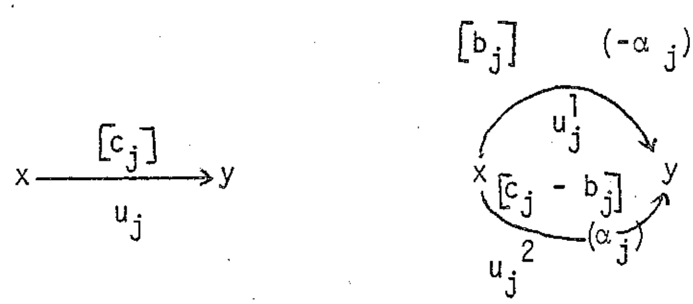
- soit k l'ensemble des autres arcs du réseau. Pour $j \;\; K$, $f_j(\gamma_j) = \varepsilon.\gamma_j$.

La fonction à minimiser peut alors s'écrire :

$$Z = \sum_{j \in F} \alpha_j \left| \gamma_j - b_j \right| + \sum_{j \in K} \varepsilon.\gamma_j$$

Le problème se ramène donc à la recherche du flot maximal de coût minimal dans un réseau de transport. Il existe de nombreux algorithmes permettant de résoudre ce problème lorsque la fonction de coût est linéaire. Ce n'est pas tout à fait le cas dans notre modèle. En effet, pour $j \in F$, cette fonction est seulement linéaire par morceaux. On peut montrer que, dans notre cas, la non-linéarité n'entraîne qu'une complication mineure, la transformation du graphe représentant le réseau en un multigraphe (8).

Soit G_R le réseau de transport. Considérons un arc $u_j (j \in F)$ de G_R. Soit c_j la capacité de cet arc (dans notre cas cette capacité est toujours infinie). Remplaçons u_j par deux arcs u_j^1 et u_j^2 de capacités respectives b_j et $c_j - b_j$ et de coûts respectifs $-\alpha_j$ et α_j. (Dans notre cas, $c_j - b_j$ est infinie).



Soit G_R le multigraphe obtenu à partir de G_R en remplaçant ainsi tous les arcs de l'ensemble F. On peut démontrer que le coût minimal du flot maximal γ dans le réseau G_R est égal au coût minimal du flot maximal γ^* dans le réseau G_R, à une constante près (voir la démonstration en annexe IV).

Notre problème se ramène donc à la recherche du flot maximal sur G_R qui minimise la fonction :

$$Z' = \sum_{j \in F_1} - \alpha_j \gamma_j + \sum_{j \in F_2} \alpha_j \gamma_j + \sum_{j \in K} \varepsilon.\gamma_j$$

(Nous appelons F_1 l'ensemble des arcs u_j^1 et F_2 l'ensemble des arcs u_j^2).

Nous avons utilisé, pour cela, l'algorithme de ROY. Cet algorithme est décrit en annexe III.

Reprenons l'exemple présenté au paragraphe I. 2. Supposons que l'horizon de gestion soit de deux périodes et que les effectifs initiaux et les besoins prévisionnels soient les suivants :

	F_1	F_2	F_3	F_4
Effectif initial	10	6	7	3
Besoins à la fin de la 1ère période	7	4	5	7
Besoins à la fin de la 2ème période	2	4	4	13

Le réseau de transport correspondant est représenté figure 4.

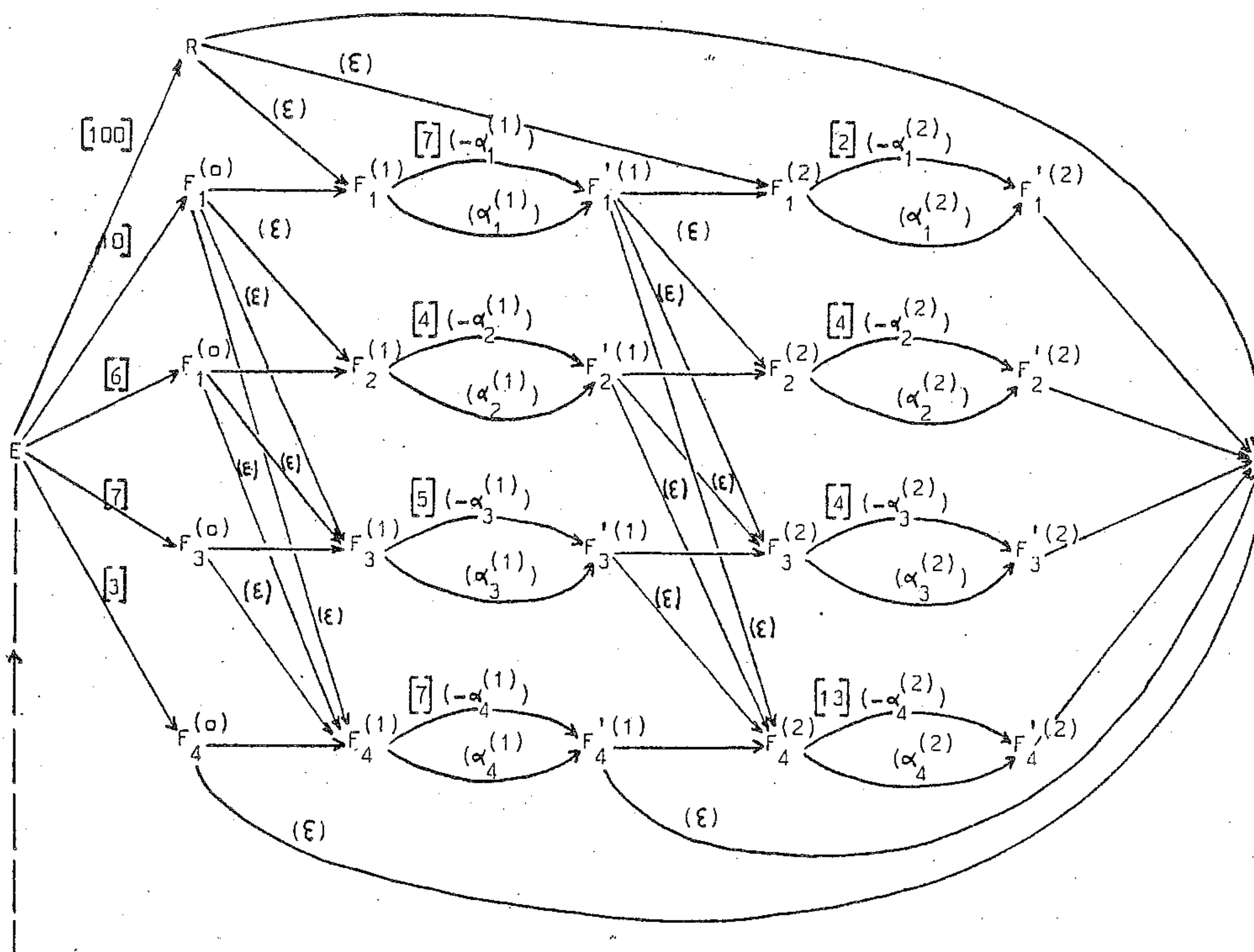


Figure 4

Les capacités sont notées entre crochets et les coûts entre parenthèses. Les arcs du réseau dont la capacité n'est pas indiquée ont une capacité infinie, les arcs du réseau dont le coût n'est pas indiqué ont un coût nul.

V - INTERPRETATION DES RESULTATS

Soit γ^* le flot maximal de coût minimal sur G_R^* ; comment interpréter ce flot ?

Les différentes variables de décision sont déterminées par les flux suivants :

$\gamma^* (R, F_i^{(k)})$ = nombre de personnes à recruter dans la fonction i à la fin de la période k

$\gamma^* (F_i^{\prime(k)}, F_j^{(k+1)})$ = nombre de personnes devant passer de la fonction j à la fin de la période k + 1 (pour k = 0 le flux à considérer est le flux de l'arc $(F_i^{(0)}, F_j^{(1)})$

$\gamma^* (F_i^{\prime(k)}, S)$ = nombre de personnes devant quitter le système à partir de la fonction i à la fin de la période k + 1. (dans le cas où k = 0 le flux à considérer est le flux sur l'arc $(F_i^{(0)}, S)$).

CONVERSATION-TYPE

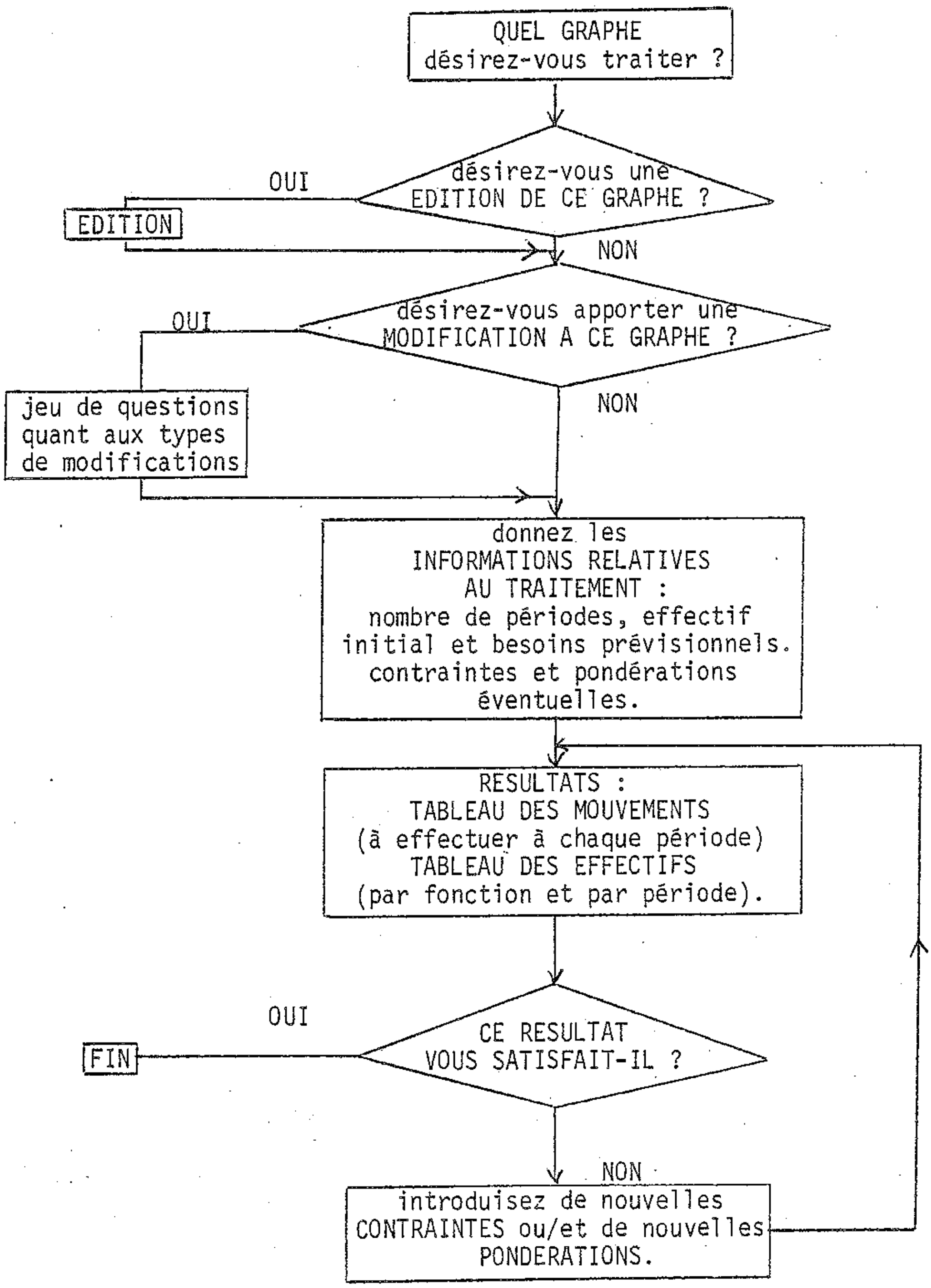


Figure 5

VII - SOLUTIONS APPORTEES AUX EXEMPLES PROPOSES

1 - EXEMPLE N°1

La solution proposée par le modèle est la suivante :

- il faut recruter un OCPR T_2
- un OCPR T_2 doit passer CHEF APV T_2
- un CHEF APV T_2 doit passer ATT TECH DAI.

On s'aperçoit alors que si l'on effectue ces mouvements les effectifs souhaités dans chaque fonction sont obtenus. Mais cette solution ne satisfait pas le décideur ; il ne voit pas, parmi les OCPR T_2, celui qui pourrait occuper immédiatement la fonction CHEF APV T_2. On fait donc une nouvelle exécution en interdisant le mouvement OCPR $T_2 \longrightarrow$ CHEF APV T_2. Le modèle propose alors la solution suivante :

- recrutement d'un CHEF APV T_3
- promotion d'un CHEF APV T_3 en CHEF APV T_2
- promotion d'un CHEF APV T_2 en ATT TECH DAI.

Cette solution permet également d'obtenir les effectifs souhaités dans chaque fonction. D'autre part, cette solution satisfait le décideur, le problème est donc terminé.

2 - EXEMPLE N°2

On a attribué les pondérations suivantes aux différentes fonctions :

OCPR T_2	1
CHEF APV T_3	1
OCPR T_1	2
CHEF APV T_2	4
CHEF SERV PR	2
CHEF APV T_1	8
ATT TECH DEE DA	4
RESP APV FRANCE	6
ATT TECH DAI	8

La solution proposée par le modèle est alors la suivante :

- promotion d'un OCPR T_2 en CHEF APV T_2
- promotion d'un CHEF APV T_2 en CHEF APV T_1.

Les effectifs souhaités dans chaque fonction sont obtenus si l'on effectue ces deux mouvements, excepté pour la fonction OCPR T_2 où il manque une personne. (Remarquons que, quelle que soit la solution envisagée, il manquera toujours une personne dans une fonction puisque le recrutement est interdit

Cette solution satisfait le décideur.

3 - EXEMPLE N° 3

Dans cet exemple les pondérations ont été attribuées de telle façon qu'un écart éventuel à la troisième période soit deux fois plus important que le même écart à la deuxième période et quatre fois plus important que ce même écart à la première période. D'autre part toutes les fonctions ont été placées au même plan.

Le modèle nous propose la solution suivante :

Six mouvements à la fin de la première période.

1 - recrutement d'un CHEF APV T_3
2 - recrutement d'un RESP APV FRANCE
3 - promotion d'un OCPR T_2 en CHEF APV T_2
4 - promotion d'un CHEF APV T_2 en ATT TECH DAI
5 - promotion d'un CHEF SERV PR en CHEF APV T_2
6 - promotion d'un CHEF APV T_1 en ATT TECH DEE DA.

Deux mouvements à la fin de la deuxième période.

7 - promotion d'un OCPR T_1 en CHEF APV T_2
8 - promotion d'un CHEF APV T_2 en ATT TECH DAI

Deux mouvements à la fin de la troisième période

9 - promotion d'un OCPR T_2 en CHEF APV T_3
10- promotion d'un CHEF SERV PR en CHEF APV T_2.

Si l'on effectue tous les mouvements indiqués ci-dessus nous voyons que les besoins prévisionnels seront exactement satisfaits.

Cette solution ne satisfait pas le décideur : il désire interdire les trois mouvements suivants : 2, 8, 9.

Le modèle propose alors une nouvelle solution qui satisfait tous les besoins exprimés excepté ceux des fonctions RESP APV FRANCE et ATT TECH DAI à la fin de la première période.

Les mouvements à effectuer sont les suivants :

Huit mouvements à la fin de la première période.

1 - recrutement d'un OCPR T_2

2 - recrutement d'un CHEF APV T_3

3, 4 - promotion de deux OCPR T_2 en CHEF APV T_3

5, 6 - promotion de deux CHEF APV T_2 en ATT TECH DAI

7 - promotion d'un CHEF SERV PR en CHEF APV T_2

8 - promotion d'un CHEF APV T_1 en ATT TECH DEE DA.

Trois mouvements à la fin de la deuxième période.

9 - recrutement d'un CHEF APV FRANCE

10 - promotion d'un OCPR T_1 en CHEF APV T_2

11 - promotion d'un CHEF APV T_2 dans une fonction extérieur au système.

Quatre mouvements à la fin de la troisième période.

12 - recrutement d'un CHEF APV T_3

13 - promotion d'un OCPR T_2 en CHEF APV T_2

14 - promotion d'un CHEF APV T_2 dans une fonction extérieur au système

15 - promotion d'un CHEF SERV PR en CHEF APV T_2.

On trouvera en annexe II le déroulement de la conversation correspondant à cet exemple.

VIII - LES PROGRAMMES INFORMATIQUE

Le modèle comporte cinq programmes

- GRAPH
- FLCREAT
- FLOT
- FLEDI
- FLREP

Le programme GRAPH permet à l'utilisateur de créer ou de modifier le graphe de carrières sur lequel il désire travailler.

Le programme FLCREAT permet d'entrer les données du modèle :

- horizon de gestion ;
- effectif initial dans chaque fonction ;
- effectif souhaité dans chaque fonction à chaque période ;
- coefficients de pondération ;
- contraintes.

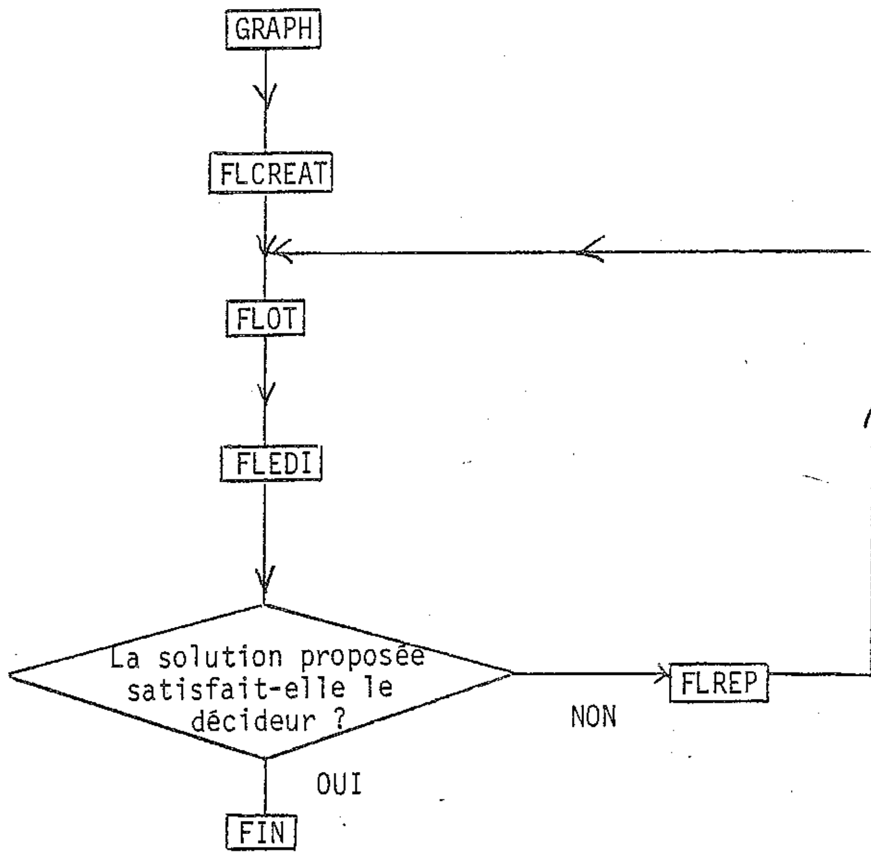
Le programme FLOT calcule la solution optimale à partir des données et contraintes fournies par les deux programmes précédents.

Le programme FLEDI donne les résultats du modèle sous la forme de deux tableaux : le premier tableau donne les mouvements à effectuer à chaque période ; le second montre les effectifs que l'on obtiendra dans chaque fonction à chaque période si l'on effectue les mouvements indiqués par le premier tableau.

Le programme FLREP joue pratiquement le même rôle que FLCREAT. Il est utilisé lorsque l'utilisateur, ayant déjà obtenu des solutions, veut en calculer une autre en introduisant de nouvelles contraintes ou/et de nouvelles pondérations.

(Les dossiers de programmation et les listings concernant ces programmes figurent dans (5)).

L'enchainement de ces 5 programmes est le suivant :


GRAPH
FLCREAT
FLOT
FLEDI
La solution proposée satisfait-elle le décideur ?
NON
FLREP
OUI
FIN

IX - DEUX AUTRES PROBLEMES DE GESTION PREVISIONNELLE DES EFFECTIFS.

Le modèle que nous venons de décrire ne permet pas d'imposer une durée de séjour dans chaque fonction. La possibilité de pouvoir introduire une telle contrainte intéresse les responsables. Il n'est pas souhaitable, en effet, qu' unindividu occupe trop longtemps la même fonction ; il risque de se scléroser. le changement de poste permet à l'individu de se renouveler et l'empêche ainsi de s'installer dans la routine. Cependant, il ne faut pas tomber dans l'excès inverse en promenant le personnel de fonctions en fonctions à un rythme trop rapide. La durée d'occupation d'une fonction devra donc être choisie judicieusement par les responsables ; elle variera d'une fonction à une autre.

Nous avons construit un modèle capable de prendre en compte ces contraintes de durée de séjour dans une fonction. Ce modèle, comme le précédent, détermine la politique globale de personnel à mettre en oeuvre pour adapter les effectifs de chaque fonction aux besoins prévisionnels.

Enfin, toujours en ce qui concerne la gestion globale des effectifs visant à satisfaire les besoins prévisionnels, est-il possible, en faisant varier légèrement les durées de séjour à respecter dans chaque fonction, d'adapter, à un certain horizon, les effectifs aux besoins de l'entreprise, tout en imposant des taux de transition sur chaque arc du graphe représentant l'organisation. En effet, dans certains cas, les responsables aimeraient connaitre les conséquences les plus favorables d'une politique définie de la façon suivante : pour tout arc correspondant à une possibilité de passage d'une fonction i à une fonction j un taux de transition τ_{ij} est fixé. Par exemple, dans l'organisation que nous avons étudiée, les responsables peuvent souhaiter que, parmi les spécialistes de la pièce de rechange, 80 % restent dans cette filière.

Le modèle que nous avons réalisé, concernant ce problème, permet de connaître les conséquences d'une telle politique tout en essayant de l'adapter aux besoins en jouant sur la durée d'occupation des différents postes. Le lecteur intéressé trouvera tous les détails concernant ces deux modèles dans (5).

CONCLUSION

Ce modèle concerne uniquement la gestion prévisionnelle des effectifs et se limite donc à la recherche des politiques de personnel à un niveau global et anonyme, bien que certains mouvements puissent concerner une seule personne.

La résolution d'un tel problème impose le recours à des méthodes de recherche opérationnelle. Il existe, en effet, un si grand nombre de solutions envisageables, que, seule une procédure appropriée permet de dégager la meilleure.

Ce modèle est considéré comme opérationnel à la Direction Centrale de l'Après-Vente de la Régie Nationale des Usines Renault. Il s'agit d'un outil général susceptible de répondre à toutes questions concernant une grosse organisation ou une petite, de gros effectifs ou de petits, à court terme ou à moyen terme.

A court terme, il permet de connaître la cascade de mouvements à effectuer pour faire face à un départ imprévu, une promotion ou tout autre aléa individuel.

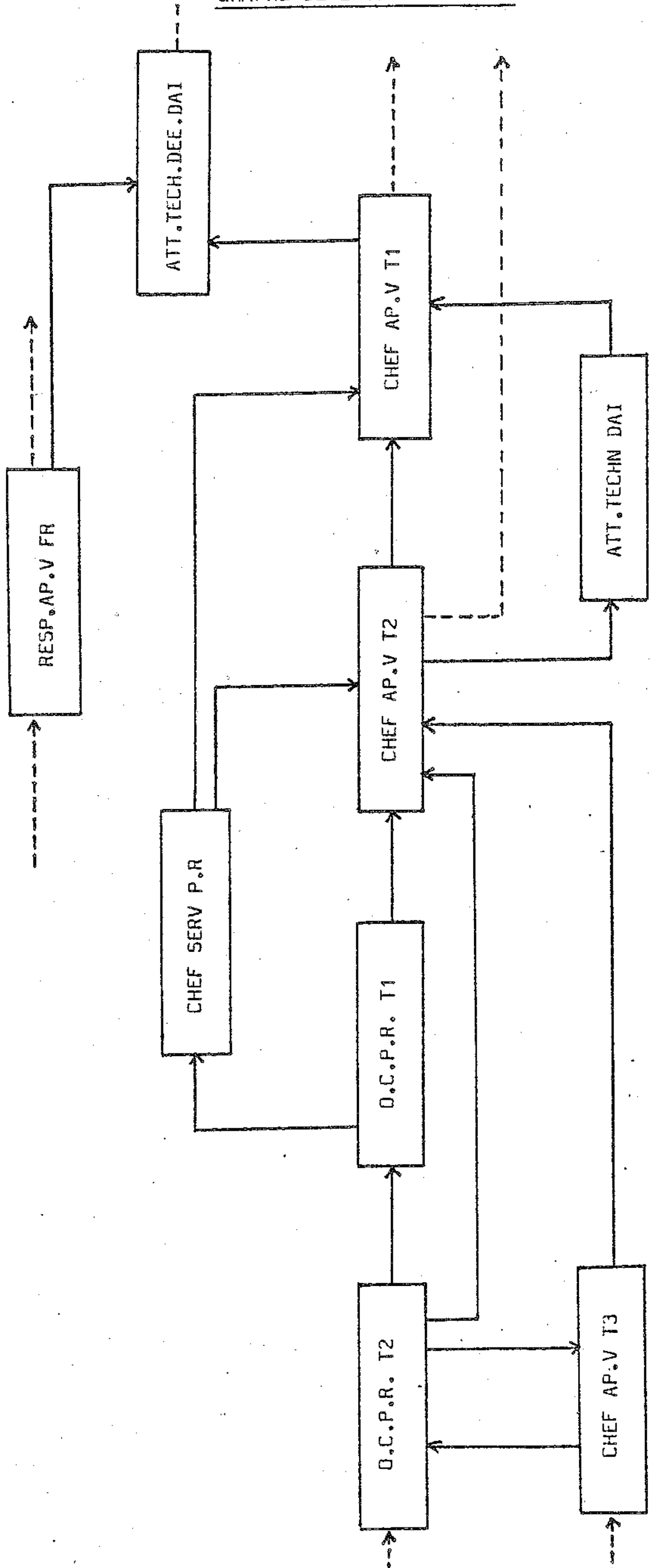
A moyen terme, il permet de cerner les éléments d'une politique globale de mouvements à effectuer pour faire face au gonflement, à la stagnation ou au désengagement des différents secteurs de l'organisation.

Nous avons constaté, par ailleurs, que la préparation des données pour ce modèle était extrêmement fructueuse pour l'entreprise, en dehors de toute considération de gestion prévisionnelle du personnel. Il faut en effet dresser une liste des fonctions que l'on désire prendre en compte. Ces fonctions doivent être stables sur la période de gestion considérée ; il est donc nécessaire de les définir avec précision. Il faut ensuite étudier toutes les transitions possibles et souhaitables entre ces différentes fonctions. Pour réaliser ce travail, il est nécessaire de considérer les fonctions une à une et de se poser, pour chacune la question suivante : vers quelles fonctions peut évoluer une personne occupant cette fonction ? Tout ce travail de recensement des postes et de définition des transitions possibles permet aux différents responsables d'approfondir leur connaissance de l'entreprise et les contraint à une certaine formalisation.

Cependant, ces démarches rationnelles ne doivent pas faire oublier que, ni l'ordinateur, ni la recherche opérationnelle ne doivent se substituer aux responsables. Elles ont pour seul but d'éclairer leurs choix.

ANNEXE I

GRAPHE DE L'ORGANISATION



ANNEXE II

CONVERSATION CORRESPONDANT A L'EXEMPLE 3.

COM DEMO

Quel graphe désirez-vous traiter ? (X si nouveau) : GRAF 9
Désirez-vous une liste des fonctions ? Oui
Liste des fonctions du graphe Graf 9

De la fonction	A la fonction
Entrée	
	OCPR T2
	CHEF APV T3
	RESP APV FRANCE
OCPR T2	
	CHEF APV T3
	OCPR T1
	CHEF APV T2
CHEF APV T3	
	OCPR T2
	CHEF APV T2
OCPR T1	
	CHEF APV T2
	CHEF SERV PR
CHEF APV T2	
	SORTIE
	CHEF APV T1
	ATT TECH DAI
CHEF SERV PR	
	CHEF APV T2
	CHEF APV T1
CHEF APV T1	
	SORTIE
	ATT TECH DEE DA
ATT TECH DEE DA	
	SORTIE

RESP APV FRANCE

SORTIE

ATT TECH DEE DA

ATT TECH DAI

CHEF APV T1

Avez-vous une modification à apporter ? : OUI

Suppression d'une fonction ? NON

Ajout de fonction ? : NON

Ajout de lien ? : NON

Suppression de lien ? : NON

Combien de périodes voulez-vous traiter ? 3

Effectif en entrée : 50

Donnez les effectifs (initial et par période) pour ces fonctions :

OCPR T2	8, 7, 7, 6
CHEF APV T3	10, 11, 11, 12
OCPR T1	4, 4, 3, 3
CHEF APV T2	9, 10, 10, 11
CHEF SERV PR	4, 3, 3, 2
CHEF APV T1	7, 6, 6, 6
ATT TECH DEE DA	2, 3, 3, 3
RESP APV FRANCE	1, 2, 2, 2
ATT TECH DAI	3, 4, 5, 5

Pour ces fonctions donnez les pondérations pour chaque période

OCPR T2	1, 2, 4
CHEF APV T3	1, 2, 4
OCPR T1	1, 2, 4
CHEF APV T2	1, 2, 4
CHEF SERV PR	1, 2, 4
CHEF APV T1	1, 2, 4
ATT TECH DEE DA	1, 2, 4
RESP APV FRANCE	1, 2, 4
ATT TECH DAI	1, 2, 4

Avez-vous des contraintes ? NON

TABLEAU DES MOUVEMENTS

	PERIODE 1	PERIODE 2	PERIODE 3
DE ENTREE VERS			
OCPR T2	0	0	0
CHEF APV T3	1	0	0
RESP APV FRANCE	1	0	0
DE OCPR T2 VERS			
CHEF APV T3	0	0	1
OCPR T1	0	0	0
CHEF APV T2	1	0	0
DE CHEF APV T3 VERS			
OCPR T2	0	0	0
CHEF APV T2	0	0	0
DE OCPR T1 VERS			
CHEF APV T2	0	1	0
CHEF SERV PR	0	0	0
DE CHEF APV T2 VERS			
SORTIE	0	0	0
CHEF APV T1	0	0	0
ATT TECH DAI	1	1	0
DE CHEF SERV PR VERS			
CHEF APV T2	1	0	1
CHEF APV T1	0	0	0
DE CHEF APV T1 VERS			
SORTIE	0	0	0
ATT TECH DEE DA	1	0	0
DE ATT TECH DEE DA VERS			
SORTIE	0	0	0
DE RESP APV FRANCE VERS			
SORTIE	0	0	0
ATT TECH DEE DA	0	0	0
DE ATT TECH DAI VERS			
CHEF APV T1	0	0	0

TABLEAU DES EFFECTIFS

	INITIAL	PERIODE 1	PERIODE 2	PERIODE 3
OCPR T2				
PREVU	8	7	7	6
REALISE	8	7	7	6
CHEF APV T3				
PREVU	10	11	11	12
REALISE	10	11	11	12
OCPR T1				
PREVU	4	4	3	3
REALISE	4	4	3	3
CHEF APV T2				
PREVU	9	10	10	11
REALISE	9	10	10	11
CHEF SERV PR				
PREVU	4	3	3	2
REALISE	4	3	3	2
CHEF APV T1				
PREVU	7	6	6	6
REALISE	7	6	6	6
ATT TECH DEE DA				
PREVU	2	3	3	3
REALISE	2	3	3	3
RESP APV FRANCE				
PREVU	1	2	2	2
REALISE	1	2	2	2
ATT TECH DAI				
PREVU	3	4	5	5
REALISE	3	4	5	5

COM BOUCLE

Avez-vous des contraintes ? OUI

Donnez le flux maximum admis par arc

Sous la forme : fonction 1, fonction 2, période, contrainte

Après le ? tappez OUI si vous avez un arc, NON dans le cas contraire

? OUI

: ENTREE, RESP APV FRANCE 1, 0

? OUI

: OCPR T2, CHEF APV T3, 3, 0

? OUI

: CHEF APV T2, ATT TECH DAI, 2, 0

? NON

Modification effectif en entrée ? NON

Modification d'une pondération ? NON

TABLEAU DES MOUVEMENTS

	PERIODE 1	PERIODE 2	PERIODE 3
DE ENTREE VERS			
OCPR T2	1	0	0
CHEF APV T3	1	0	1
RESP APV FRANCE	0	1	0
DE OCPR T2 VERS			
CHEF APV T3	0	0	0
OCPR T1	0	0	0
CHEF APV T2	2	0	1
DE CHEF APV T3 VERS			
OCPR T2	0	0	0
CHEF APV T2	0	0	0
DE OCPR T1 VERS			
CHEF APV T2	0	1	0
CHEF SERV PR	0	0	0
DE CHEF APV T2 VERS			
SORTIE	0	1	1
CHEF APV T1	0	0	0
ATT TECH DAI	2	0	0
DE CHEF SERV PR VERS			
CHEF APV T2	1	0	1
CHEF APV T1	0	0	0
DE CHEF APV T1 VERS			
SORTIE	0	0	0
ATT TECH DEE DA	1	0	0
DE ATT TECH DEE DA VERS			
SORTIE	0	0	0
DE RESP APV FRANCE VERS			
SORTIE	0	0	0
ATT TECH DEE DA	0	0	0
DE ATT TECH DAI VERS			
CHEF APV T1	0	0	0

TABLEAU DES EFFECTIFS

	INITIAL	PERIODE 1	PERIODE 2	PERIODE 3
OCPR T2 PREVU REALISE	 8 8	 7 7	 7 7	 6 6
CHEF APV T3 PREVU REALISE	 10 10	 11 11	 11 11	 12 12
OCPR T1 PREVU REALISE	 4 4	 4 4	 3 3	 3 3
CHEF APV T2 PREVU REALISE	 9 9	 10 10	 10 10	 11 11
CHEF SERV PR PREVU REALISE	 4 4	 3 3	 3 3	 2 2
CHEF APV T1 PREVU REALISE	 7 7	 6 6	 6 6	 6 6
ATT TECH DEE DA PREVU REALISE	 2 2	 3 3	 3 3	 3 3
RESP APV FRANCE PREVU REALISE	 1 1	 2 1	 2 2	 2 2
ATT TECH DAI PREVU REALISE	 3 3	 4 5	 5 5	 5 5

ANNEXE 3

ALGORITHME DE DETERMINATION DU FLOT MAXIMAL DE COUT MINIMAL.

Cet algorithme fait appel à la notion de graphe d'écart.

1 - GRAPHE D'ECART ASSOCIE A UN FLOT

Soit $G_R = (A, V)$ un réseau de transport. $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_x\}$ est l'ensemble des sommets de ce réseau et V l'ensemble de ses arcs. Appelons γ_0 un flot sur G_R, c_{ij} et d_{ij} respectivement la capacité et le coût de l'arc $v_{ij} = (a_i, a_j)$.

On associe au couple (G_R, γ_0) un graphe d'écart $G_R^e(\gamma_0) = (A, V_0^e)$ défini de la façon suivante :

$$v_{ij}^e \in V_0^e \Rightarrow v_{ij} \in V \text{ et } C_{ij} > \gamma_0(v_{ij}) \quad (1)$$
$$\text{ou } v_{ji} \in V \text{ et } \gamma_0(v_{ji}) \neq 0 \quad (2)$$

($\gamma_0(v_{ij})$ = flux sur l'arc v_{ij})

L'arc v_{ij}^e de V_0^e est alors muni

- de la capacité résiduelle $C_{ij}^e = c_{ij} - \gamma_0(v_{ij})$
- du coût $d_{ij}^e = d_{ij}$

s'il est construit d'après la relation (1). Il signifie que le flux sur l'arc v_{ij} peut être augmenté.

Si la construction de v_{ij}^e résulte de la relation (2), v_{ij}^e est alors muni

- de la capacité résiduelle $c_{ij}^e = \gamma_0(v_{ji})$
- du coût $d_{ij}^e = - d_{ji}$

cela indique que le flux sur l'arc v_{ji} peut être diminué.

$G_R^e(\gamma_0)$ résume donc les modifications (et les coûts de ces modifications) que l'on peut faire subir à γ_0 sans sortir de la classe des flots sur G_R.

2 - ALGORITHME DE ROY

Cet algorithme permet de rechercher, parmi les flots de valeur maximale, un flot γ dont le coût soit minimal. Le coût d'un flot est défini par l'expression suivante :

$$F(\gamma) = \sum_j d_j \gamma_j$$

si d_j désigne le coût unitaire sur l'arc v_j. L'algorithme de ROY procède par itération sur les graphes d'écart, la démarche étant de calculer un flot maximal en progressant, à chaque étape, de la meilleure manière possible relativement à la fonction coût.

On part d'un flot initial nul $\gamma_0 = (0, 0, \ldots, 0)$ optimal pour la fonction coût $F(\gamma)$. Soit γ_k un flot de valeur γ^*_K optimal relativement à $F(\gamma)$. Si on peut trouver dans le graphe d'écart associé à γ_k : $G^e_R(\gamma_K)$ un chemin de valeur minimale (au sens des coûts) μ^e_k, allant de l'entrée E à la sortie S du réseau, on obtiendra un flot optimal de valeur $\gamma^*_k + 1$ en faisant passer une unité de flux supplémentaire le long de ce chemin μ^e_k. De proche en proche, on aboutira à un flot maximal de coût minimal.

D'où l'algorithme :

I. Prendre comme flot initial $\gamma_0 = (0, 0, \ldots, 0)$.
Aller en II.

II. Soit γ_k le flot réalisable de G_R avec lequel on arrive en II. Construire le graphe d'écart associé $G^e_R(\gamma_k)$.
Aller en III.

III. Si $G^e_R(\gamma_k)$ privé de l'arc (E, S) n'admet pas de chemin allant de l'entrée E à la sortie S, γ_k est un flot maximal de coût minimal. Sinon, soit μ^e_k un chemin de valeur minimale allant de l'entrée E à la sortie S.
Aller en IV.

IV. Soit s la plus petite des capacités résiduelles des arcs de μ^e_k.
Calculer, pour tout arc v_{ij} du réseau :

$\gamma_{k+1}(v_{ij}) = \gamma_k(v_{ij}) + s$ si $v_{ij} \in \mu^e_k$

$\gamma_{k+1}(v_{ij}) = \gamma_k(v_{ij}) - s$ si $v_{ji} \in \mu^e_k$

$\gamma_{k+1}(v_{ij}) = \gamma_k(v_{ij})$ si $v_{ij} \notin \mu^e_k$ et $v_{ji} \notin \mu^e_k$

On obtient alors un nouveau flot γ_{k+1} tel que

$\gamma_{k+1}(v_{SE}) = \gamma_k(v_{SE}) + s.$

Aller en II.

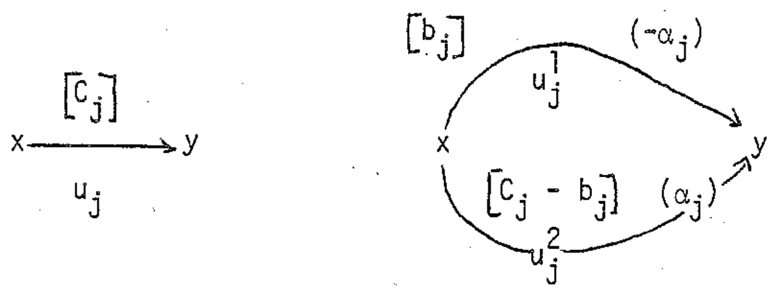
On pourra trouver la démonstration de la validité de cet algorithme en (5) et (8).

ANNEXE 4

DEMONSTRATION DE LA VALIDITE DE LA TRANSFORMATION DU RESEAU PERMETTANT D'OBTENIR UNE FONCTION ECONOMIQUE LINEAIRE.

Considérons un réseau de transport G_R. Pour certains arcs $v_j(j\ \ F)$ de ce réseau le coût associé au flux sur cet arc est : $\alpha_j \ \gamma_j - b_j$. (α_j et b_j sont deux coefficients, γ_j est le flux sur l'arc v_j). Remplaçons chacun de ces arcs par deux arcs comme il est indiqué au paragraphe IV.5. Appelons G_R le réseau obtenu.

Rappelons cette transformation sur un schéma :



(Les capacités sont notées entre crochets et les coûts entre parenthèses).

Nous allons démontrer que, si l'on s'intéresse seulement à des flots de coûts minimaux, le coût d'un flot γ sur G_R est égal au coût du flot correspondant γ^* sur G_R^*, à une constante près ; c'est-à-dire que

$$\alpha_j \left| \gamma_j - b_j \right| = \alpha_j(-\gamma_j^{*1} + \gamma_j^{*2} + b_j) \qquad (I)$$

γ_j^{*1} = flux sur l'arc u_j^1 dans le flot γ^* $\quad 0 \leqslant \gamma_j^{*1} \leqslant b_j$

γ_j^{*2} = flux sur l'arc u_j^2 dans le flot γ^* $\quad 0 \leqslant \gamma_j^{*2} \leqslant c_j - b_j$

$\gamma_j = \gamma_j^{*1} + \gamma_j^{*2}$

Démonstration

En effet, si γ^* est un flot de coût minimal, on ne peut avoir :

$$\gamma_j^{*1} < b_j \quad \text{et} \ \gamma_j^{2} > 0$$

sinon, en augmentant le flux sur u_j^1 de $\varepsilon > 0$ et en le diminuant sur u_j^2 de la même quantité, le coût du flot diminuerait de $2\varepsilon\alpha_j$.

On a donc $\gamma_j^{*1} = b_j$ ou $\gamma_j^{*2} = 0$ (ou les deux). Examinons les deux cas :

- si $\gamma_j^{*1} = b_j$

  $\alpha_j |\gamma_j - b_j| = \alpha_j |\gamma_j^{*1} + \gamma_j^{*2} - b_j| = \alpha_j \gamma_j^{*2}$

  $\alpha_j |- \gamma_j^{*1} + \gamma_j^{*2} + b_j| = \alpha_j |\gamma_j^{*2}| = \alpha_j \gamma_j^{*2}$

  et la relation (I) est bien vérifiée .
- si $\gamma_j^{*2} = 0$

  $\alpha_j |\gamma_j - b_j| = \alpha_j |\gamma_j^{*1} - b_j| = \alpha_j (b_j - \gamma_j^{*1})$

  $\alpha_j |-\gamma_j^{*1} + \gamma_j^{*2} + b_j| = \alpha_j (b_j - \gamma_j^{*1}| = \alpha_j (b_j - \gamma_j^{*2})$

  et la relation (I) est encore vérifiée.

BIBLIOGRAPHIE

(1) BENAYOUN R. - "La pratique de l'optimisation dans l'entreprise". Presses universitaires de France, Paris, 1974.

(2) BENAYOUN R., BOULIER C. - "Approches rationnelles dans la gestion du personnel". Dunod, Paris, 1972.

(3) BENAYOUN R., HANNEBELLE C., MAAREK G. - "Un modèle de gestion prévisionnelle des cadres" (POLCA), Metra, Vol. X, N° 3, 1971.

(4) BIDOT Y. - "Système et modèle de développement du personnel". Journées internationales du Touquet "Gestion prévisonnelle du personnel", AFCET/ The Manpower Society, 14-16 mai 1973.

(5) BILLIONNET A. - "Modèles d'aide à la décsion visant à adapter les politiques de personnel aux besoins prévisionnels". Thèse de 3ème cycle, gestion, Université Paris IX, 1976, thèse consultable au LAMSADE.

(6) FORD L.R., FULKERSON D.R. - "Flots dans les graphes". Gauthier-Villars, Paris, 1966.

(7) HU T.C. - "Integer programming and network flows". Addison Wesley, 1969.

(8) ROY B. - "Algèbre moderne et théorie des graphes orientées vers les sciences économiques et sociales". Dunod, Paris, tome 1, 1969 et tome 2, 1970.